1. gyakorlat, megoldásvázlatok

Az 1.2.5.7. feladatok szerepeltek, a 8. feladat áttolódott a második gyakorlatra.

3. Legyen U egyenletes eloszlású $[0,1]$-n. Írjuk fel U-t kettes számrendszerben $U = \sum_{k>0} 2^{-k} X_k$. Mutassuk meg, hogy a $V_n = \sum_{k>0} X_{n+k} 2^{-k}$, $n \geq 0$ sorozat erősen stacionárius és számítsuk ki a kovariancia függvényét.

Megoldásvázlat: Azt kell megmutatni, hogy az X_k-k független Bernoulli eloszlásúak. Ebben segít, ha rajzolunk: megnézzük, az intervallum mely pontjaira igaz, hogy a k. helyiértéken 0 ill. 1 áll kettes számrendszerben. Ezek után gondoljuk át, hogy BÁRMELY $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ (mérhető) függvényre és bármely $\mathbb{R}$-értékű független, azonos eloszlású ε_k sorozatre igaz, hogy az $f(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots)$, $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$, $f(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots)$, stb. erősen stacionárius. A kovarianciafüggvény egyszerű számolgatás, amihez hasonlót a 2. gyakorlaton az autoregresszív folyamatnál megcsinálunk.

4. Legyen ϕ karakterisztikus függvény. Mutassuk meg, hogy

$$|\phi(t) - \phi(s)| \leq \sqrt{2|1 - \phi(t-s)|}$$

Mutassuk meg, hogy ez akkor is igaz, ha ϕ pozitív szemidefinit és $\phi(0) = 1$. (Útmutatás: Írjuk fel ϕ-ből képzett, $0, t, s$ értékekhez tartozó 3×3-as pozitív szemidefinit mátrixot. Vonjuk le az utolsó sort és oszlopot a másodikból. Gondoljuk meg, hogy az így kapott 2×2-es mátrix is pozitív szemidefinit és számítsuk ki a determinánsát.)

Megoldásvázlat: Csak a karakterisztikus függvényt írom le. Mivel $\phi(t) = Ee^{itX}$, igaz, hogy

$$|\phi(t) - \phi(s)|^2 = (Ee^{itX} - Ee^{isX})\overline{(Ee^{itX} - Ee^{isX})} = E[2(1 - \cos((t-s)X))],$$

azt kell csak észrevenni, hogy $1 - \phi(t-s) = E(1 - e^{i(t-s)X})$ és az 1 pontból az $e^{i(t-s)X}$-be mutató vektornak éppen $\cos((t-s)X)$ az x tengelyre vett vetületének az 1 ponttól vett távolsága, így $E[(1 - \cos((t-s)X))] \leq |E(1 - e^{i(t-s)X})|$ szükségképpen.

6. Legyen $c : [0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$, $c(s,t) = \min(s,t)$. Mutassuk meg, hogy c pozitív definit, azaz

$$\sum_{j,k} c(t_k, t_j) z_j \bar{z}_k \geq 0$$

minden $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ és $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ esetben, és csak akkor nulla, ha mindegyik z_k az.

Megoldásvázlat: Képezzük a

$$\begin{bmatrix} c(t_1,t_1) & c(t_1,t_2) & c(t_1,t_3) \\ c(t_2,t_1) & c(t_2,t_2) & c(t_2,t_3) \\ c(t_3,t_1) & c(t_3,t_2) & c(t_3,t_3) \end{bmatrix}$$

mátrixot. Az $(1,1)$ pozíciójú elem éppen t_1, a 2×2-es főminor determinánsa $t_1(t_2 - t_1)$. A mátrix determinánsa $t_1(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)$. Induktíve belátható, hogy a megfelelő $n \times n$-es mátrixra is igaz, hogy determinánsa $t_1(t_2 - t_1) \cdots (t_n - t_{n-1})$, ami pozitív.