

5. feladatsor, valószínűségszámítás informatikusoknak

- (1) Egy csokoládégyárban minden doboz desszertbe 20-féle reklámcédula közül egyet-egyet tesznek. Aki összegyűjti és beküldi mind a 20-félét, jutalmat kap. Várhatóan hány desszert kell ahhoz, hogy mind a 20-féle cédula összegyűljön?
- (2) Öt házaspár leül véletlenszerű sorrendben egy kerek asztal köré (minden elhelyezkedés egyformán valószínű). Mennyi az olyan házaspárok számának várható értéke, akik egymás mellett ülnek?
- (3) (*Tönkremenési feladat*) Kétten fej-írás játékot játszanak egy szabályos érmével. Ha fejet kapnak, akkor az első játékos fizet a másodiknak 1 forintot, ha írást, akkor a második játékos fizet az elsőnek 1 forintot. Az első játékosnak kezdetben $k(\geq 1)$ forintja van, míg a másodiknak $n - k(\geq 1)$. Addig játszanak, amíg valamelyikük az összes pénzét el nem veszti. Várhatóan mennyi ideig tart a játék?
- (4) Szerencsejátékot játszunk, amely során minden fordulóban a feltett tétet $\frac{1}{2}$ valószínűséggel megduplázzuk, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pedig elveszítjük. Kezdetben 1 petánkunk van. Addig folytatjuk, amíg 5 petánkunk nem lesz vagy el nem fogy az összes pénzünk. Várhatóan hány játszmát fogunk játszani, ha a mohó stratégiát követjük, azaz mindig akkora tétet választunk, amennyi az öthöz hiányzik, vagy ha ez nem lehetséges, akkor az összes pénzünket feltesszük?
- (5) Egy szabályos dobókockát százszor feldobunk. Számítsuk ki a páros dobások összegének várható értékét.
- (6) Egy kalapban 9 cédula van, ezeken az $1, 2, \dots, 9$ számok szerepelnek. Addig húzunk visszatevéssel, amíg 5-nél nagyobb számot nem kapunk (minden húzásnál minden cédulát azonos valószínűséggel választunk). Mennyi a kihúzott számok összegének a várható értéke?
- (7) Péternek 6 szürke, 5 fekete és 3 fehér pólója van. Egy utazás előtt találmra kiválaszt hat különböző pólót, minden lehetőséget azonos valószínűséggel választva.
 - (a) Milyen eloszlású a kiválasztott szürke pólók száma?
 - (b) Mennyi a kiválasztott szürke pólók számának várható értéke?
 - (c) Mennyi a valószínűsége, hogy minden színből ugyanannyi darabot visz magával az utazásra?
- (8) Válasszunk egy számot 1 és n között, mindegyiket azonos valószínűséggel. Mennyi a kiválasztott szám várható értéke és szórása?
- (9) (*Körbeverő futamok*) Két fej-írás sorozat közül azt nevezzük jobbnak, amelyikre $1/2$ -nél nagyobb annak az esélye, hogy egy szabályos érmét dobálva hamarabb bekövetkezik, mint a másik. Mutassuk meg, hogy " $FFI < IFF < IIF < FII < FFI$ ", tehát körbeverik egymást.
- (10) Van egy csomag virágmagunk, amelyről azt tudjuk, hogy elültetve őket, mindegyik egymástól függetlenül 10% eséllyel kikel, 90% eséllyel pedig nem. Hány magot ültessünk a cserépbbe, ha azt szeretnénk, hogy pontosan egy virágmag keljen ki? Azaz, hány mag elültetése esetén a legnagyobb az esélye annak, hogy pontosan egy virág kel ki? Ebben az esetben mennyi a kikelő virágok számának várható értéke és szórása?
- (11) Legyen N Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Jelölje X a fejek, Y az írások számát egy független, szabályos érmedobásokból álló sorozat első N dobása között. Független-e X és Y ?
- (12) Van két telefontöltőnk, az egyik minden kipróbálásnál a többtől függetlenül 20% valószínűséggel, a másik minden kipróbálásnál a többtől függetlenül 90% valószínűséggel működik. Kiválasztjuk találmra az egyiket, mindkettőt azonos valószínűséggel választva, és a harmadik sikeres működéséig próbálkozunk.
 - (a) Feltéve, hogy ez az 5. kipróbálás volt, mennyi a valószínűsége, hogy az első töltőt választottuk?
 - (b) Mi az a legkisebb k szám, amire az igaz, hogy feltéve, hogy a k . kipróbálás volt az első sikeres, annak valószínűsége, hogy a második töltőt választottuk, több, mint annak valószínűsége, hogy az első töltővel próbálkoztunk?
- (13) Tegyük fel, hogy egy fertőző betegségben minden beteg a többiektől függetlenül 3 várható értékű Poisson-eloszlással leírható számú másik embert fertőz meg.

Ha Péter beteg, mennyi a valószínűsége, hogy az általa két lépésben megfertőzött emberek száma 2? Ezek tehát azok az emberek, akik olyasvalakitől kapták el a betegséget, akit Péter megfertőzött. (Elég összeg alakban felírni, nem kell zárt képlet).

Mennyi a Péter által két lépésben megfertőzött emberek számának várható értéke?