5. feladatsor, matematikai statisztika, 2024

Fisher informácó: A legegyszerűbb esetben, ha $\theta \in \mathbb{R}$ és a mértékcsalád $f_\theta(x), x \in \mathbb{R}$ sűrűségfüggvényekkel adott. Enyhe feltételek mellett az n elemű minta $I_n(\theta)$ Fisher-információja

$$I_n(\theta) = nI_1(\theta) := nE_\theta[(\partial_\theta \ln f_\theta(X_1))^2].$$

Ez a mérőszám jól jellemzi a mintában lévő információ mennyiségét az egyes paraméterek mellett. Enyhe feltételek mellett a $g(\theta)$ bármely T torzítatlan becslésére:

$$D^2_\theta(T(\underline{X})) \geq \frac{(g'(\theta))^2}{I(\theta)},\ \theta \in \Theta,$$

ez az ún. információs határ.

1. Számítsuk ki a Fisher-információt a következő eloszláscsaládokból vett n elemű minta esetén:
(a) Poisson(λ), $\lambda > 0$ paraméterrel,
(b) binomiális(r, p), r ismert, $0 < p < 1$ paraméter,
(c) geometriai p paraméterrel,
(d) exponenciális $\lambda > 0$ paraméterrel,
(d) gamma(α, λ), $\alpha > 0$ ismert, $\lambda > 0$ paraméter,
(e) $N(\vartheta, \vartheta^2)$, $\vartheta > 0$ paraméter.

2. Az alábbi eloszlás Fisher-információját számoljuk ki, ahol $\theta > 1$ paraméter:
$$P_\theta(X = k) = \frac{1}{\theta}\frac{(\ln\theta)^k}{k!},\ k \in \mathbb{N}.$$

3. Legyen X gamma eloszlású, $\alpha > 2, \lambda > 0$ paraméterekkel. Akkor az $1/X$-et *inverz gamma* eloszlásnak nevezzük. Adjunk képletet $E[1/X]$-re, valamint $E[1/X^2]$-re!

4. Exponenciális eloszláscsaládnál eléri-e az információs határt:
(a) Az $1/\lambda$ becslése az $\bar{X}_n$ átlaggal;
(b) illetve λ torzítatlan becslése, $\frac{n-1}{X_1+\ldots+X_n}$?

5. Határozzuk meg egy inverz gamma eloszlású X val. változó Fisher-információját, ha α ismert, λ pedig ismeretlen paraméter!

6. Egy készülék élettartama exponenciális eloszlású λ paramáterrel. Elindítunk n gépet és figyeljük, hány működik még a t időpontban. Mekkora a megfigyelésünk Fisher-információja? Mely t-re lesz maximális?