1. feladatsor, matematikai statisztika, 2024. február 15.

1. Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ egy f sűrűségfüggvényű és F eloszlásfüggvényű abszolút folytonos eloszlásból vett minta (független és azonos eloszlású valószínűségi változók egy sorozata), és jelölje az eredeti mintából képzett rendezett mintát: $X_1^* \le X_2^* \le \cdots \le X_n^*$. Határozzuk meg a rendezett minta (együttes) sűrűségfüggvényét.

2. Határozzuk meg az X_k^* változó (perem) eloszlás- és sűrűségfüggvényét. Nézzük meg azt az esetet, amikor X_1 egyenletes a $[0,1]$-en.

3. Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ exponenciális eloszlásból vett minta, $S_i = X_1 + \cdots + X_i$, továbbá $Y_i = S_i/S_n$, $1 \le i \le n$. Határozzuk meg $Y_1, \ldots, Y_n, S_{n+1}$ együttes sűrűségfüggvényét! Mutassuk meg, hogy $Y_1, \ldots, Y_n$ eloszlása olyan, mint a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlásból vett n elemű rendezett mintáé.

4. Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlásból vett minta, határozzuk meg a rendezett minta várható értékét.

5. Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlásból vett minta, határozzuk meg a rendezett minta kovarianciamátrixát is.

6. Mutassuk meg, hogy az $X_k^* = t$ feltétel mellett $X_1^*, \ldots, X_{k-1}^*$ és $X_{k+1}^*, \ldots, X_n^*$ független, az előbbi eloszlása olyan, mint egy $k-1$ elemű rendezett mintáé az $f_1(x) = \frac{f(x)}{F(t)}\,\mathbb{I}(x < t)$ sűrűségfüggvényű eloszlásból, míg az utóbbi eloszlása olyan, mint egy $n-k$ elemű rendezett mintáé az $f_2(x) = \frac{f(x)}{1-F(t)}\,\mathbb{I}(t < x)$ sűrűségfüggvényű eloszlásból.

7. Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlásból vett minta.
   Legyen
   $$Y_1 = \frac{X_1^*}{X_2^*}, \quad Y_2 = \left(\frac{X_2^*}{X_3^*}\right)^2, \quad \ldots, \quad Y_{n-1} = \left(\frac{X_{n-1}^*}{X_n^*}\right)^{n-1}, \quad Y_n = (X_n^*)^n .$$
   Mutassuk meg, hogy $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ eloszlása megegyezik $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eloszlásával.

8. Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ exponenciális eloszlásból vett minta, és $Y_1 = nX_1^*, Y_2 = (n-1)(X_2^* - X_1^*), \ldots, Y_{n-1} = 2(X_{n-1}^* - X_{n-2}^*), Y_n = X_n^* - X_{n-1}^*$.
   (a) Mutassuk meg, hogy $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ eloszlása megegyezik $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eloszlásával.
   (b) Határozzuk meg az $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*$ rendezett minta várható értékét és kovarianciamátrixát.