2005. július 21.

Számtami közép, mértani közép, meg ilyenek[1]

Kovács Veronika[2] és Petz Dénes[3]

a Veres Pálné Gimnázium tanulója és volt tanulója

Több, mint kétezer évvel ezelőtt a régi görögök arányokra alapozva már használták a **számtani**, a **mértani** és a **harmonikus közép** fogalmát. Legyen x és y pozitív szám, a számtani közepük

$$A(x,y) := \frac{x+y}{2},$$

a mértani közepük

$$G(x,y) := \sqrt{xy}$$

és harmonikus közepük

$$H(x,y) := \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \frac{2xy}{x+y}\ .$$

Mind a három mennyiség x és y közé esik, ez indokolja a *közép* elnevezést. Ha $x < m < y$, akkor a számtani közepet a

$$y - m = m - x,$$

a mértani közepet a

$$\frac{m}{x} = \frac{y}{m}$$

és a harmonikus közepet a kicsit bonyolultabb

$$y = m + \frac{y}{n} \quad \text{és} \quad m = x + \frac{x}{n}$$

tulajdonságok jellemzik. Ha ebből az egyenletrendszerből n-et kiküszöböljük, akkor egy egyszerűbb alakot kapunk:

$$\frac{y-m}{m-x} = \frac{y}{x}$$

A régi görögök a kocka geometriai harmóniáját látták abban a tényben, hogy az élek számának és a lapok számának harmonikus közepe éppen a csúcsok száma.

[1]Ezt a munkát Bálint Bélánénak ajánljuk, aki mindkét szerzőnek tanára volt.

[2]E-mail: dzsilu@freemail.hu

[3]E-mail: petz@math.bme.hu

Az x, $A(x,y)$, $H(x,y)$ és y számok arányai közötti

$$\frac{x}{\frac{x+y}{2}} = \qquad x : A(x,y) = H(x,y) : y \qquad = \frac{\frac{2xy}{x+y}}{y}$$

összefüggést már a babiloniaiak is ismerték, de feledésbe ment, és **Pitagorasz** újra felfedezte. Az említett közepeket egyébkent pitagoraszi közepeknek is szokták nevezni.

1. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségre egy algebrai és egy geometriai bizonyítást adunk. A

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \tag{1}$$

egyenlőtlenség ekvivalens a

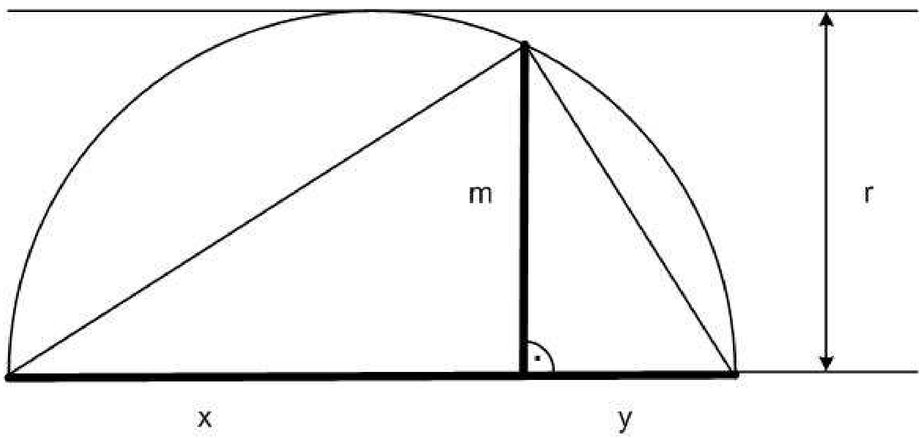
$$4xy \leq (x+y)^2$$

egyenlőtlenséggel, ami nem más, mint

$$0 \leq (x-y)^2 .$$

Ez mindig igaz, és az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x = y$. Ezzel az (1) egyenlőtlenséget bebizonyítottuk, sőt szükséges és elégséges feltételt is kaptunk az egyenlőségre.

A geometriai bizonyítás a derékszögű háromszögre vonatkozó magasságtételen alapszik.



A magasságtétel szerint $m = \sqrt{xy}$, ahol x és y az átfogó szeletei. A háromszög köré írt kör r sugara x és y számtani közepe. Az ábrából látszik, hogy $m \leq r$, és ez a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség.

Most megmutatjuk, hogy a harmonikus közép kisebb, mint a mértani:

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy}$$

A harmonikus közép képletét először átalakítjuk.

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{2}{\frac{x+y}{xy}}=\frac{xy}{\frac{x+y}{2}}$$

Az igazolandó egyenlőtlenség:

$$\frac{xy}{\frac{x+y}{2}}\leq\sqrt{xy}$$

Leosztva $\sqrt{xy}$-nal és a nevezővel átszorozva kapjuk:

$$\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}$$

Ez éppen a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség, amit már ismerünk. Tehát a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség ekvivalens a harmonikus közép és a mértani közép közötti egyenlőtlenséggel.

Most az (1) egyenlőtlenség több változós alakját kívánjuk megmutatni. Legyen x_1, x_2, x_3 és x_4 pozitív szám. Az (1) egyenlőtlenség kétszeri alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\sqrt{(x_1x_2)}\sqrt{(x_3x_4)}\leq\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right).$$

Most a jobb oldalon álló szorzatra megint alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\cdot\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)\leq\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2}\right)^2$$

A két egyenlőtlenséget összevetve és négyzetgyököt vonva az adódik, hogy

$$\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}\leq\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}.$$

Ez a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség négy változós alakja. Ugyanezt az eljárást ismételve juthatunk el az

$$\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\leq\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}, \tag{2}$$

egyenlőtlenséghez, ahol $n=2^k$. Ha az x_i-k között v darab x és $n-v$ darab y van, akkor egyenlőtlenségünk a

$$\sqrt[n]{x^v y^{n-v}}=x^{\frac{v}{n}}y^{\frac{n-v}{n}}\leq\frac{vx+(n-v)y}{n}=\frac{v}{n}x+\frac{n-v}{n}y$$

formát ölti. Ez áttekinthetőbb, ha $\frac{v}{n}$ helyébe α-t írunk:

$$x^\alpha y^{1-\alpha}\leq\alpha x+(1-\alpha)y. \tag{3}$$

Így a súlyozott számtani-mértani közép egyenlőtlenséghez jutottunk, ami $\alpha = 1/2$ esetén adja vissza (1)-t. Bizonyításunkban α nem lehet egyelőre tetszőleges $(0,1)$-beli szám, csupán $\frac{v}{2^k}$ alakú. (Az ilyen számokat néha diadikus racionálisaknak nevezik.) $\frac{v}{2^k}$ alakú számokkal bármilyen $\alpha \in (0,1)$ közelíthető, ezért a (3) egyenlőtlenség minden 0 és 1 közé eső α -ra igaz. A gondolatmenetet egy kicsit továbbfejlesztve eljuthatunk az

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m} \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m \tag{4}$$

egyenlőtlenséghez, ami akkor igaz, ha az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ pozitív számokra $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 1$ teljesül. (4) a **súlyozott számtani-mértani közép egyenlőtlenség** általános alakja.

A súlyozott számtani közép előfordul például a következő helyzetben: Tegyük fel, hogy egy diáknak van két darab 5-ös dolgozata és egy 1-es és egy 2-es felelete. Úgy akarjuk kiszámítani az átlagát, hogy a dolgozatai kétszer olyan súllyal számítanak, mint a feleletei. Ekkor az átlag:

$$\frac{(5+5)+(5+5)+1+2}{6} = \frac{2}{6} \cdot 5 + \frac{2}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 = 3,83\,.$$

Ha az egyszerű átlagot számoljuk, akkor $3,25$ kerekítve 3-as. De ha figyelembe vesszük a dolgozatok nagyobb súlyát, akkor a diák a 4-est is megérdemli.

2. A logaritmikus közép

Az x és y pozitív számok **logaritmikus közepe**:

$$L(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x-y}{\ln x - \ln y} & \text{ha } x \neq y, \\ x & \text{ha } x = y. \end{cases} \tag{5}$$

Ez a képlet jóval bonyolultabb, mint a számtani, vagy a mértani közép. Az sem látszik azonnal, hogy $L(x,y)$ egy pozitív szám, még kevésbé az, hogy x és y közé esik. Mindezek a tulajdonágok következnek az alábbi tételből.

1. Tétel.

$$G(x,y) \leq L(x,y) \leq A(x,y)$$

minden pozitív x és y számra.

Bizonyítás: Osszuk el a

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x-y}{\ln x - \ln y} \leq \frac{x+y}{2}$$

igazolandó egyenlőtlenséget y-nal, így azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{\frac{x}{y}} \leq \frac{\frac{x}{y} - 1}{\ln \frac{x}{y}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + 1\right).$$

Látjuk, hogy mindenütt x-nek és y-nak a hányadosa szerepel, ezért érdemes ennek helyébe egy új változót írni, mondjuk z^2-et:

$$z \le \frac{z^2-1}{2\ln z} \le \frac{1}{2}(z^2+1).$$

Tehát a következő két egyenlőtlenséget kell igazolnunk

$$2z \le \frac{z^2-1}{\ln z} \tag{6}$$

és

$$\frac{z^2-1}{\ln z} \le z^2+1\,. \tag{7}$$

Az egyszerűség kedvéért mindkét egyenlőtlenséget a $z > 1$ esetben igazoljuk (ekkor $\ln z > 0$), a $0 < z < 1$ eset teljesen hasonlóan tárgyalható. Így (7) a

$$\frac{z^2-1}{z^2+1} \le \ln z$$

alakot ölti. $z = 1$ esetén mindkét oldal 0. Az egyenlőtlenség biztosan fennáll, ha a bal oldal lassaban növekszik, mint a jobb, vagyis a bal odal deriváltja kisebb, mint a jobb oldalé. Elvégezzük a deriválást. Meg kell mutatnunk, hogy

$$\frac{2z(z^2+1)-(z^2-1)2z}{(z^2+1)^2} \le \frac{1}{z}.$$

ami átrendezés után

$$0 \le z^4 - 2z^2 + 1 = (z^2-1)^2$$

formát kapja. Természetesen ez igaz, így (7) bizonyítását elvégeztük.

Az (6) egyenlőtlenséget a

$$2\ln z \le \frac{z^2-1}{z} \tag{8}$$

formára hozzuk. $z = 1$ esetén mindkét oldal 0. Hasonlóan, mint az előző esetben, megmutatjuk, hogy a bal oldal deriváltja kisebb, mint a jobb oldalé. Tehát a következő egyenlőtlenséget kell bizonyítanunk:

$$\frac{2}{z} \le \frac{2z \cdot z - (z^2-1)\cdot 1}{z^2}\,,$$

ami átrendezés után

$$2 \le z + \frac{1}{z}\,,$$

és tovább alakítva

$$0 \le (z-1)^2\,.$$

Ez nyilvánvaló, és ezzel a (6) egyenlőtlenség bizonyítását befejeztük.

Ha tudunk integrálni, akkor az

$$x^\alpha y^{1-\alpha} \le \alpha x + (1-\alpha)y$$

egyenlőtlenségeket integrálva α szerint 0-tól 1-ig, éppen az $L(x,y) \le A(x,y)$ egyenlőtlenséghez jutunk. Ebből azt is megjegyezhetjük, hogy a logaritmikus közép a súlyozott mértani közepek integrálja.

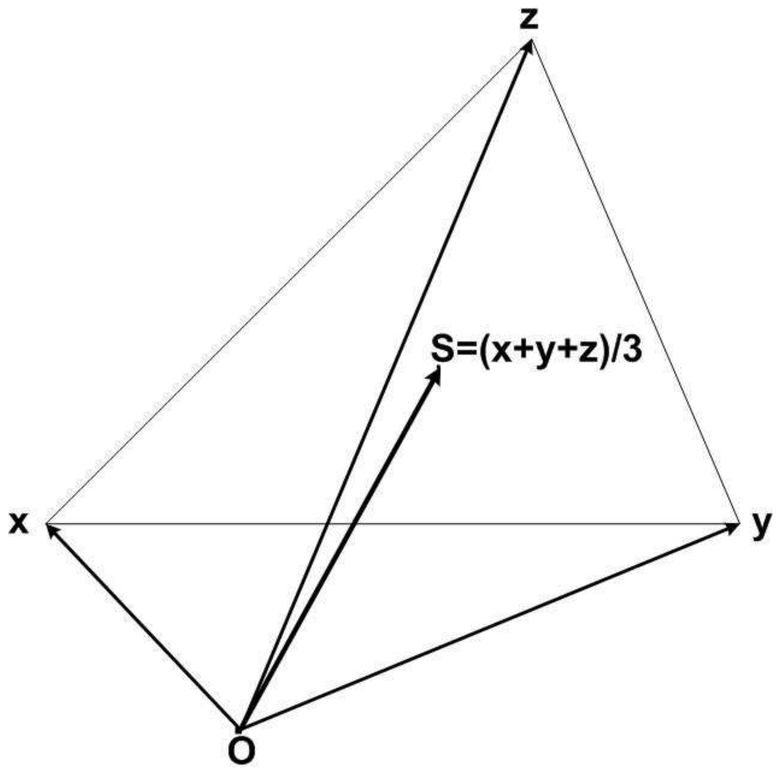
3. Vektorok számtani közepe

Legyen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n$ a sík vektorai. Számtani közepük

$$A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n) = \frac{1}{n}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{x}_n).$$

Az egyszerűség kedvéért foglalkozzunk az $n = 3$ esettel. Ekkor a három vektort inkább az $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$ betűkkel jelöljük. Ha $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ és $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$, akkor

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \left(\frac{1}{3}(x_1 + y_1 + z_1), \frac{1}{3}(x_2 + y_2 + z_2)\right).$$



Az $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$ vektorok számtani közepe nem más, mint a három pont által meghatározott háromszög **súlypontjába** mutató vektor. A számtani középnek tehát egyszerű geometriai jelentése van.

2. Tétel. *Legyen* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *és* $\mathbf{z}$ *három vektor a síkon. Számtani közepük a sík helyvektorain értelmezett*

$$\mathbf{w} \mapsto |\mathbf{w} - \mathbf{x}|^2 + |\mathbf{w} - \mathbf{y}|^2 + |\mathbf{w} - \mathbf{z}|^2$$

függvény minimumhelye. (Itt az abszolútértékjel a vektorok hosszát jelöli.)

Bizonyítás: A tagok csoportosításával:

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{w}-\mathbf{x}|^2+|\mathbf{w}-\mathbf{y}|^2+|\mathbf{w}-\mathbf{z}|^2= \\
&=\Big[(w_1-x_1)^2+(w_2-x_2)^2\Big]+\Big[(w_1-y_1)^2+(w_2-y_2)^2\Big]+\Big[(w_1-z_1)^2+(w_2-z_2)^2\Big] \\
&=\Big[(w_1-x_1)^2+(w_1-y_1)^2+(w_1-z_1)^2\Big]\ +\ \Big[(w_2-x_2)^2+(w_2-y_2)^2+(w_2-z_2)^2\Big]
\end{aligned}$$

Ennek minimumát úgy keressük, hogy külön az első szögletes zárójelben levő tagot és külön a második szögletes zárójelben levő tagot minimalizáljuk.

Megmutatjuk, hogy

$$(w_1-x_1)^2+(w_1-y_1)^2+(w_1-z_1)^2$$

a minimumát (adott x_1, y_1 és z_1 mellett) a

$$w_1=\frac{1}{3}(x_1+y_1+z_1)$$

helyen veszi fel, vagyis

$$\begin{aligned}
&(w_1-x_1)^2+(w_1-y_1)^2+(w_1-z_1)^2 \\
&\qquad\geq[\tfrac{1}{3}(x_1+y_1+z_1)-x_1]^2+[\tfrac{1}{3}(x_1+y_1+z_1)-y_1]^2+[\tfrac{1}{3}(x_1+y_1+z_1)-z_1]^2.
\end{aligned}$$

Az egyenlőtlenség igazolására a jól bevált módszerünket, a deriválást használjuk. Észrevesszük, hogy

$$w_1=\frac{1}{3}(x_1+y_1+z_1)$$

helyen egyenlőség van. Mivel a jobb oldal konstans, elég a bal oldal deriváltját vizsgálni. Megmutatjuk, hogy

$$w_1<\frac{1}{3}(x_1+y_1+z_1)$$

esetén a derivált negatív,

$$w_1>\frac{1}{3}(x_1+y_1+z_1)$$

esetén pedig pozitív, mert ekkor $w_1=\frac{1}{3}(x_1+y_1+z_1)$ helyen éppen a minimumot kapjuk. Mivel a derivált

$$2(w_1-x_1)+2(w_1-y_1)+2(w_1-z_1)=6[w_1-\frac{1}{3}(x_1+y_1+z_1)]\ ,$$

ezért innen már könnyen látszik, hogy ez igaz.

A második szögletes zárójelben levő tag formája teljesen hasonló, ezért hasonlóan minimalizálható. A bizonyítást elvégeztük.

Tételezzük fel, hogy van egy gépünk, ami két vektornak megadja a számtani közepét. Lehetne-e ezt a gépet három vektor számtani közepének meghatározására használni? Közvetlen módon talán nem, de építhetnénk belőle egy új berendezést, ami három bemenő vektorból megad három kimenő vektort. Ha $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ és $\mathbf{z}$ a bemenő vektorok, akkor a kimenők

$$\mathbf{x}':=\tfrac{1}{2}(\mathbf{y}+\mathbf{z}),\qquad \mathbf{y}':=\tfrac{1}{2}(\mathbf{z}+\mathbf{x}),\qquad \mathbf{z}':=\tfrac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{y}).$$

Az új berendezésünk azt a gépet használja, ami két vektornak képes megadni a számtani közepét. Ezt a berendezést használjuk újra, az általa kiadott vektorokat tápláljuk be újra és újra. Így a következő rekurziót végeztetjük.

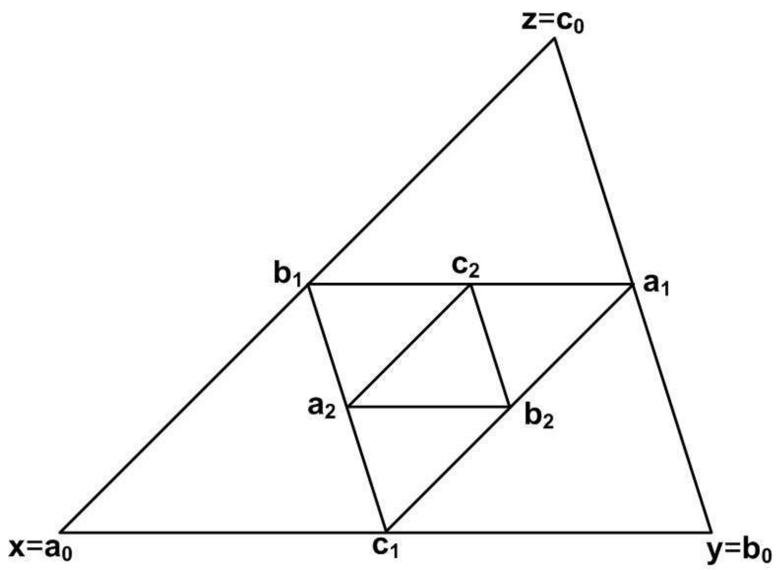
Legyen az $(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0)$ vektorhármas a kiindulási $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ hármas. Ha az $(\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n, \mathbf{c}_n)$ hármas már megvan, akkor a berendezésnek beadva, az kiadja az $(\mathbf{a}_{n+1}, \mathbf{b}_{n+1}, \mathbf{c}_{n+1})$ hármast, amit a

$$\mathbf{a}_{n+1} := \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}_n + \mathbf{c}_n), \quad \mathbf{b}_{n+1} := \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}_n + \mathbf{a}_n), \quad \mathbf{c}_{n+1} := \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n)$$

képletek adnak meg. Amint n növekszik, az $(\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n, \mathbf{c}_n)$ vektorhármasok egyre kisebb Δ_n háromszögeket határoznak meg, és egyre jobban megközelítik a kezdetben adott három vektor számtani közepét, ami a Δ_0 súlypontjának felel meg. Valójában a $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$ háromszögek súlypontjai egybeesnek, hiszen

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{b}_{n+1} + \mathbf{c}_{n+1}) &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}(\mathbf{b}_n + \mathbf{c}_n) + \frac{1}{2}(\mathbf{c}_n + \mathbf{a}_n) + \frac{1}{2}(\mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n)\right) = \\ &= \frac{1}{3}(\mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n + \mathbf{c}_n) \end{aligned}$$

a rekurzióból adódóan.



A rekurzióval értelmezett $(\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n, \mathbf{c}_n)$ vektorhármasok által meghatározott háromszögek egyre kisebbek, és megközelítik az $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$ és $\mathbf{c}_0$ vektorok számtani közepét megadó súlypontot.

4. Feladatok

1. Mutasd meg, hogy az x és y pozitív számok pitagoraszi közepeit az

$$\frac{y-m}{m-x}$$

arány meghatározott értékével lehet jellemezni!

2. Igazold, hogy a számtani, a mértani, a logaritmikus és a harmonikus közepek egyaránt monotonok a vátozóikban, azaz

$$M(x, y) \leq M(x', y'),$$

ha $x \leq x'$ és $y \leq y'$! Szavakkal kifejezve: Nagyobb x-re és y-ra a közép is nagyobb lesz. (M helyében A, G, H és L állhat.)

3. Legyen n egy pozitív egész szám és t egy pozitív valós szám. Igazold, hogy vannak olyan v és k pozitív egész számok, hogy

$$0 \leq t - \frac{v}{2^k} \leq \frac{1}{n} \ !$$