Tsuyoshi Ando professzorról. Unitér dilatációk és mátrixok közepei

Pálfia Miklós és Petz Dénes

BME Matematikai Analízis Tanszék

2005-ben a szegedi Bolyai Intézet a Szőkefalvi-Nagy Béla emlékérmet Tsuyoshi Ando japán emeritusz professzornak ítélte. Ebből az alkalomból bemutatjuk Ando életének és matematikai munkásságának néhány epizódját. Szőkefalvi-Nagy Béla munkásságához kapcsolódik a kontrakciók unitér dilatációja. Egy másik témakör, amit röviden felvázolunk az a mátrixközepek elmélete. Érdekességképpen megvilágítjuk azt is, hogy hogyan vezetett el a többpólusú hálózatok ellenállásmátrixa a mátrixok párhuzamos összegéhez, ami majdnem a harmonikus közepük.

1. Életrajzi bevezetés

Ando 1932-ben született Japán északi szigetén, Hokkaidon. Általános iskolai tanulmányait folytatta, amikor kitört a II. Világháboru. 1945-ben szülei egy katonai tiszti iskolaba iratták be. A világháborut követő amerikai katonai megszállás és a kialakult nagyon zavaros helyzet arra késztette, hogy polgári középiskolába menjen át.

A háború után Japánban sok minden megváltozott, a hokkaidoi régi császári egyetem amerikai stilusú oktatási intézménnyé alakult át. Itt kezdte meg Ando matematikai tanulmányait. A Tokyoból Sapporoba került Hidegono Nakano professzor oktatása és matematikai ötletei kedveltették meg vele a funkcionálanalízist, azon belül pedig a rendezett Banach-terek elméletét, annak ellenére, hogy Nakano arisztokratikus viselkedése miatt személyes kapcsolata alig volt vele. Stefan Banach lineáris operatorokról írott könyvét Ando egy fiatal tanárával együtt olvasta. A rendezett Banach-terek lett doktori értekezésének is a témája 1958-ban. Ezt követően a Hokkaidoi Egyetem Alkalmazott Elektronikai Kutatóintézete matematikai részlegének munkatársa lett. Az intézményt az interdiszciplináris kutatások jellemezték. Ando matematikai stílusa nem a nagy elméletek létrehozása, hanem az eredeti ötleteket megkivánó speciális kérdések megválaszolása volt.

Bár érdeklődése továbbra is a rendezett Banach-terek felé irányult, a Hilbert-terek lineáris operátorai is közel kerültek hozzá. Így került kapcsolatba a Szőkefalvi-Nagy Béla által kifejlesztett dilatációelmélettel. Ando 1963-ban megmutatta, hogy felcserélhető kontrakcióknak felcserélhető unitér dilatációja is van. Az 1975. októberétől 1976. júliusáig terjedő időszakot Szegeden töltötte. Szívesen emlékszik vissza az aktív matematikai életre. A magyar konyhát gyorsan megszokta és megszerette. A halászlé, a paprikás csirke és a töltött káposzta kedvenc ételei voltak. Szegeden lett társszerzoje Ciprian

Foiaşnak és Zoia Ceauşescunak. Közös dolgozatuk kontrakciók speciális dilatációjáról szól. A magyar nyelv nagyon érdekelte, Tandori professzortól azt is megtudta, hogy egy kis helyesírási változtatással akár magyaros neve is lehetne. Évekkel később nagy nehézségekkel ugyan, de elolvasta Vincze István „Emlékezés Riesz Frigyes professzor úrra" magyarul írt cikkét.

Talán Ando elektronikai munkahelyének is szerepe volt a pozitiv definit mátrixok közepeiről kialakított elméletben. Párhuzamos kapcsoláshoz kötődik a mátrixok párhuzamos összege, ami majdnem a harmonikus közepük. A mátrixközepek általános elméletét Ando Fumio Okubo nevű tanítványával alakította ki Löwner operátormonoton függvényekről szóló tételei felhasználásával [8]. Ando érdeklődéséhez talán a geometriai közép állt a legközelebb. Két mátrix geometriai közepének elegáns jellemzését adta, sok évvel később visszatért a témához, és három mátrix geometriai közepével is foglalkozott. A mátrixközepek és a hozzájuk kapcsolódó egyenlőtlenségek Ando kutatási területét a mátrixok irányába terelték, és hamarosan a téma világszerte elismert szakértője lett.

1. ábra. Tsuyoshi Ando professzor igazgatói szobájában

1992-ben az intézmény, ahol Ando dolgozott, megváltoztatta a nevét. Az újonan létrejött Elektronikai Tudományok Kutatóintézetének Ando lett az igazgatója:

2. Többpólusú hálózatok

Anderson és Duffin az [1] cikkben arra törekedtek, hogy létrehozzanak egy egységes leírásmódot a lineáris többpólusú hálózatok kapcsolásainak eredőire. Közismert az a tény, hogy az egyszerű kétpólusok kapcsolásaiban, ha az eredő impedanciákra, vagy vezetőképességekre vagyunk kiváncsiak, akkor soros kapcsolásnál azok összeadódnak, vagyis egy kettes szorzótól eltekintve a számtani közép jelenik meg, párhuzamos kapcsolásnál pedig a harmonikus közepet láthatjuk.

A következőkben bemutatjuk, hogy a lineáris többpólusú hálózatok kapcsolásaiban miképpen jelennek meg az egyszerű mátrixközepek. Mindenekelőtt egy rövid bevezető szükségeltetik ahhoz, hogy világos legyen, hogyan reprezentál egy mátrix egy többpólusú hálózatot.

Tekintsük a 2. ábrán felül található A jelű hálózatot. Baloldalt találhatóak a bemenet kapcsai, amin a befolyó áramokat egy i_1 vektorba rendezhetjük. Minden kapocshoz tartozik egy feszültségszint is, amit valamilyen előre megválasztott referenciapont feszültségszintjéhez viszonyítunk. Ezeket a feszültségeket szintén egy vektorba rendezzük, amit u_1-gyel jelölünk. Ugyanezt a jelölésmódot alkalmazzuk a hálózat kimeneti oldalán is. Így definiálhatunk egy i_2 és egy u_2 vektort a kimenetre és az $I = [i_1, i_2]$ és az $U = [u_1, u_2]$ vektorok tartalmazzák az egész hálózatot leíró áramokat és feszültségeket. Az I vektort a hálózat Neumann-adatának, az U vektort pedig a hálózat Dirichlet-adatának is hívják [4]. Nyilván a két vektor között fennáll valamilyen kapcsolat, amit a hálózat belső struktúrája specifikál. Ez a kapcsolat, ha a hálózat csak lineáris elemeket tartalmaz, egy mátrix, ami a következő:

$$\mathbf{G}\,U = I.$$

Ez az egyenlet admittancia karakterisztika néven is ismert. Véve az inverzét megkapjuk a hálózat ellenállás karakterisztikáját:

$$\mathbf{R}\,I = U\,,$$

ahol $\mathbf{R} = \mathbf{G}^{-1}$ a hálózat ellenállás mátrixa.

Ilyen hálózatokat különbözőképpen össze is köthetünk, az egyik lehetséges kapcsolás a párhuzamos kapcsolás, ami az 2. ábrán alul látható. Föltehető a kérdés, hogy az A és a B hálózat karakterisztikáinak ismeretében, hogyan írhatjuk fel az eredő hálózat karakterisztikáit. Induljunk ki az

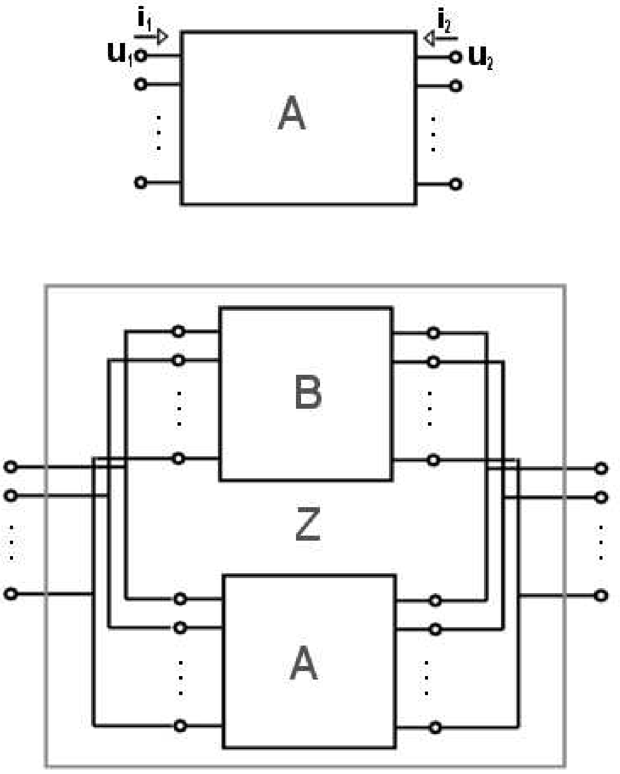
$$\mathbf{G}_A U_A = I_A \quad \text{és} \quad \mathbf{G}_B U_B = I_B.$$

admittancia karakterisztikákból és célozzuk meg az eredő Z hálózat admittancia- és ellenállás karakterisztikáját:

$$\mathbf{G}_Z U_Z = I_Z \quad \text{és} \quad \mathbf{R}_Z I_Z = U_Z.$$

Kirchoff törvényeiből következik, hogy az eredő Z hálózat feszültségei megegyeznek a két alhálózat feszültségeivel

$$U_Z = U_A = U_B,$$



2. ábra. Felül: Egy többpólusú ellenállás bemenő és kimenő áramerősség és feszültségvektoraival. Alul: Két többpólusú ellenállás párhuzamos kapcsolása

az eredő áramok pedig a két alhálózat áramainak összegével

$$I_Z = I_A + I_B.$$

Felhasználva a két egyenletet megkapjuk az eredő hálózat R_Z ellenállását:

$$\mathbf{R}_Z = (\mathbf{R}_A^{-1} + \mathbf{R}_B^{-1})^{-1},$$

amit párhuzamos összegnek is neveztek. Az $\mathbf{R}_A$ és $\mathbf{R}_B$ mátrixok harmonikus közepe

$$2(\mathbf{R}_A^{-1} + \mathbf{R}_B^{-1})^{-1}$$

a párhuzamos összeg duplája.

3. Mátrixok közepei

Most térjünk rá a közepek egy nagyon rövid tárgyalására, lásd még a [12] dolgozatot. A Kubo-Ando elmélet azon az észrevételen alapul, hogy a legtöbb közép egy homogén kétváltozós függvény,

$$M(tx, ty) = tM(x, y).$$

A számtani, geometriai, harmonikus és hatványközepekre az azonosság könnyen látható. A homogenitás következménye, hogy elegendő az egyváltozós $f_M(z) := M(1, z)$ függvényt ismernünk, ugyanis

$$M(x, y) = xM(1, y/x) = xf_M(y/x). \tag{1}$$

Amikor Kubo és Ando ezt a képletet a pozitív definit négyzetes mátrixokra adaptálta, akkor az

$$M(K, L) = K^{1/2}M(I, K^{-1/2}LK^{-1/2})K^{1/2}. \tag{2}$$

formát választották, hiszen mátrixokat nem lehet osztani, és az inverz mátrixszal való szorzás is balról és jobbról egyaránt történhet, illetve biztosítani akarták az $M(K, L)$ mátrix pozitív definitását. Ha $M(I, N) = f_M(N)$ a pozitív definit N mátrixra, akkor a számok geometriai közepének megfelelő négyzetgyök függvény a K és L pozitív definit mátrixokra a

$$K^{1/2}\sqrt{K^{-1/2}LK^{-1/2}}K^{1/2}$$

geometriai közepet adja. Még az sem világos, hogy ez a K és L változókban szimmetrikus, de kis számolással igazolható. Igaz-e, hogy a mértani közép kisebb, mint a számtani? Vagyis a

$$2K^{1/2}\sqrt{K^{-1/2}LK^{-1/2}}K^{1/2} \le K + L \tag{3}$$

egyenlőtlenség a kérdés. A mátrixegyenlőtlenségekkel való számolás gyakorlatot kiván. A következőre állítást használjuk fel:

$$A \le B \quad \text{esetén} \quad CAC \le CBC, \tag{4}$$

bármilyen önadjungált C mátrixra. Ezt használva, azaz (3)-et balról és jobbról $K^{-1/2}$-nel megszorozva, az ekvivalens

$$2\sqrt{K^{-1/2}LK^{-1/2}} \le K^{-1/2}(K + L)K^{-1/2} = I + K^{-1/2}LK^{-1/2}, \tag{5}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. A $D := \sqrt{K^{-1/2}LK^{-1/2}}$ jelöléssel a

$$2D \le I + D^2$$

egyenlőtlenséghez jutunk, ami nyilván igaz. A bizonyítás hasonló volt a számokra vonatkozó egyenlőtlenség bizonyításához. Arra kellett vigyázni, hogy egyidejüleg szorozzunk balról és jobbról, továbbá nem szabad azt használnunk, hogy $A^2 \le B^2$ ekvivalens az $A \le B$ egyenlőtlenséggel, mert ez pozitív mátrixokra nem igaz.

Az olyan mátrixokat, amelyek elemei is mátrixok, blokk-mátrixnak nevezzük. Egy olyan 2×2-es blokk-mátrix, aminek az elemei 2×2-es mátrixok, egyszeruen egy 4×4-es mátrix. Minden 4×4-es mátrixot tekinthetünk 2×2-es blokk-mátrixnak. Akár így, akár úgy tekintjük, a számolási szabályok ugyanazt adják.

Ando érdekes meglátása az, hogy a geometriai közép az a legnagyobb X mátrix, amire a

$$\begin{bmatrix} K & X \\ X & L \end{bmatrix}$$

blokk-mátrix még pozitív szemidefinit. Ha K, X és L 1×1-es mátrixok, azaz számok, akkor 2×2-es mátrix pozitivitása a determináns pozitivitását jelenti. A legnagyobb X, amire $KL - X^2$ pozitív (mások szerint nem-negatív), az $X = \sqrt{KL}$.

A mátrixközepek elméletének három változóra való kiterjesztésével világszerte sokan probálkoztak. A geometriai közép esetében sem egyértelmű a kiterjesztés, más közepekről pedig nagyon kevés dolog ismert [3, 11].

4. Unitér dilatáció

Legyen K a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér egy kontrakciója, azaz $\|K\| \le 1$. Az K operátor unitér folytatása egy olyan U unitér operátort jelent az $\mathcal{H}$-t tartalmazó $\mathcal{K}$ Hilbert-téren, amelynek $\mathcal{H}$-ra való megszorítása K. Ha P jelöli $\mathcal{K}$-nak $\mathcal{H}$-ra való merőleges vetítését, akkor az unitér folytatás a $PU = K$ relációt jelenti (a $\mathcal{H}$ téren).

Az $\mathcal{K}$ Hilbert-teret felbontjuk $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\perp$ formában, ahol $\mathcal{H}^\perp$ az $\mathcal{H}$ altér ortogonális kiegészítője. Ekkor operátorai mátrix formát öltenek:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \tag{6}$$

A mátrix elemei lináris operátorok, és a mátrix hatása

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\xi + B\eta \\ C\xi + D\eta \end{pmatrix}$$

a $\xi \oplus \eta$ vektoron ($\xi \in \mathcal{H}, \eta \in \mathcal{H}^\perp$). Az (6) mátrix egy unitér operátort ad, ha az adjungáltjával való szorzata az identitás, azaz

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^* + BB^* & AC^* + BD^* \\ CA^* + DB^* & CC^* + DD^* \end{bmatrix}$$

az identitás operátor. Ez akkor teljesül, ha

$$AA^* + BB^* = I_1, \quad AC^* + BD^* = 0, \quad CA^* + DB^* = 0 \quad \text{és} \quad CC^* + DD^* = I_2\,,$$

ahol I_1 a $\mathcal{H}$ tér identitása, I_2 pedig a $\mathcal{H}^\perp$ téré. (Részletesebb tárgyalás például [10]-ban található.)

A (6) mátrix K unitér folytatasát adja, ha $A = K$ és B, C és D kielégítik az

$$KK^* + BB^* = I_1, \quad KC^* + BD^* = 0, \quad \text{és} \quad CC^* + DD^* = I_2 \tag{7}$$

egyenleteket. Ilyen B, C és D operátorokat úgy konstruálhatunk, hogy $\mathcal{H}^{\perp}$-t $\mathcal{H}$-val izomorfnak választjuk. Legyen

$$B := \sqrt{I_1 - KK^*}, \quad C := -\sqrt{I_1 - K^*K}, \quad D := K^* .$$

Az (7) egyenletek közül az első és az utolsó nyilvánvalóan teljesül. A második a

$$-K\sqrt{I_1 - K^*K} + \sqrt{I_1 - KK^*}K = 0$$

formát ölti. Ha K önadjungált, akkor az egyenletben szereplő négyzetgyökkel felcserélhető, és az egyenlet nyilvanvalóan teljesül. Ha K nem önadjungált, akkor a bizonyítás kicsit hosszabb, lásd [14] Függelékében a 4. paragrafust.

Jóval nehezebb lesz a helyzet, ha az egyszerű $PU = K$ feltételt a

$$PU^n = K^n \quad \text{és} \quad P(U^*)^n = (K^*)^n \qquad (n \in \mathrm{N})$$

követelménnyel helyettesítjük. Az ilyen U unitért fogjuk K unitér dilatációjának nevezni. Minden kontrakciónak létezik unitér dilatációja.

Ando azt mutatta meg, hogy ha K_1 és K_2 felcsrélhető kontrakciók az $\mathcal{H}$ téren, akkor léteznek U_1 és U_2 unitérek egy alkalmas $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ téren, hogy

$$PU_1{}^nU_2{}^m = K_1{}^nK_2{}^m \quad \text{és} \quad P(U_1{}^*)^n(U_2{}^*)^m = (K_1{}^*)^n(K_2{}^*)^m \qquad (m, n \in \mathrm{N})$$

a $\mathcal{H}$ alterén $\mathcal{K}$-nak [2]. Ando dilatációs tételének jelentőségét fokozza, hogy szoros kapcsolatban van a „lifting” tétellel, ami számos interpolaciós probléma megoldásának kiindulópontja [5, 13].

Hivatkozások

[1] W. N. Jr. Anderson and R.J. Duffin, Series and parallel addition of matrices. J. Math. Anal. Appl. **26**(1969), 576-594.

[2] T. Ando, On a pair of commutative contractions. Acta Sci. Math. (Szeged) **24**(1963), 88–90.

[3] T. Ando, C-K. Li and R. Mathias, Geometric means, Linear Algebra Appl. **385**(2004), 305–334.

[4] E. B. Curtis and J. A. Morrow, The Dirichlet to Neumann map for a resistor network. SIAP, **51** I. **4**(1991), 1011-1029.

[5] C. Foiaş, A.E. Frazho, *The commutant lifting approach to interpolation problems.* Operator Theory: Advances and Applications, 44. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.

[6] Kérchy László, Bevezetés a végesdimenziós vektorterek elméletébe, Polygon Kiadó, 1997.

[7] Kovács Veronika és Petz Dénes, Számtani közép, mértani közép, meg ilyenek. Középiskolai Matematikai Lapok, 2006. március.

[8] F. Kubo and T. Ando, Means of positive linear operators. Math. Ann. **246**(1980), 205-224.

[9] Pálfia Miklós, Közepek és többváltozós kiterjesztéseik számok és mátrixok körében, TDK dolgozat, BME, 2005.

[10] Petz Dénes, *Lineáris analízis*, Akadémiai Kiadó, 2002.

[11] D. Petz, Means of positive matrices: Geometry and a conjecture. Annales Mathematicae et Informaticae **32**(2005), 129–139.

[12] Réffy Júlia, Közepek és egyenlőtlenségek, Polygon, **XIV**(2005), 65–70.

[13] B. Sz.-Nagy, C. Foiaş, *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1967.

[14] Riesz Frigyes és Szőkefalvi-Nagy Béla, Funkcionálanalízis, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.