Polygon, **VIII**(1999), 35–44

A "q" világa, avagy a matematika deformációja

Petz Dénes *

A q betű a magyar nyelvben alig fordul elő, az idegen eredetű szavakban is átírásra került. Például a latin eredetű *kvadratikus* (= másodfokú) vagy *kvantum* (= anyagi részecske, ill. a hozzátartozó energiamennyiség) szavakat is magyarosan írjuk. A matematikai jelölésrendszerben azonban a q betű több helyen megmaradt. A mértani sorozat hányadosának, azaz *kvóciensének* szokásos jele ma is q, és ha egy valós számról demonstrálni akarjuk, hogy racionális, akkor rendszerint $\frac{p}{q}$ alakban írjuk fel, ahol p és q egész számok.

A *deformáció* szó valami formájának megváltoztatását, illetve megváltozását jelenti. Így például a körvonal deformálásával ellipszishez juthatunk. Addig amig a hétköznapi nyelvben a deformáció gyakran a normálistól való negatív irányú eltérést jelent, a matematikában ez nem feltétlenül van így, hiszen az ellipszist és a kört egymásba deformálhatjuk az excentricítás fokozatos változtatásával. Az alábbiakban a deformáció szó egy matematikai objektum (kismértékű) folytonos megváltoztatását fogja jelenteni. Először a természetes számokat fogjuk deformálni.

Induljunk ki a mértani sorozatból, amelynek hányadosára most is a q betűt használjuk jelölésként. A sorozat összegképlete jól ismert:

$$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}\,,$$

ami beszorzással egyszerűen látható. Ha $q=1$, akkor az összegképlet nem érvényes, az összeg n. q ás, mondjuk pozitív valós értékeire az n természetes szám egy deformáltjához jutunk. A deformáció mértéke q-nak az 1-től való eltérése. Vezessük be az

$$[n]_q := 1+q+\ldots+q^{n-1}$$

jelölést, és nevezzük ezt a számot az n-edik *q-egésznek.* Nyilván $[n]_1=n$. A q-egészek összeadására a

$$[n+m]_q=[n]_q+q^n[m]_q=[m]_q+q^m[n]_q$$

a képletet írhatjuk fel. Ezt az egész számok összeadása deformációjának is nevezhetnénk, maga a q deformációs állandó szerepel a *q-összeadásban.*

*Ezt a dolgozatot szeretettel és tisztelettel ajánlom Császár Ákos professzornak 75. születésnapja alkalmából.

Az első n q-egészet összeszorozva a szokásos n faktoriális deformációját kapjuk. Legyen

$$[n]_q! = [1]_q[2]_q \dots [n]_q = \frac{(q-1)(q^2-1)\dots(q^n-1)}{(q-1)^n} \qquad \text{és} \qquad [0]_q! = 1\,.$$

Van-e ennek bármi értelme? $n!$ az n elemű halmaz permutációinak a száma, azaz az $1, 2, 3, \dots, n$ számok összes sorrendjeinek a száma. Ha $\pi = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ egy sorrend, akkor jelentse $\mathrm{inv}\,(\pi)$ az inverziók számát, azaz az olyan $k < l$ indexek számát, hogy $i_k > i_l$. Például az 1,5,2,4,3 permutációban az inverziók száma 4, mert (5,2), (5,4), (5,3) és (4,3) az inverzióban álló párok. Ha az egyes permutációknak az inverziók számától függő alkalmas súlyt adunk, akkor eljuthatunk az $[n]_q!$ számhoz.

Nevezetesen,

$$\sum_{\pi \in S_n} q^{\mathrm{inv}\,(\pi)} = [n]_q!\,,$$

ha az összegzés az $1, 2, \dots, n$ számok összes permutációinak S_n halmazára történik. $q = 1$ esetén természetesen nincsen súlyozás, ez az az eset, amit jól ismerünk. Az általános eset teljes indukcióval egyszerűen bizonyítható. Az $n = 1$-re vonatkozó állítás triviális. Tételezzük fel a formula helyességét n-re. A $\pi \in S_{n+1}$ szerinti összegzés tagjait csoportosítsuk aszerint, hogy $n+1$ hányadik helyen áll. Ha az utolsó helyen, akkor nem áll inverzióban egyetlen más elemmel sem, az ilyen permutációkra történő összegzés az indukciós hipotézis alapján $[n]_q!$ összeget ad. Azoknak a permutációknak a járuléka, amelyekben $n+1$ az n-edik helyen van $q[n]_q!$, mert eggyel több az inverziók száma mint a $n+1$ elhagyásával előálló permutációjában az n-elemnek. Ezt folytatva látjuk, hogy

$$\sum_{\pi \in S_{n+1}} q^{\mathrm{inv}\,(\pi)} = [n]_q! + q[n]_q! + \dots + q^n[n]_q!\,, \tag{1}$$

és a jobb oldal éppen $[n+1]_q[n]_q! = [n+1]_q!$.

Felbuzdulva a sikeren forduljunk a binomiális együtthatók felé. $\binom{n}{k}$ az n elemű halmaz k elemű részhalmazainak száma és faktoriálisokkal is kifejezhető: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Tehát két irányba is elindulhatunk. Egyszerűen helyettesítjük a szokásos faktoriálist *q-faktoriálissal*, vagy megpróbáljuk az n elemű halmaz k elemű részhalmazait valamilyen, a korábbihoz hasonló súlyozással összeszámolni. Ha az utóbbit jól csináljuk, akkor a két út ugyanoda vezet: Legyen

$$\binom{n}{k}_q = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]!} \tag{2}$$

és ha $A \subset \{1, 2, 3, \dots, n\}$, akkor $c(A)$ legyen azoknak az (u, v) számpároknak a száma, hogy $1 \le u < v \le n$ és $u \notin A$, de $v \in A$. Például az $\{1, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ esetben a $(2, 4)$ és $(3, 4)$ párokat kell figyelembe venni, tehát $c(\{1, 4\}) = 2$. Ezután azt állítjuk, hogy

$$\sum_A q^{c(A)} = \binom{n}{k}_q\,, \tag{3}$$

ha az összegzés $\{1,2,\ldots,n\}$ k elemű A részhalmazaira történik. Ha a bal oldalt $F(n,k)$-val jelöljük, akkor levezethető az

$$F(n+1,k) = F(n,k) + q^{n-k+1}F(n,k-1) \tag{4}$$

rekurzió. (A bal oldal a $q^{c(A)}$ számok összege amikor A számossága k és $A \subset \{1,2,\ldots,n+1\}$. A jobb oldal első tagja az $A \subset \{1,2,\ldots,n\}$ halmazoknak megfelelő összeg, míg a második tag az $(n+1) \in A \subset \{1,2,\ldots,n+1\}$ részhalmazokra vonatkozó összegzés.) Belátható, hogy a q-binomiális együtthatók is eleget tesznek a (4) rekurziónak, azaz

$$\binom{n+1}{k}_q = \binom{n}{k}_q + q^{n-k+1}\binom{n}{k-1}_q . \tag{5}$$

Ez (3) bizonyításának vázlata. A $q=1$ esetben (5) a binomiális együtthatók, azaz a Pascal-féle háromszög jól ismert tulajdonsága.

Legyen $p(n,k,m)$ az m elemű halmaz olyan partícióinak a száma, amelyek legfeljebb k blokkból állnak és minden egyes blokkban az elemek száma legfeljebb n. Megmutatjuk, hogy

$$\sum_m p(n,k,m)q^m = \binom{n+k}{n}_q . \tag{6}$$

Jelöljük az egyenlőség bal oldalát $G(n,k)$-val. A

$$p(n,k,m) - p(n,k-1,m)$$

szám megadja az m elemű halmaz olyan partíciói számát, amelyben pontosan k blokk van és minden blokk elemszáma legfeljebb n. Ha minden egyes ilyen partíció blokkjait egy elem elhagyásával csökkentjük (és persze az egy elemű blokkokat így megszüntetjük), akkor $m-k$ elem olyan partíciói összeszámlálásához jutunk, amikben a blokkok száma legfeljebb k és az egyes blokkokban legfeljebb $n-1$ elem van. Tehát

$$p(n,k,m) - p(n,k-1,m) = p(n-1,k,m-k) ,$$

ami a $G(n,k)$ számokra a

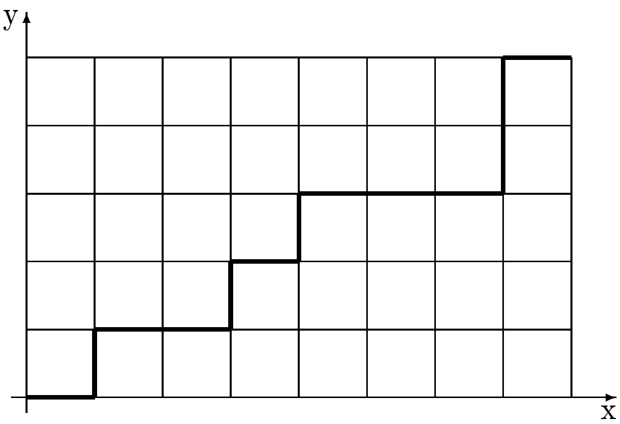
$$G(n,k) - G(n,k-1) = q^k G(n-1,k)$$

összefüggést adja. Ez egy rekurziós formula, amely $G(n,k)$ értékeket a $G(n,0) = G(0,k) = 1$ kiindulással egyértelműen meghatározza. Ezután csak azt kell észrevenni, hogy a *q-binomiális együtthatók* eleget tesznek ugyanennek a rekurziónak, vagyis

$$\binom{n+k}{n}_q - \binom{n+k-1}{n}_q = q^k\binom{n+k-1}{n-1} . \tag{7}$$

Ez az összefüggés lényegében (5)-tel azonos: Ha (5)-ben k helyébe n-et és n helyébe $n+k-1$-et teszünk, akkor éppen (7)-hez jutunk.

Az $\binom{n+k}{n}$ klasszikus Newton-féle binomiális együttható n darab x és k darab y karakter összes sorrendjeinek a száma. Minden egyes sorrend egy origóból induló rácspontokon keresztül jobbra és felfelé haladó bolyongással szemléltethető. x jelent egy jobbra, és y egy felfelé lépést. Az ábrán az $x\,\mathbf{y}\,x\,\mathbf{x}\,y\,x\,y\,x\,x\,x\,y\,y\,x$ sorozatnak megfelelő utat láthatjuk:



Világos, hogy n darab x és k darab y olyan utat ad, amely az (n,k) rácspontban végződik. Jelölje A az $\{1,2,\ldots,n+k\}$ halmaznak azt a részhalmazát, amelyet az y-ok sorszámai jelölnek ki. A fenti példában $A = \{2,5,7,11,12\}$. Az x,y sorozatok nyelvén a $c(A)$ mennyiség a sorozatban tartalmazott (y,x) rendezett párok száma. Minden egyes ilyen pár az út alatt egy négyzetet jelent. (Példaként a kövérrel szedett (y,x) párnak megfelelő négyzet van bejelölve az ábrán.) Így $c(A)$ nem más, mint az út alatti terület. Ez tehát $c(A)$ egyfajta geometriai jelentése. Nem nehéz ezek után látni azt, hogy $p(n,k,m)$ az olyan utak száma, amelyek az origóból az (n,k) pontba visznek, és az alattuk lévő terület éppen m.

A q-binomiális együtthatók Gausshoz nyúlnak vissza, *Gauss-féle polinomoknak* is nevezik őket. (5)-ből n szerinti teljes indukcióval látható, hogy az $\binom{n}{k}_q$ Gauss-féle polinom q-nak egész együtthatós polinomja. Ugyanez (6)-ból teljesen világos.

A q-binomiális együtthatóknak algebrai jelentésük van abban az esetben, ha q prímhatvány. Ekkor a $0,1,\ldots,q-1$ számok a mod q összeadással és szorzással testet alkotnak. Az algebra nyelvén azt mondják, hogy ez egy véges q karakterisztikájú test, ugyanis

$$\overbrace{1}^{1} + \overbrace{1}^{2} + \ldots + \overbrace{1}^{q} = 0.$$

Például az 5 karaterisztikájú véges test a 0,1,2,3,4 maradékosztályokból áll. Benne 2+3=0 és 2/3=4, ugyanis $2+3$ 0-t ad maradékul 5-tel osztva, amíg $3x$ az $x=4$ esetben ad 2 maradékot. A q karakterisztikájú test feletti n dimenziós vektortér k dimenziós altereinek a száma éppen $\binom{n}{k}_q$. A $k=1$ esetben ez könnyen látható. Az n dimenziós vektortér a $0,1,\ldots,q-1$ számokból álló n-esek összessége, tehát elemszáma q^n. A nem 0 "vektorok" száma q^n-1. Minden egyes nem nulla vektornak $q-1$ nem nulla többszöröse van, amik ugyanazt az alteret adják. Igy az egydimenziós alterek száma

$$\frac{q^n-1}{q-1} = [n]_q = \binom{n}{1}_q .$$

Az általános eset bizonyítása ugyanezt a sémát követi. Először meghatározzuk a lineárisan független vektorokból álló k-asok számát. Egy ilyen $(v_1,v_2,\ldots,v_k)$ k-as a következőképpen választható. v_1-et a fentiek szerint q^n-1 féleképpen vehetjük; v_2-nek a v_1 által feszített altéren kívül kell lenni, tehát q^n-q lehetőség van; v_3 a v_1 és

v_2 által meghatározott altéren kívül van, mivel v_1 és v_2 lineáris kombinációi száma q^2, v_3-ra $q^n - q^2$ lehetőség van. Ezzel a gondolatmenettel azt kapjuk, hogy $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ választása

$$(q^n - 1)(q^n - q)\ldots(q^n - q^{k-1})$$

féleképpen történhet. Minden egyes $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ k-as megad egy k-dimenziós alteret, de közülük több is ugyanazt az alteret adja. Pontosan

$$(q^k - 1)(q^k - q)\ldots(q^k - q^{k-1})$$

adja ugyanezt az alteret, hiszen a k dimenziós vektortérben a fentiek szerint enynyiféleképpen választhatunk egy lineárisan független vektor k-ast. Tehát a k dimenziós alterek száma

$$\frac{(q^n - 1)(q^n - q)\ldots(q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1)(q^k - q)\ldots(q^k - q^{k-1})},$$

és ebben felismerhetjük az $\binom{n}{k}_q$ binomiális együtthatót.

Egy másik algebrai jellegű tulajdonsága a q-binomiális együtthatóknak a q-binomiális tétel. Legyen X és Y egy olyan algebrai struktúra két eleme, amelyben az összeadás kommutatív, a szorzás disztributív az összeadásra, de a szorzás nem kommutatív. Tételezzük fel, hogy $YX = qXY$. (Most nem szükséges, hogy q egész szám legyen.) Ekkor

$$(X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q X^k Y^{n-k},$$

ami teljesen érthető módon viseli a *q-binomiális tétel* nevet. Bizonyítása teljes indukcióval történhet a q-binomiális együtthatók rekurziójának felhasználásával, éppen úgy, ahogy ez a klasszikus Newton-féle binomiális tétel esetében történik. A q-binomiális tétel a "q"-ban rejlő deformáció új jelentésére vet fényt. Amíg kezdetben a természetes számok deformációjából indultunk el, itt a q a felcserélhetőség (azaz a kommutativitás) deformációja: $q = 1$ felel meg X és Y kommutativitásának és ekkor megkapjuk az ismert binomiális tételt.

A kombinatorikai és algebrai tulajdonságok után lépjünk az analízis berkeibe. Az exponenciális függvény

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

nevezetes hatványsora ideálisnak látszik a deformálásra. Legyen a q-exponenciális függvény

$$e_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_q!}$$

amely a $q \neq -1$ esetén egy konvergens sorral van meghatározva. A *q-exponenciális függvény* deriváltja önmaga lenne, ha x^n deriváltja $[n]_q x^{n-1}$ lenne. Ez persze csak a $q = 1$ esetben teljesül a szokásos differenciálásra, de ne keseredjünk el, inkább találjuk meg, hogy mi a *q-differenciálás*. Legyen

$$(\partial_q f)(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}$$

a $q \neq 1$ esetben. Ez még egyszerűbb is mint a szokásos differenciálás, mert nincs benne határérték. Ugyanakkor

$$\lim_{q \to 1} \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x} = f'(x),$$

ha f folytonosan differenciálható függvény. Megvalósul-e, amire vágytunk?

$$\begin{aligned}\partial_q x^n &= \frac{(qx)^n - x^n}{qx - x} = (qx)^{n-1} + (qx)^{n-2}x + \ldots + x^{n-1} = \\ &= (q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + 1)x^{n-1} = [n]_q x^{n-1} .\end{aligned}$$

A hatványfüggvény q-deriváltja az, amire számítottunk. Ezért

$$\partial_q e_q(x) = e_q(x)$$

tagonkénti q-differenciálással. A szorzatfüggvény *q-differenciálási szabálya*

$$\partial_q(fg)(x) = (\partial_q f)(x) g(qx) + f(x)(\partial_q g)(x) ,$$

a hányados q-differenciálására vonatkozó szabály felfedezésének örömét a kedves olvasóra hagyjuk.

Az exponenciális függvény jellemző tulajdonsága

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y .$$

Sajnos ez egyáltalán nem teljesül a q-exponenciális függvényre, legalábbis akkor, ha valódi függvénynek tekintjük. Legyen X a korábban értelmezett algebrai struktúra eleme és az

$$e_q(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{[n]_q!}$$

kifejezést tekintsük úgy, mint egy formális végtelen hatványsort. A konvergencia kérdésével ne foglalkozzunk, hatványsorokat összeadhatunk úgy, hogy a megfelelő együtthatókat összeadjuk és formálisan szorozva az együtthatókból csak véges összegeket kell kiszámolnunk, tehát a szorzás művelet is értelmezhető. A q-binomiális tétel sugallhatja, hogy olyan X és Y elemekkel érdemes próbálkozni, amelyekre $YX = qXY$. Ekkor

$$e_q(X + Y) = e_q(X) e_q(Y) ,$$

és kiszámolása visszavezetődik a q-binomiális tételre.

Szeretnénk példát mutatni olyan X és Y objektumokra, amelyekre az $YX = qXY$ felcserélési reláció teljesül. Legyen $C(\mathbb{R})$ a számegyenesen értelmezett folytonos függvények halmaza. Ez zárt a szorzásra és az összeadásra. A függcények szorzása kommutatív, így ebben a struktúrában nem találhatunk a felcserélési relációnak eleget tevő elemeket. Ezért nézzük a $C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ lineáris transzformációkat. Köztük van a

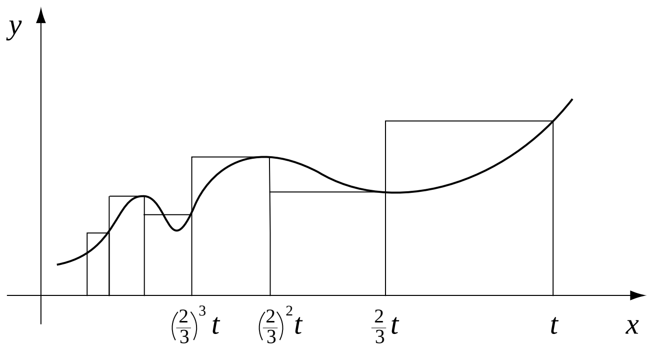
$$(Xf)(x) = xf(x) \qquad (Yf)(x) = f(qx)$$

képletekkel értelmezett X és Y transzformáció. A $YX = qXY$ reláció ezekre teljesül: $(YXf)(x) = (Xf)(qx) = qxf(qx)$ és $(XYf)(x) = x(Yf)(x) = xf(qx)$.

Ha $f(x)$ egy folytonosan differenciálható függvény, akkor $(\partial_q f)(x) \to f'(x)$ amennyiben $q \to 1$. Ha a q-differenciálás működik, akkor felmerül a kérdés: Lehet-e q-*integrálni*? Az eddigiek alapján már nem lep meg az igenlő válasz. Legyen $t > 0$-ra

$$\int_0^t f(x)\, d_q x = \sum_{n=0}^{\infty} (1-q) q^n t f(q^n t)\ .$$

Ha $0 < q < 1$, akkor a jobb oldal nem egyéb, mint az $f(x)$ függvénynek a $t, qt, q^2t, q^3t, \ldots$ osztópontokhoz tartozó integrálközelítő összege. (A szokásossal ellentétben az osztópontok csökkenő sorrendben vannak megadva és végtelen sokan vannak.) $[0,t]$ n-edik részintervalluma $[q^{n+1}t, q^n t]$, az ehhez tartozó tag az intervallum $(q^n t - q^{n+1}t)$ hossza szorozva a jobb végpontban felvett $f(q^n t)$ függvényértékkel, azaz $(1-q)q^n t f(q^n t)$. A q-integrál tehát egy mértani sorozat szerint haladó végtelen sok részre történő felosztáshoz tartozó szokásos integrálközelítő összeg. Az ábrán a $q = 2/3$ esetben a q-integrál hat tagját jelentő téglalapok láthatók.



Amennyiben az f függvény folytonos a $[0,t]$ intervallumon, akkor

$$\int_0^t f(x)\, d_q x \to \int_0^t f(x)\, dx\ ,$$

ha $q \to 1$.

Számoljuk ki $(1-q)q^n t f(q^n t)$ q-deriváltját. Ez

$$\frac{(1-q)q^n q t f(q^{n+1}t) - (1-q)q^n t f(q^n t)}{(q-1)t} = q^n f(q^n t) - q^{n+1} f(q^{n+1})$$

amit összegezve $n = 0, 1, \ldots$ értékekre éppen $f(t)$-t kapunk, mert a tagok egymás után pozitív és negatív előjellel állnak, az első kivételével. (Ezt szokták néha harmonika összegnek nevezni.) Megmutattuk, hogy a q-integrálnak a felső határ szerinti q-deriváltja az integrandus, ami az integrálszámítás alapvető tételének árnyéka a q-világában. Egyébként a $q \to 1$ határátmenettel számolásunkból a “klasszikus” integrálásra vonatkozó tétel következik.

A számolni hajlandó és lelkes olvasó maga is ellenőrizheti, hogy ha $F(t) = \int_0^t f(x)\, d_q x$, akkor

$$\int_0^t f(x)g(x)\, d_q x = F(t)g(t) - \int_0^t F(qx)(\delta_q g)(x)\, d_q x \,.$$

Ha jártas az integrálszámításban, akkor felismerheti a parciális integrálással való analógiát.

A q-világát a matematikusok már régen megpillantották. A q-binomiális együtthatók Gauss-féle polinomok, a Pascal-féle háromszögre emlékeztető tulajdonságaikat már maga Gauss felimerte. A q-exponenciális (és ennél sokkal általánosabb q-hypergeometrikus függvények) 1846-ba nyúlnak vissza E. Heine német matematikushoz. A q-differenciálást és q-integrálást F. H. Jackson fedezte fel 1910-ben. Ami új lökést adott, az annak a felismerése volt, hogy az árnyékvilágban megjelenő q deformációs konstans talán összefüggésbe hozható a kvantummechanika, azaz a *quantum-mechanika* szóban szereplő q-val. Ez spekulációnak tünhet. Viszont tény, hogy a kvantummechanika bizonyos értelemben a klasszikus mechanika deformáltja, a deformációs állandó neve ott Planck-konstans. Amennyiben azzal – elméletben – 0-hoz tartunk vissza kell kapnunk a klasszikus mechanikát. Ez némileg emlékeztethet minket arra, hogy például a q-egészek a $q \to 1$ esetben visszaadják az egész számokat. További hasonlóság is van. q-binomiális tétel a nem felcserélhetőségben különbözik a klasszikus Newton-féle tételtől. A felcserélhetőségnek, pontosabban a fel nem cserélhetőségnek nagy szerepe van a kvantummechanikában. Az elmélet sarkalatos kiindulópontja a koordináta és impulzus operátorokra vonatkozó Heisenberg-féle felcserélési szabály, ami alkalmas egységeket választva a $PQ - QP = I$ alakot ölti. Matematikailag ez a reláció a változóval való szorzás és a differenciálás operátoraival realizálható. Ha a fent már használt X szorzás és ∂_q q-differenciálás operátoraival próbálkozunk, akkor a

$$\begin{aligned}
[(\partial_q X - qX\partial_q)f](x) &= \frac{(Xf)(qx) - (Xf)(x)}{qx - x} - qx(\partial_q f)(x) \\
&= \frac{qxf(qx) - xf(x)}{qx - x} - qx\frac{f(qx) - f(x)}{qx - x} \\
&= \frac{qxf(x) - xf(x)}{qx - x} = f(x)\,.
\end{aligned}$$

számolás az $\partial_q X - qX\partial_q = I$ eredményt szolgáltatja. (I-vel az $If = f$ módon ható identitás operátort jelöltük.) Itt felcsillan a kvantummechanika deformációjának a lehetősége. Talán nem csak a matematikát, de még a fizikát is deformálhatjuk? Minden esetre a $\partial_q X - qX\partial_q = I$ *q-felcserélési relációval* helyettesítve a Heisenberg-félét, megalkothatjuk a *q-harmonikus oszcillátor* modelljét, amelynek alapállapota nem Gauss-eloszlás, hanem *q-Gauss-eloszlás lesz*, és a gerjesztett állapotok *q-Hermite-féle polinomokkal* adhatók meg. A néhai Öveges professzort szabadon idézve némi meghökkenéssel mondhatjuk: “Hát nem csodálatos ez?”

Néhány kapcsolódó feladat

1. Igazoljuk, hogy
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}_q = 0$$
ha n páratlan!

2. Igazoljuk a szorzat q-differenciálására vonatkozó képletet!

3. Legyen $g(x) = x^n$. Milyen $h(x)$ függvényre teljesül a
$$(\partial_q(f \circ g))(x) = [n]_q X^{n-1} h(x)$$
összefüggés? Fejezzük ki h-t $\partial_q f$ segítségével!

4. Legyen $0 < q < 1$ és $[\infty]_q = \sup\{[n]_q : n \in \mathbb{N}\}$. Értelmezzük a *$q$-gammafüggvényt* a
$$\Gamma_q(x) = \int_0^{[\infty]_q} \frac{t^{x-1}}{e_q(qt)}\, d_q t$$
képlettel. Igazoljuk, hogy $\Gamma_q(n+1) = [n]_q!$
(Útmutatás: A
$$\int_0^{[\infty]_q} \partial_q \left(\frac{t^n}{e_q(t)} \right) d_q t$$
q-integrált számoljuk ki a Newton-Leibnitz formula q változatával, másrészt a ∂_q q-differenciálás elvégzésével vezessünk le rekurzív formulát magára az integrálra.)

Irodalom

1. G. Pólya, G.L. Alexanderson, Gaussian binomial coefficients, Elemente Math. **26**(1971), 102–109

2. F.H. Jackson, q-difference equations, Amer. J. Math. **32**(1910), 305–314

Dr. Petz Dénes egyetemi tanár
BME Matematika Intézet
Sztoczek u. 2, 1521 Budapest