Mátrixok, nagy eltérések és egyenlőtlenségek[1]

Petz Dénes [2]

MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

Az előadás rövid bepillantást ad a szabad valószínűségelméletbe, elmagyarázza a Talagrand-egyenlőtlenség [3]-ban bizonyított szabad analógját, és vázolja a bizonyítást, amely a véletlen mátrixok tapasztalati sajátértéksűrűségére vonatkozó nagy eltérés tételt használja.

1. Bevezetés a nem-kommutatív és a szabad valószínűségelméletbe

A nem-kommutatív valószínűségelmélet lényegében egyidős a kvantumelmélettel. Kezdetei Neumann Jánoshoz nyúlnak vissza. A kvantummechanika igényelt olyan sztochasztikus modelleket, amelyek különböznek a Kolmogorov-félétől. A nem-kommutatív valószínűségelméletben a valószínűségi változók egy algebrát alkotnak, hasonlóan a szokásos valószínűségelmélet korlátos valószínűségi változóihoz. Az utóbbiak algebrája kommutatív, hiszen a szorzás függvények szorzását jelenti. A nem-kommutatív valószínűségelmélet tipikus algebrája egy véges dimenziós mátrixalgebra, egy kicsit általánosabban egy Hilbert-tér összes korlátos operátorainak algebrája, vagy egy csoportalgebra. Az algebra egy lineáris funkcionálja rendeli az elemekhez a várható értéküket. Az algebra és egy lineáris funkcionáljának a megadása jelent egy **nem-kommutatív valószínűségi mezőt**. Íme két példa.

1. Példa. *Legyen $B(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér korlátos operátorainak algebrája és ξ a Hilbert-tér egy egységvektora. Az*

$$A \mapsto \langle \xi, A\xi \rangle$$

lineáris funkcionál pozitív is, vagyis pozitív operátorhoz pozitív számot rendel, az egységoperátorhoz pedig egyet.

[1] Az MTA Székházának Kistermében 2005. június 8-án tartott előadás írott változata.

[2] E-mail: petz@math.bme.hu, honlap: http://www.math.bme.hu/~petz

*Némi módosítással egy másik példát is kaphatunk. Legyen a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér az S félcsoport feletti ℓ^2 tér, L_g a g-vel való balratolás operátora és $\mathcal{A}$ az $\{L_g : g \in S\}$ által generált *-algebra. (A * művelet az operátorok adjungálását jelenti.) $\mathcal{A}$-n lináris funkcionál*

$$A \mapsto \langle \delta, A\delta \rangle,$$

ahol δ az egységelem karakterisztikus függvénye.

2. Példa. *Legyen τ az $n \times n$-es véletlen mátrixon a*

$$A \mapsto \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(A_{ii})$$

képlettel értelmezve, ahol E a szokásos várható értéket jelenti. Ha olyan véletlen mátrixokat tekintünk, amelyek elemei korlátos valószínűségi változók, akkor ezek algebrája τ-val egy nem-kommutatív valószínűségi mező.

Maga a várható érték nem elegendő a valószínűségelmélet létrehozásához, szükség van még a függetlenségre is. Ezt úgy is fel lehet fogni, mint egy szabályt az együttes momentumok kiszámítására: $E(f^n g^m) = E(f^n)E(g^m)$, ha f és g független hagyományos valószínűségi változók. Ha az algebra nem kommutatív, akkor sokkal több együttes momentum van, és a szabálynak bonyolultabbnak kell lenni.

A szabad valószínűségelméletben a függetlenséget az úgynevezett **szabad kapcsolat** helyettesíti. Ez megadja, hogy szabad a és b momentumainak ismeretében az a-kból és b-kből álló szorzatok várható értéke hogyan számolható, vagyis hogyan kaphatók meg az együttes momentumok. A szabad valószínűségelmélet **Dan Voiculescu** román származású amerikai matematikus nevéhez fűződik, ez az utóbbi húsz évben a legfontosabb területe a nem-kommutatív valószínűségelméletnek. Magának a szabad kapcsolatnak a leírása és elmagyarázása hely és időigényes, itt nincs rá mód. Egyébkent a [2] könyv első fejezete ajánlható az érdeklődőknek. Ha az 1. Példában S az f és g elemek által generált szabad félcsoport, akkor L_f és L_g szabad kapcsolatban vannak, ez a példa a terminológia magyarázata.

A szabad kapcsolatban levő általánosított valószínűségi változók szükségképpen nem felcserélhetők, így mértéket nem lehet hozzájuk kapcsolni. Ha azonban csak egy általánosított valószínűségi változót veszünk, akkor ehhez sok esetben kapcsolható mérték. Amennyiben

$$\tau(a^n) = \int_{\mathbb{R}} t^n \, d\mu(t)$$

minden n természetes számra, akkot a μ mértéket az a eloszlásmértékének lehet felfogni. Így a szabad valószínűségelméletben is előkerülnek valószínűségi mértékek. Például a Gauss-mértéket sok szempontból a **Wigner-féle félkörmérték** helyettesíti. Ez jelenik meg a szabad valószínűségelmélet központi határeloszlás tételében, és ez minimalizálja az entrópia szerepét játszó

$$\Sigma(\mu) := \iint_{\mathbb{R}^2} \log|x-y|\, d\mu(x)\, d\mu(y)$$

kettős integrált, ha a mértékek második momentuma rögzített. (A $\Sigma(\mu)$ **logaritmikus energia** megjelenése kapcsolatot teremt a potenciálelmélettel [8].)

Ha az 1. Példában S az f és g elemek által generált szabad félcsoport, akkor

$$\langle \delta, (L_g + L_g^*)^n \delta \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{2} t^n \sqrt{4-t^2}\, dt,$$

azaz $L_g + L_g^*$ eloszlásmértéke a félkörmérték. A 2. Példának is köze van a félkörmértékhez. Ha X_n $n \times n$-es véletlen mátrix független azonos eloszlású normális elemekkel, akkor eloszlásmértéke (τ-ra vonatkozóan) nem a félkörmérték, de ahhoz tart, ha $n \to \infty$. Ez **Wigner** nevezetes tétele véletlen mátrixokról.

2. Szállítási költség egyenlőtlenségek

1996-ban **M. Talagrand** felfedezte az úgynevezett szállítási költség egyenlőtlenséget, amely a Wasserstein-féle távolságot hasonlítja össze a relatív entrópiával [9]:

$$W(\mu, \nu) \le \sqrt{S(\mu, \nu)},$$

ahol ν a standard Gauss-mérték $\mathbb{R}^n$-en,

$$S(\mu, \nu) := \int \log \frac{d\mu}{d\nu}\, d\mu = \int \frac{d\mu}{d\nu} \log \frac{d\mu}{d\nu}\, d\nu$$

a relatív entrópia és a Wasserstein-féle távolság

$$W(\mu, \nu) := \inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \sqrt{\iint \frac{1}{2}\|x-y\|^2\, d\pi(x,y)},$$

$\Pi(\mu, \nu)$ azoknak a mértékeknek az összessege $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$-en, amelyek marginálisai μ és ν. (A *szállítási költség* elnevezés a Wasserstein-féle távolsággal függ össze. Ha a μ mérték szerinti anyageloszlást kell átmozgatnunk a ν mérték szerintibe, akkor egy $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ együttes eloszlás egy szállítási stratégiát fejez ki, és ha $\|x-y\|$ az x-ből y-ba való szállítási költség, akkor $W(\mu, \nu)$ a teljes szállítási feladat optimális költsége.)

Talagrand egyenlőtlenségének szabad analógja a következő:

1. Tétel. *Legyen* $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *olyan folytonos függvény, amelyre* $\psi(x) - \rho x^2/2$ *konvex egy* $\rho > 0$ *értékre. Értelmezzük a* Φ *funkcionált a*

$$\Phi(\mu) = -\Sigma(\mu) + \int \psi(x) d\mu(x) + B,$$

formában olyan B *konstanssal, hogy* $\inf \Phi(\mu) = 0$ *teljesüljön. A minimum egyértelműen létező helyét jelöljük* ν*-vel. Ekkor*

$$W(\mu, \nu) \leq \sqrt{\frac{1}{\rho}\Phi(\mu)}.$$

Az eredeti Talagrand-egyenlőtlenséggel összehasonlítva azt látjuk, hogy a baloldal nem változott, de a jobboldalon a ν-re vonatkozó relatív entrópia szerepét a Φ funkcionál játssza. Egyébként ez sok szempontból egy szabad relatív entrópia funkcionálnak tekinthető. Maga az egyenlőtlenség szabad szabad valószínűségelmélet nélkül is teljesen megérthető. Érdekes lenne olyan bizonyítást találni rá, amely csak a klasszikus analízis eszközeit használja.

A tételt először Biane és Voiculescu bizonyította a $\psi(x) = \rho x^2/2$ esetben. Módszerük a **Burger-féle parciális differenciálegyenleten** alapult. [3]-ban közölt bizonyításunk is sok mindent felhasznál és technikai részletei elég hosszúvá teszik. Maga az ötlet azonban talán megérthető és annak elmagyarázására teszünk kísérletet. A bizonyítás alapja a véletlen mátrixok tapasztalati sajátértéksűrűségére vonatkozó nagy eltérés tétel. (Ilyen tételekkel foglalkozik [2] könyvünk 5. fejezete.)

3. A bizonyítás vázlata

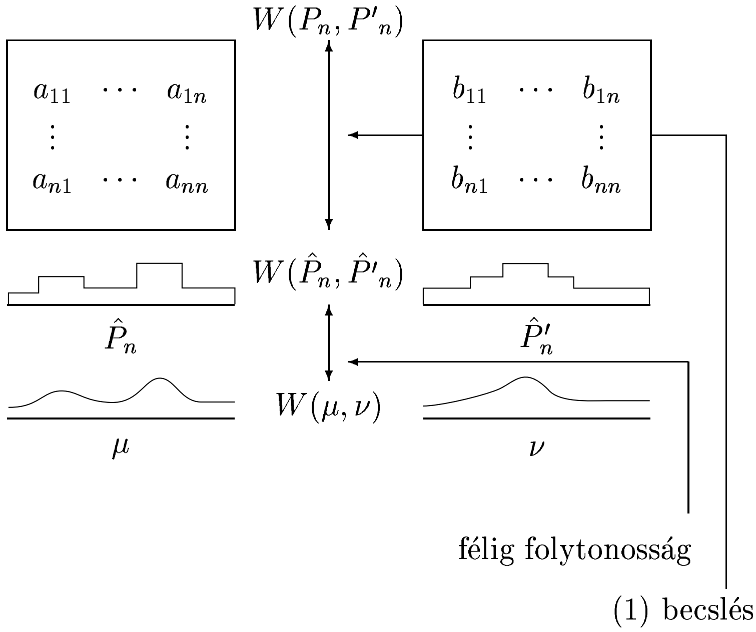
Jelölje $M_n(\mathbb{C})^{sa}$ az $n \times n$-es komplex elemű önadjungált mátrixok terét. Ha adott egy P_n mérték az $M_n(\mathbb{C})^{sa}$ téren, akkor az egy **véletlen önadjungált mátrixot** jelent, amelynek $\lambda_1(\omega), \dots, \lambda_n(\omega)$ sajátértékei ugyancsak véletlenek és valósak. A P_n mérték indukálja a

$$\tilde{P}_n(G) := \mathrm{Prob}\left(\frac{\delta_{\lambda_1(\omega)} + \ldots + \delta_{\lambda_n(\omega)}}{n} \in G\right) \qquad (G \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}))$$

tapasztalati sajátértéksűrűséget, ami formailag egy mérték $\mathbb{R}$ mértékeinek $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ terén, vagyis egy véletlen mérték $\mathbb{R}$-en. A tapasztalati sajátértéksűrűség

$$\hat{P}_n := E(\tilde{P}_n).$$

várható értéke az **átlagos sajátértéksűrűség**, ami mérték $\mathbb{R}$-en.



A bizonyítás gondolata az, hogy minden n-re választunk egy P_n és egy P'_n véletlen mátrixot, hogy az átlagos sajátértéksűrűségek $\hat{P}_n$ és $\hat{P}'_n$ az adott μ és ν mértékeket approximálják. A közelítésből adódóan

$$W(\mu, \nu) \leq \liminf_{n \to \infty} W(\hat{P}'_n, \hat{P}_n).$$

A P_n és P'_n mértékeket a

$$dP_n = \frac{1}{Z_n} \exp(-n \mathrm{Tr}\, Q(A)) dA \qquad \text{és} \qquad dP'_n = \frac{1}{Z_n} \exp(-n \mathrm{Tr}\, Q'(A)) dA$$

formában választjuk, ahol

$$Q(x) := 2 \int_{\mathbb{R}} \log |x - y| \, d\nu(y) \qquad \text{és} \qquad Q'(x) := 2 \int_{\mathbb{R}} \log |x - y| \, d\mu(y).$$

$\hat{P}_n$ és $\hat{P}'_n$ fent említett tulajdonsága, a megfelelő véletlen mátrixok tapasztalati sajátértéksűrűségére vonatkozó nagy eltérés tétel következménye.

A következő becslés a bizonyítás másik sarkalatos pontja:

1. Lemma.

$$W(\hat{P}', \hat{P}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} W(P', P). \tag{1}$$

Ezt az egyenlőtlenséget igazoljuk. A bal oldalon $\mathbb{R}$-n vett mértékek távolsága, a jobb oldalon pedig a $M_n(\mathbb{C})^{sa} \sim \mathbb{R}^{n^2}$ tér mértékeinek távolsága áll. A távolság valójában kétféle is lehet: Tekinthetjük a mátrixokat $\mathbb{R}^{n^2}$ vektoraiként, de tekinthetjük a Hilbert-Schmidt-féle $\|A-B\|_{HS} := \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A-B)^2}$ távolságot is. Szerencsére a kettő lényegében azonos.

Ha P egy mérték az önadjungált matrixok terén, akkor az átlagos sajátértéksűrűséget a

$$\hat{P} = \int \frac{1}{n}\left(\delta_{\lambda_1(A)} + \cdots + \delta_{\lambda_n(A)}\right) dP(A).$$

képlettel kapjuk meg. Itt $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$ az $A \in M_n(\mathbb{C})^{sa}$ mátrix növekvően rendezett sajátértékei. Ha $\pi \in \Pi(P, P')$, akkor legyen $\hat{\pi} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ a

$$\hat{\pi}(G) := \iint \frac{1}{n} \#\{i : (\lambda_i(A), \lambda_i(B)) \in G\}\, d\pi(A,B)$$

képlettel értelmezve $G \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ Borel-halmazokra. Mivel

$$\hat{\pi}(F\times\mathbb{R}) = \int \frac{1}{n} \#\{i : \lambda_i(A) \in F\}\, d\pi(A) = \hat{P}(F)$$

és hasonlóan $\hat{\pi}(\mathbb{R}\times F) = \hat{P}'(F)$ $F \subset \mathbb{R}$ esetén, megmutattuk, hogy $\hat{\pi} \in \Pi(\hat{P}, \hat{P}')$. Tehát

$$\begin{aligned} W(\hat{P},\hat{P}')^2 &\le \iint \frac{1}{2}(x-y)^2\, d\hat{\pi}(x,y) \\ &= \iint \Big(\iint \frac{1}{2}(x-y)^2\, d\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i(A)} \otimes \delta_{\lambda_i(B)}\Big)\Big)\, d\tilde{\pi}(A,B) \\ &= \frac{1}{n} \iint \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (\lambda_i(A) - \lambda_i(B))^2\, d\tilde{\pi}(A,B). \end{aligned}$$

A Lidskii-Wielandt-féle majorizálás azt adja, hogy

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i(A) - \lambda_i(B))^2 \le \sum_{i=1}^n \lambda_i(A-B)^2 = \|A-B\|_{HS}^2$$

minden $A, B \in M_n(\mathbb{C})^{sa}$ esetén. Következésképpen

$$W(\hat{P},\hat{P}')^2 \le \frac{1}{n}\iint \frac{1}{2}\|A-B\|_{HS}^2\, d\pi(A,B),$$

és infimumot véve $\pi \in \Pi(P,P')$ -ben kapjuk a bizonyítandó (1) becslést.

A P_n és egy P_n' mértékek a $M_n(\mathbb{C})^{sa}$ téren vannak adva, és $M_n(\mathbb{C})^{sa}$ izomorf $\mathbb{R}^{n^2}$-tel. Az euklideszi téren rendelkezésre áll a Talagrand-egyenlőtlenség. A feltételek teljesülése némi munkával ellenőrizhető. Azt kapjuk, hogy

$$W(P_n', P_n) \le \sqrt{\frac{1}{\rho n} S(P_n', P_n)}.$$

Most az $n \to \infty$ határátmenetet kell végrehajtanunk. Mivel jól választottuk a véletlen mátrixokat, a tapasztalati sajátértéksűrűségük nagy eltérés tételnek tesz eleget, a ráta függvény $\Phi(\mu)$ és

$$\frac{1}{n^2} S(P_n', P_n) \to \Phi(\mu).$$

4. Kitekintés

A Talagrand-egyenlőtlenség szorosan kapcsolódik a **logaritmikus Szoboljev-egyenlőtlenséghez**, amely a relatív entrópiára felső becslést ad. A fenti módszerrel szabad logaritmikus Szoboljev-egyenlőtlenséget is kaptunk [4]-ben. $\mathrm{SU}(n)$ Riemann-geometriáját és véletlen unitér mátrixokra vonatkozó nagy eltérés tételeinket felhasználva, a körvonalon is kaptunk szabad logaritmikus Szoboljev-egyenlőtlenséget és szállítási költség egyenlőtlenséget. Érdemes megjegyezni, hogy **M. Ledoux** [5] a véletlen mátrixok módszerét a Hamilton-Jacobi-egyenlettel kombinálva a **Prékopa-Leindler-egyenlőtlenség** [6, 7, 10] szabad változatát fedezte fel a valós egyenesen, és ezáltal fent említett egyenlőtlenségeinkre is új bizonyítást adott.

Hivatkozások

[1] Ph. Biane and D. Voiculescu, A free probabilistic analogue of the Wasserstein metric on the trace-state space, *Geom. Funct. Anal.* **11** (2001), 1125–1138.

[2] F. Hiai and D. Petz, *The Semicircle Law, Free Random Variables and Entropy*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 77, Amer. Math. Soc., Providence, 2000.

[3] F. Hiai, D. Petz and Y. Ueda, Free transportation cost inequalities via random matrix approximation, *Prob. Theory Rel. Fields.* **130**(2004), 199–221.

[4] F. Hiai, D. Petz and Y. Ueda, A free logarithmic Sobolev inequality on the circle, *Canad. Math. Bull.*, megjelenés alatt.

[5] M. Ledoux, A (one-dimensional) free Brunn-Minkowski inequality, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **340**(2005), 301–304.

[6] L. Leindler, On a certain converse of Hölder inequality. In *Linear operators and approximation*, Birkhäuser, Basel, 1972, pp. 182–184.

[7] A. Prékopa, On logarithmic concave measures and functions, Acta Sci. Math. (Szeged) **34**(1973), 335–343.

[8] E. B. Saff and V. Totik, *Logarithmic Potentials with External Fields*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1997.

[9] M. Talagrand, Transportation cost for Gaussian and other product measures, *Geom. Funct. Anal.* **6**(1996), 587–600.

[10] C. Villani, *Topics in Optimal Transportation*, Grad. Studies in Math., Vol. 58, Amer. Math. Soc., Providence, 2003.