BINOMIÁLIS EGYÜTTHATÓK PRÍMFAKTORAIRÓL

ERDŐS PÁL

Tchebicheff egy ismert tétele szerint minden $k>1$-re k és $2k$ között mindig van prímszám. Sylvester és tőle függetlenül Schur bebizonyították, hogy ha $n \geqq 2k$, akkor $P\left(\binom{n}{k}\right)>k$, ahol $P(m)$ m legnagyobb prímfaktorát jelöli. E tétel Tchebicheff tételének messzemenő általánosítása.

Egy nemrég megjelent cikkben Ecklund, Eggleton, Selfridge és a szerző [1] e tétel következő élesítését bizonyították be. Jelölje $p(m)$ az m legkisebb prímfaktorát. Legyen $(n \geqq 2k)$

$$\binom{n}{k} = uv, \quad \text{ahol} \quad P(u) < k, \; p(v) \geqq k. \tag{1}$$

Az (1) alatti előállítás természetesen egyértelmű. Fennáll $v>u$, kivéve a következő 12 esetet:

$$\binom{8}{3}, \binom{9}{4}, \binom{10}{5}, \binom{12}{5}, \binom{21}{7}, \binom{21}{8}, \binom{30}{7}, \binom{33}{13}, \binom{33}{14}, \binom{36}{13}, \binom{36}{17}, \binom{56}{13}. \tag{2}$$

Azaz, más szóval ezen kivételektől eltekintve $\binom{n}{k}$ „nagy" prímfaktorainak adaléka nagyobb, mint a kis prímfaktorok adaléka. (1)-ben u és v helyett tulajdonképpen $u(n;k)$ és $v(n;k)$ lett volna a pontosabb jelölés, de ahol félreértés veszélye nincs, ott u és v-nél maradunk.

Legyen mármost

$$\binom{n}{k} = UV, \quad \text{ahol} \quad P(U) \leqq k, \; p(V) > k. \tag{1'}$$

Bebizonyítottuk, hogy $V>U$, véges sok kivételtől eltekintve. Precízebben: ha $k \neq 3$, 5 vagy 7, akkor $V>U$ kivéve a (2) alatti eseteket, ha $k=3$, 5 vagy 7 is lehet, még a következő kivételeket találtuk.

$$\binom{9}{3}, \binom{10}{3}, \binom{18}{3}, \binom{28}{5}, \binom{54}{3}, \binom{82}{3}, \binom{162}{3}. \tag{2'}$$

Biztosra vesszük, hogy több kivétel nincs, de ezt nem tudtuk bebizonyítani, mert Mahler egy alapvető tételének nem ismeretes effektív formája.

Mahler [1] tétele szerint minden $\varepsilon > 0$ és k-hoz van oly $n_0 = n_0(k, \varepsilon)$, melyre minden $n > n_0$ esetén az (1) és (1′) előállításban

$$u < n^{1+\varepsilon}, \quad U < n^{1+\varepsilon}. \tag{3}$$

A tétel nem effektív, mert n_0 függését ε és k-tól nem tudjuk a tudomány mai állása mellett megadni. (3)-mal kapcsolatos problémákra még visszatérünk.

[1]-beli tételeink bizonyítása igen komplikált; a nehézség fő oka az volt, hogy ragaszkodtunk az összes kivételes esetek felsorolásához, minden sokkal egyszerűbb lett volna, ha megelégszünk avval, hogy $v > u$, illetve $V > U$ véges sok kivételtől eltekintve.

Legyen mármost

$$\binom{n}{k} = U \cdot V \cdot W, \quad \text{ahol} \quad P(U) \leqq k, \; p(V) > k, \quad \text{de} \quad P(V) \leqq n-k \tag{4}$$

$$W = \prod_{n-k < p \leqq n} p.$$

[2]-ben bebizonyítottam, hogy ha C elegendő nagy abszolút konstans és $n > Ck$, $k \geqq 4$, akkor $V > \max(U, W)$. A bizonyítás sokkal könnyebb, mint [1]-ben, mert C kis értékeit figyelmen kívül hagytuk. E cikkben először is bebizonyítjuk a következő tételt.

I. Tétel. *Legyen* $\max(U, V, W) = M$. *Ha* $k > 3$, *akkor véges sok* n, k *számpároktól eltekintve* $M \neq U$.

A tétel bizonyítása nem lesz nehéz, mert a kivételes esetek felsorolását meg se kíséreljük (ennek nemcsak a szerző öregsége, lustasága és butasága, továbbá számológépek hiánya az oka [ez utóbbin könnyű lenne segíteni], hanem, amint már említettük, Mahler tételének ineffektivitása az oka).

Most rátérünk az I. tétel bizonyítására. Először is megjegyezzük, hogy $k=3$ esetén valószínűleg végtelen sok n-re $M=U$. Igen valószínű ugyanis, hogy végtelen sok Mersenne-féle prímszám van — azaz végtelen sok oly p prímszám van, melyre $2^p - 1$ is prímszám. Előadásaimban félig tréfásan, félig komolyan szoktam mondani: ez talán a legnehezebb (bár nem a legsürgősebb) megoldatlan probléma, mellyel az emberiség szembenéz. Jelen pillanatban a legnagyobb ismert prímszám $2^{44497} - 1$. Világos mármost, hogy ha $2^p - 1$ egy Mersenne-féle prímszám, akkor ha $n = 2^p$, $k=3$, akkor $U \geqq 2^p$, $W = 2^p - 1$ és $V \leqq (2^p - 2)/6$, s így $U = M$. Valószínűleg $k=3$ esetén még végtelen sok más eset is van, hol $U = M$, de ily esetek csak akkor lehetségesek, ha végtelen sok $2^\alpha 3^\beta \pm 1$ alakú prímszám van, s ennek eldöntése szintén reménytelennek látszik.

Ezúttal valóban rátérünk az I. tétel bizonyítására. Először is néhány egyenlőtlenségre lesz szükségünk. Jól ismert [3] és Legendre formulájából azonnal következik, hogy ($p^\alpha \| m$ azt jelenti, hogy $p^\alpha | m$, de $p^{\alpha+1} \nmid m$)

$$p^{\alpha_p} \leqq n, \quad \text{ahol} \quad p^{\alpha_p} \,\Big\|\, \binom{n}{k}. \tag{5}$$

(5)-ből azonnal következik, hogy minden n, k számpárra

$$U \leqq n^{\pi(k)}. \tag{6}$$

Mahler tétele szerint viszont minden ε és k-hoz van oly $n_0 = n_0(\varepsilon, k)$, melyre, ha $n > n_0$, akkor

(7) $$U < n^{1+\varepsilon}.$$

Egyszerű számolással nyerjük, hogy ha $n > n_0$ és $n \geqq 2k$, $k > 3$, akkor

(8) $$\binom{n}{k} > \frac{n^4}{30}.$$

(7) és (8)-ból azonnal adódik, hogy minden fix $k > 3$ esetén csak véges sok n-re lehet $U = M$, de ezen kivételes értékek felsorolása egyelőre nem lehetséges.

Így tehát feltehetjük, hogy $k > k_0$, ahol k_0 tetszőlegesen nagy. Bebizonyítjuk, hogy ha $n > e^5 k$ és $k > k_0$, akkor $M \neq U$. A bizonyításból világos lesz, hogy itt k_0 értékét könnyen meg lehetne határozni. Ha $n > e^5 k$, akkor $n > k^{1+5/\log k}$ és ezért

(9) $$\binom{n}{k} > \frac{n^k}{k^k} > n^{4k/\log k}$$

minthogy $k > k_0$-ra $\pi(k) < \frac{4k}{3\log k}$. Ez azonnal következik a prímszámtételből, de enélkül is könnyen bizonyítható.

(6) és (9)-ből azonnal nyerjük, hogy ezen esetekben $M \neq U$. Ezek után tehát feltételezhetjük, hogy $k > k_0$ és $2k \leqq n \leqq e^5 k$. Kimutatjuk, hogy ezekre az n, k számpárokra

(10) $$W > U.$$

(10)-ből tételünk azonnal következik. A prímszámtételből egyszerű számolással nyerjük, hogy ezekre a k, n számpárokra

(11) $$W = \prod_{n-k<p\leqq n} p > e^{k(1-\varepsilon)}$$

ha $k > k_0(\varepsilon)$. (11) Rosser és Schönfeld eredményeinek segítségével könnyen effektivizálható volna. (5)-ből viszont nyerjük, hogy minden k és n számpárra ($\pi(m)$ a prímszámok száma m-ig)

(12) $$U \leqq n^{\pi(n^{1/2})} \prod_{p\leqq k} p < n^{\pi(n^{1/2})} e^{k(1+\varepsilon)}.$$

$n < Ck$ esetén (12) könnyen élesíthető, ugyanis ebben az esetben könnyen találunk egy αk ($\alpha = \alpha(C)$ hosszúságú részintervallumát $(1, k)$-nak, melyben $p \nmid \binom{n}{k}$.

Legyen ugyanis r az a legkisebb szám, melyre $\frac{n}{r} < k$. Nyilván ha

(13) $$\frac{n}{r} < p \leqq k,$$

akkor $p \nmid \binom{n}{k}$, ugyanis $(r-2)k < n-k$, r definíciója miatt, s így $\binom{n}{k}$ számlálója és nevezője p-nek pontosan első hatványával osztható. Ha $\frac{n}{r} \geqq p > \frac{n-k}{r-1}$, akkor viszont $p \Big| \binom{n}{k}$. Ha azonban

$$(14) \qquad \frac{n-k}{r-1} \geqq p > \frac{n}{r+1}$$

akkor megint $p \nmid \binom{n}{k}$. A (13) és (14) intervallumoknak legalább egyike nagyobb, mint $\frac{k}{r^2-1}$. Ez triviális és így látható be: (13) hossza $\frac{rk-n}{r}$, (14) hossza $\frac{2n-(r+1)k}{r^2-1}$. A két számláló összege $n-k \geqq k$, s ezért legalább az egyik intervallum nagyobb, mint $k/(r^2-1)$. Minthogy $C < e^5 k$, intervallumunk hossza nagyobb, mint ke^{-10}. Mondanunk se kell, hogy e becslések nagyon durvák és messzemenően élesíthetők, de céljainknak a gyenge becslés is megfelel.

A prímszámtétel miatt egy ke^{-10} hosszúságú I intervallum, mely k alatt van, $(1+o(1))\,ke^{-10}(\log k)^{-1}$ prímszámot tartalmaz és így (12)-ből egyszerű számolással nyerjük, hogy ($\exp z = e^z$)

$$(15) \qquad U = n^{\pi(n^{1/2})} \exp\big(k(1-e^{-10})+2\varepsilon\big) < \exp\big(k(1-e^{-10})+3\varepsilon\big).$$

(11) és (15)-ből $k > k_0$ esetén (10) azonnal következik, s ezzel az I. tétel be van bizonyítva.

II. TÉTEL. *Legyen $\delta > 0$ tetszőleges pozitív szám. Ha $k > k_0(\delta)$ és $n < \left(\frac{14}{3}-\delta\right)k$, akkor a (4) előállításban $M = W$, ha viszont $n > \left(\frac{14}{3}+\delta\right)k$, akkor $M = V$.*

Legyen először $n > 10^4 k$. Montgomery és Vaughan egy ismert tétele szerint

$$(16) \qquad \pi(n)-\pi(n-k) < \frac{2k}{\log k}.$$

(16) és (6) miatt tehát

$$UW < n^{\pi(k)+2k/\log k} < n^{4k/\log k}.$$

$n > 10000k$ esetén azonban egyszerű számolással adódik, hogy

$$\binom{n}{k} > \frac{n^k}{k^k}$$

és így, ha $n > 10000k$, akkor $V > UW$, azaz $M = V$.

Ha $n \leqq 10000k$ és $k > k_0$, akkor a prímszámtételből egyszerű számolással adódik, hogy

$$(17) \qquad W < \exp k\big(1+o(1)\big).$$

Ha $n > \left(\frac{14}{3}+\delta\right)k$, akkor

$$V \geqq \Pi_1 p \cdot \Pi_2 p \cdot \Pi_3 p,$$

ahol Π_1-ben $\frac{n}{2} \geqq p > \frac{n-k}{2}$, Π_2-ben $\frac{n}{3} \geqq p > \frac{n-k}{3}$ és Π_3-ben $\frac{n}{4} \geqq p > \frac{n}{4} - \left(\frac{1}{6}+\frac{\delta}{4}\right)k$, s így a prímszámtétel miatt

$$(18) \qquad V > \exp\left[k\left(1+\frac{\delta}{4}+o(1)\right)\right].$$

Azaz (17) és (18) miatt $M=V$. Ugyanígy adódik, hogy $n<\left(\frac{14}{3}-\delta\right)k$ esetén $M=W$, s ezzel tételünk be van bizonyítva.

V „hatalomátvétele" $n=\frac{14k}{3}$ közelében valószínűleg nem megy teljesen simán, valószínűleg amint n növekszik, többször $M=V$ és azután megint $M=W$. Ezeket az eseményeket nem próbáltam követni, de bizonyára hiába is próbálnám, mert elkerülhetetlenül belejönnének a prímszámok lokális eloszlására vonatkozó problémák.

III. TÉTEL. *Ha* $k>10$, *vagy* $k=6, k=8$ *és* $n>n_0(k)$, *akkor* $M=V$.

A III. tétel bizonyítása nagyon egyszerű. Könnyen belátni, hogy ha $k\geqq 10$, akkor $\pi(n)-\pi(n-k)\leqq\frac{k}{2}-1$, és ezért

$$W<n^{\frac{k}{2}-1}. \tag{19}$$

Tehát

$$U<n^{1+\varepsilon} \quad \text{és} \quad \binom{n}{k}>\frac{n^k}{k^k}$$

miatt azonnal adódik, hogy $V>n^{\frac{k}{2}-2\varepsilon}$. Ha $k=6$, akkor $\pi(n)-\pi(n-6)\leqq 2$ miatt $V>n^{3-2\varepsilon}$, és ha $k=8$, akkor $\pi(n)-\pi(n-3)\leqq 3$ miatt $V>n^{4-2\varepsilon}$, és ezért (19) miatt a III. tétel be van bizonyítva.

Vizsgáljuk most a kimaradt eseteket. Ha $k=1$, akkor $U=1$, ha $n=p$, $W=M$, ha $n\neq p$, $V=M$, ez az eset természetesen triviális.

Ha $k=2$ és $n=p$ vagy $n=p+1$, akkor $M=W$. Minden más esetben $M=V$.

Ha $k=3$, akkor már láttuk, hogy valószínűleg végtelen sokszor $M=W$ lehetséges. Ha végtelen sok ikerprímszám van, akkor $k=3$ vagy $k=4$ esetén végtelen sok n-re $M=W$. Nyilván $k=3$ vagy $k=4$ esetekben majdnem minden n-re $M=V$.

Még sejteni se lehet, hogy ha $k=5$, akkor van-e végtelen sok n, melyre $M=W$. Ha végtelen sok n-re az $n, n-1, n-2, n-3, n-4$ számok között két prímszám van és ugyanakkor $U>cn^{1/2}$, akkor ezen n-ekre $M=W$; úgy gondolom, hogy végtelen sok ily n van, de e kérdés eldöntésére belátható időn belül semmi remény sincs.

$k=7$ és $k=9$-re ugyanilyen a helyzet.

Érdekes és nem triviális problémákra jutunk, ha U-t V-vel hasonlítjuk össze. Fix k mellett majdnem minden n-re $W=1$. Jelenlegi tudásunk alapján nem bizonyítható, hogy van oly k, melyre végtelen sok n-re $W>n$, ebből ugyanis következne, hogy $\liminf(p_{n+1}-p_n)<\infty$ (p_n az n-edik prímszám).

Könnyű belátni, hogy azon n-ek sűrűsége, melyekre (fix k mellett) $U=1$ pozitív, de k-val együtt 0-hoz tart, s így végtelen sok n-re $U=W=1$. Legyen n_k, illetve m_k az a legkisebb szám, melyre $U=1$, illetve $W=1$, N_k az a legkisebb szám, melyre $U=W=1$. Nem világos, hogy n_k és m_k közül melyik a nagyobb, és az se világos, hogy van-e végtelen sok k, melyre $n_k=m_k=N_k$. Lehet, hogy a válasz itt nem lesz nehéz.

A prímszámtétel Hoheisel-féle formájából könnyen következik, hogy n_k és m_k mindketten nagyobbak, mint k^{1+c}, de biztosra vehető, hogy gyorsabban tartanak a végtelenhez, mint k minden fix hatványa. $n_k^{1/k}\to 1$, $m_k^{1/k}\to 1$ fennállnak és valószínűleg $N_k^{1/k} \to 1$ is igaz. Ezen állításokkal itt nem foglalkozunk. Nem lehetetlen, hogy $k > k_0$ esetén $m_k > n_k$, de ez is egyelőre reménytelennek látszik.

Legyen $n_0(k)$ az a legkisebb szám, melyre

$$W(n_0(k); k) < U(n_0(k); k).$$

A Hoheisel-féle prímszámtételből könnyen következik, hogy $n_0(k) > k^{1+c}$, de nagyon valószínű, hogy $n_0(k)$ is gyorsabban tart a végtelenhez, mint k minden hatványa. Sejtem azonban

(20) $$n_0(k) < \min(n_k, m_k).$$

Az olvasó aligha lesz meglepve, hogy (20) bizonyítására jelenleg nem látok járható utat.

A Hoheisel-féle prímszámtétel azt állítja, hogy ha $c > 0$ elegendő kicsi, akkor

$$\pi(n + n^{1-c}) - \pi(n) = (1 + o(1)) \frac{n^{1-c}}{\log n}.$$

Erre vonatkozólag lásd Prachar ismert könyvét: Primzahlverteilung, Springer Verlag.

Világos, hogy azon n-ek sűrűsége, melyekre $U_k > W_k$ $1 - \varepsilon_k$, ahol $\varepsilon_k \to 0$, ha $k \to \infty$ (ui. ha $U_k > 1$, akkor majdnem mindig $U_k > W_k = 1$). Könnyű belátni, hogy ha $W_k > 1$, akkor $o(\pi(x))$ $n < x$ érték kivételével $W_k > U_k$. Valószínűnek látszik, hogy minden $k > 3$-ra végtelen sok oly n van, melyre

(21) $$U_k > W_k > 1$$

de (20) bizonyítása nem látszik könnyűnek. Azonnal nyerhető viszont, hogy ha $W_k > n$, akkor (20)-nak n-ben csak véges sok megoldása van. Ha ugyanis $W_k > n$, akkor nyilván $\pi(n) - \pi(n-k) \geqq 2$ és így ez esetben már $W_k > (n-k)^2$. Mahler már idézett tétele miatt viszont $U_k < n^{1+\varepsilon}$, ha $n > n_0$ (k, ε), és ebből már állításunk következik.

Első pillanatban nem láttam, hogy kellene bizonyítani azt az állítást, hogy végtelen sok oly n, k számpár van, melyre

(22) $$U(n; k) > W(n; k) > 1.$$

Világos volt, hogy (22) sokkal könnyebb, mint (21). Általánosabban remélhető, hogy minden r-re van végtelen sok n, k számpár, melyre

(23) $$U(n; k) > W(n; k) > n^r.$$

((23) esetén $\pi(n) - \pi(n-k) > r$). (22)-t és (23)-at megírtam E. Strausnak, mint nyitott problémát. (22)-t, még mielőtt a válasz megjött volna, egy átlagolással bebizonyítottam és elég mély segédeszközöket használtam, de (23)-at nem tudtam bebizonyítani. Straus levele viszont (22)-re a következő, rendkívül egyszerű bizonyítást adta: Legyen $n = 2^u$ és $p^{(u)}$ a legnagyobb prímszám, mely 2^u-nál kisebb. Továbbá $k = 2^u - p^{(u)} + 2$. k páratlan és ezért $\binom{n}{k} \equiv 0 \pmod n$ s így $U(n; k) \geqq n = 2^u$, $W(n; k) = p^{(u)} < n$, és ezzel (22) be is van bizonyítva. Ezzel bizonyításom persze feleslegessé vált, de úgy éreztem, hogy valami ötlet azért volt benne és nem akartam mindent feladni. Néhány sikertelen kísérlet után tényleg sikerült (23) bizonyítása.

IV. Tétel. *Minden r-hez van végtelen sok n, k számpár, melyekre* (23) *fennáll.*

A IV. tétel bizonyításához elsősorban is szükségünk van egy talán önmagában is érdekes lemmára.

Lemma. *Létezik egy C abszolút constans, melyre*

$$\prod_{i=1}^{k} U(n+i;k) > \exp(Ck^2). \tag{24}$$

Lemmánk bizonyítása egy egyszerű átlagolással történik. Legyen $\frac{k}{2}<p<\frac{2k}{3}$. Könnyű belátni, hogy azon $1\leqq i\leqq k$ indexek száma, melyekre $p|U(n+i;k)$ nagyobb, mint ck. $\binom{n+i}{k}$ nevezője ugyanis p-nek pontosan első hatványával osztható, viszont a számláló legalább p^2-tel osztható, ha az $(n+i-k+1,\ n+i)$ intervallumban p-nek két többszöröse fordul elő. Ezen i indexek száma $(1\leqq i\leqq k)$ nyilván nagyobb, mint c_1k. Így mármost

$$\prod_{i=1}^{k} U(n+i;k) > \Big(\prod_{\frac{k}{2}<p<\frac{2k}{3}} p\Big)^{c_1k} > \exp(Ck^2),$$

s ezzel lemmánk be van bizonyítva.

Lemmánkból azonnal következik, hogy van oly i_0, $1\leqq i_0\leqq k$, melyre

$$U(n+i_0;k) > \exp(Ck). \tag{25}$$

(25)-ből a IV. tétel könnyen levezethető. Legyen

$$t_x = \max_{p_{r+1}\leqq x} (p_{r+1}-p_r).$$

Rankin egy ismert tétele alapján

$$t_x > c\log x \log\log x \log\log\log\log x\,(\log\log\log x)^{-2}. \tag{26}$$

A IV. tétel bizonyításához elég lenne $t_x/\log x\to\infty$, melyet már Westzynthius is ismert. Tekintsük a

$$(p_{r+1}-2^{s+1}t_x,\ p_{r+1}-2^s t_x),\quad s=0,1,\ldots \tag{27}$$

intervallumokat. Legyen $s=s_r$ az a legkisebb szám, melyre (27) legalább $r+1$ prímszámot tartalmaz.

Nyilván t_x maximumtulajdonsága miatt $s_r\leqq\frac{\log r}{\log 2}+1$. Legyen Z az a legkisebb szám, melyre a $(Z, p_{r+1}-2^s t_x)$ intervallum pontosan $r+1$ prímszámot tartalmaz. $s=s_r$ minimumtulajdonsága és $s_r\leqq\frac{\log r}{\log 2}+1<r$ $(r>r_0)$ miatt a (Z, p_{r+1}) intervallumban legfeljebb $(r+1)^2$ prímszám van.

Most alkalmazzuk (25)-öt $k=\frac{p_{r+1}-Z}{2}>\frac{t_x}{2}$, $n=\frac{p_{r+1}+Z}{2}$ esetén. Minthogy $n+i_0\leqq p_{r+1}$, és a (Z, p_{r+1}) időintervallumban legfeljebb $(r+1)^2$ prímszám van, azonnal nyerjük, hogy

$$W(n+i_0;\ k) < (n+i_0)^{(r+1)^2} \leqq p_{r+1}^{(r+1)^2}. \tag{28}$$

Másrészt azonban (25) és (26) miatt $(k > t_x/2,\ p_{r+1} \leqq x)$

$$U(n+i_0;\ k) > (\exp ct_x/2) > p_{r+1}^{(r+1)^2}.$$

Ezzel tételünk be van bizonyítva.

Nem lenne érdektelen meghatározni (de legalább is jó becslést találni) $n = n_r$ legkisebb értékére, melyhez van oly $k = k_r$, hogy (23) teljesül, pl. $\binom{127}{18}$ mutatja, hogy $n_1 \leqq 127$ ($n_1 = 127$ valószínűleg igaz, n_1 pontos értékét egyszerű próbálgatással könnyű lenne meghatározni).

Még néhány kérdés: A Hoheisel-féle prímszámtételből könnyen következik, hogy ha $c > 0$ elegendő kicsi és $2k \leqq n < k^{1+c}$, akkor ha $k \to \infty$, akkor n-ben egyenletesen fennáll

$$W(n;\ k)^{1/k} \to e.$$

Legyen $n_1(\varepsilon, k)$, illetve $n_2(\varepsilon, k)$ legkisebb értéke, melyre

$$W\big(n_1(\varepsilon, k);\ k\big) > (e+\varepsilon)^k, \quad \text{illetve} \quad W\big(n_2(\varepsilon, k);\ k\big) < (e-\varepsilon)^k.$$

Valószínűleg $n_1(\varepsilon, k)$ és $n_2(\varepsilon, k)$ mindketten gyorsabban tartanak a végtelenhez, mint k minden fix hatványa. Egyáltalán nem világos, hogy $n_1(\varepsilon, k)$ és $n_2(\varepsilon, k)$ közül melyik a nagyobb — lehet, hogy ez ε-tól is függ. Talán e kérdés reménytelen, de még nem volt időm (s ötletem se), hogy gondosan átgondoljam. $U(n;\ k)$ és $W(n;\ k)$ nagyon szabálytalanul változnak fix k és $n \to \infty$ mellett. Mindkettő végtelen sokszor 1 és felső korlátjuk végtelen. Ezzel szemben könnyű belátni, hogy minden $k > 3$-ra $V(n;\ k) \to \infty$. Talán ez már $k = 3$-ra is igaz. Ha $k = 3$ $V(n;\ k)$, akkor és csak akkor lehetne korlátos, ha van olyan t, melyre $t\, 2^\alpha 3^\beta \pm 1$ α és β végtelen sok értékére mindkettő prímszám és ennek eldöntése véges időn belül aligha remélhető. Legyen $m(n)$ az a legnagyobb szám, melyre

$$V\big(m(n);\ k\big) \leqq V(n;\ k).$$

Mi mondható ki $m(n)$-ről? Igaz-e, hogy $m(n)/n \to 1$? Nem lehetetlen viszont hogy $\limsup_{n \to \infty} m(n)/n = \infty$.

Sokan foglalkoztak a Sylvester—Schur-tétel egy más irányú általánosításával. Legyen $f(k)$ az a legkisebb szám, melyre minden $n \geqq k$-ra

$$P\left(\prod_{i=1}^{f(k)} (n+i)\right) > k.$$

Sylvester—Schur-tétel szerint $f(k) \leqq k$. Bebizonyítottam [4], hogy $f(k) < ck/\log k$. A jelenlegi rekord Shoreytől való [6], aki bebizonyította, hogy

$$f(k) < c\frac{k}{\log k}\frac{\log\log\log k}{\log\log k}.$$

Sejthető, hogy $f(k) < C(\log k)^2$, ez azonban mai eszközeinkkel nem támadható. Az olvasó gondolhatná, hogy e problémák mind reménytelenek. Szerencsére ez azért nem teljesen van így, s az utóbbi években két százéves kérdés egymásután következő számokról nyert elintézést. Catalan a 19-edik század végén sejtette, hogy 8 és 9 az egyetlen két egymásután következő hatványszám. Nagyon könnyű belátni, hogy négy egymásután következő szám nem lehet mindegyik hatványszám, ugyanis az egyik csak 2 első hatványával osztható. Lényegesen nehezebb bebizonyítani, hogy három egymásután következő szám se lehet sohasem hatványszám. Ezt kb. 20 éve Cassels és Makowski bebizonyították. Végül nemrég Tijdemann [7] bebizonyította, hogy van explicit módon kiszámítható c constans úgy, hogy nincs c-nél nagyobb két egymásután következő hatványszám. Tijdeman Baker mély eredményeit használja. Biztosra vehető, hogy rövidesen Catalan eredeti sejtése be lesz bizonyítva.

Legyenek $x_1 < x_2 < \ldots$ a nagyság szerint rendezett hatványszámok sorozata. Biztosra vehető, hogy létezik oly c, amelyre minden i-re

$$x_{i+1} - x_i > x_i^c. \tag{27}$$

(27) bizonyítása a ma rendelkezésünkre álló eszközökkel nem remélhető. Choodnovskynek talán sikerült bebizonyítani, hogy $x_{i+1} - x_i \to \infty$. Kérdezhető, hogy egy k hosszúságú intervallumba maximálisan hány x_i eshetik? Valószínűnek látszik, hogy $k > k_0$ esetén $0 < n \leqq k$ az az intervallum, mely a legtöbb hatványszámot tartalmazza. Valószínűleg e kérdés elintézése nem lesz könnyű.

A múlt század elejére vagy közepére megy vissza az a sejtés, hogy egymásután következő számok szorzata sohasem lehet hatványszám. Néhány éve e sejtést Selfridgevel bebizonyítottuk. Bizonyításunk elemi, de eléggé komplikált [5].

Legyen $A(n; k) = \prod_{i=1}^{k} (n+i)$ és $B(n; k)$ az $n+1, \ldots, n+k$ számok legkisebb közös többszöröse. Selfridgevel sejtettük, hogy ha $k > 3$, akkor $A(n; k)$-nak mindig van oly $p > k$ prímfaktora, melyre $p^2 | A(n; k)$. Egyelőre e sejtés is megtámadhatatlannak látszik. Néhány év óta sejtem, hogy ha $m \geqq n+k$, akkor $B(n; k) \neq B(m; k)$. E sejtés se látszik könnyűnek.

Igaz-e, hogy van végtelen sok oly p prímszám, melyre minden $1 \leqq k \leqq p/2$ esetén

$$W(p; k) > U(p; k). \tag{29}$$

Azt sejteném, hogy van végtelen sok p, melyre (29) fennáll. Biztosra vehető, hogy végtelen sok oly p van, melyre (29) nem teljesül minden k-ra; ha p a legkisebb 2^u-nál nagyobb prímszám, akkor biztosra vehető, hogy (29) $u > u_0$-ra nem áll fenn — ezt talán nem lesz nehéz bebizonyítani.

IRODALOM

[1] E. F. Ecklund, Jr. R. B. Eggleston, P. Erdős and J. L. Selfridge, On the prime factorisation of binomial coefficients. *J. Austral Math. Soc.* (Ser. A) **26** (1978), 257—269. E cikk részletes irodalmi összeállítást is tartalmaz.

[2] P. Erdős, Some unconventional problems in number theory, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **33** (1979), 71—80.

[3] P. Erdős, Beweis eines Satzes vonTscebyschef, *Acta Szeged* **5** (1932), 194—198.

[4] P. Erdős, On consecutive integers, *Niemv Arch. Wisk.* (3) **3** (1955), 124—128.

[5] P. Erdős and J. L. Selfridge, The product of consecutive integers is never a power, Ill. *J. Math.* **19** (1975), 292—301. E cikk is részletes irodalmi összeállítást is tartalmaz.

[6] T. N. Shorey, On gaps between numbers with a large prime factor. II. *Acta Arithmetica,* **25** (1974), 365—373.

[7] R. Tijdeman, On the equation of Catalan, *Acta Arithmetica,* **29** (1976), 197—209.

Talán most még felsorolom hasonló témával foglalkozó cikkeim jegyzékét:

P. ERDŐS, Über die Änzahl der Primfaktoren von $\binom{n}{k}$, *Archiv der Math.* **24** (1973), 53—56.

P. ERDŐS, Problems and results on consecutive integers, *Publ. Math.* Debrecen, **23** (1976), 271—282.

P. ERDŐS, H. GUPTA and S. P. KHARE, On the number of distinct prime factors of $\binom{n}{k}$.

P. ERDŐS and J. SELFRIDGE, Some problems on the prime factors of consecutive integers, *Illinois J. Math.* **11** (1967), 428—430.

P. ERDŐS and R. L. GRAHAM, On the prime factors of $\binom{n}{k}$, *Fibonacci Quarterly* **14** (1976), 348—352.

P. ERDŐS and A. SÁRKÖZY, On the prime factors of $\binom{n}{k}$ and of consecutive integers, will soon appear in *Utilitas Math.*

О ПРИМАРНЫХ ФАКТОРАХ БИНОМИНАЛЬНЫХ КОЭФФИУМЕНТВ

ПАЛ ЭРДЁШ

ON PRIME FACTORS OF BINOMIAL COEFFICIENTS

P. ERDŐS