Gráfok előírt fokú pontokkal

ERDŐS PÁL és GALLAI TIBOR

Turán Pálnak 50. születésnapjára

Bevezetés

Egy gráf[1]) pontjainak fokai általában nem írhatók elő tetszőlegesen. A megengedett gráffajtáktól függően más-más feltételeket kell az előírt fokoknak kielégíteniök, hogy azok egy megengedett gráf pontjainak fokai lehessenek. Ilyen „megvalósíthatósági" feltételek ismeretesek véges (irányítás nélküli) gráfokra abban az esetben, ha két pontot egynél több él is összeköthet [7], páros gráfokra (matrixokra megfogalmazva) abban az esetben is, ha két pontot legfeljebb egy él köthet csak össze ([2], [6]), továbbá irányított gráfokra, amidőn minden ponthoz előírjuk a befutó és kifutó élek számát ([1], 87. o.). Olyan tetszőleges véges (irányítás nélküli) gráfokra, melyekben hurokélek nem szerepelnek és két pontot legfeljebb egy él köthet össze, HAVEL [3] megadott egy algoritmust, amellyel az előírt fokokról eldönthető a megvalósíthatóság, de tudomásunk szerint erre az esetre eddig nem közöltek explicit szükséges és elégséges megvalósíthatósági feltételeket. E dolgozat célja ilyen feltételek megadása.

A megvalósíthatósági probléma sok esetben — s ez a helyzet az általunk vizsgált gráfoknál is — egy faktorizációs feladatnak fogható fel. Az előírt fokokat egy, a kijelölt tulajdonságokkal rendelkező „teljes" gráf pontjaihoz rendelve, a „megvalósító" gráfok a teljes gráf olyan részgráfjainak — faktorainak — tekinthetők, amelyekben a pontok fokai egyenlők a pontokhoz rendelt számértékekkel. Az alapul vett gráf speciális volta (teljessége) következtében a faktorok létezésére vonatkozó általános feltételek leegyszerűsödnek, s ezért a megvalósíthatósági feltételek lényegesen egyszerűbbek a

[1]) E dolgozatban a gráffogalmat csak kombinatorikus felfogásban használjuk (l. [4]). Szögpont helyett röviden pontot mondunk.

faktorizációs feltételeknél. Kézenfekvő kívánság, hogy ezeket az egyszerűbb feltételeket közvetlenül is — a mélyebben fekvő faktorizációs tételek felhasználása nélkül — levezessük. A 2., 3. és 4. paragrafusokban, HAVEL egy gondolatát felhasználva, egy ilyen megoldását adjuk problémánknak. Az 5. §-ban megmutatjuk, hogy feltételeink hogyan adódnak a Tutte-féle általános faktorizációs tételből.

1. §

(1.1) A továbbiakban gráfon mindig olyan véges[2]), irányítás nélküli gráfot értünk, amelyben nem fordulnak elő hurokélek és bármely két pontot legfeljebb egy él köt össze. Egy P pont $\varrho(P)$ *foka* (a G gráfban) a P-hez illeszkedő (G-beli) élek száma. A $\varrho(P)=0$ esetben P-t *izoláltnak* mondjuk.

A $\varphi=(a_1,\ldots,a_n)$ $(n\geqq 2)$ sorozatot *megvalósíthatónak* nevezzük, ha létezik olyan G gráf, amelynek pontjai $P_1,\ldots,P_n$ és $\varrho(P_i)=a_i$ $(i=1,\ldots,n)$. Azt, hogy G az említett tulajdonsággal rendelkezik, röviden így fejezzük ki: a $G(P_1,\ldots,P_n)$ gráf φ-nek egy *megvalósítása*.

A $\varphi=(a_1,\ldots,a_n)$ sorozatot *szabályosnak* mondjuk, ha $n\geqq 2$, $a_1,\ldots,a_n$ egész számok és $a_1\geqq\ldots\geqq a_n\geqq 0$.

(1.2) TÉTEL. *A szabályos $\varphi=(a_1,\ldots,a_n)$ sorozat akkor és csak akkor megvalósítható, ha*

a) $$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \textit{páros}$$

és

b) $$\sum_{i=1}^{j} a_i - j(j-1) \leqq \sum_{k=j+1}^{n} \min(j, a_k) \qquad (j=1,\ldots,n-1).$$

E tétel bizonyítását a 2—5. paragrafusokban végezzük el.

MEGJEGYZÉSEK:

(1.3) Bevezetve az $s_1=a_1$, $s_i=a_1+\cdots+a_i$ $(i=2,\ldots,n)$ $r_i=s_n-s_i$ $(i=1,\ldots,n)$ jelöléseket, az (1.2) tétel b) feltétele a következő alakokban is felírható:

b') $$s_j-j(j-1)\leqq(v_j-j)j+r_{v_j} \qquad (j=1,\ldots,n-1),$$

b'') $$s_j-j(j-1)\leqq(v_j^*-j)j+r_{v_j^*} \qquad (j=1,\ldots,n-1),$$

[2]) Végtelen gráfokra problémánk megoldása triviális.

ahol az $a_{j+1} \leqq j$ esetben $\nu_j = j$, az $a_{j+1} > j$ esetben pedig ν_j a φ sorozat j-nél nagyobb tagjainak számát jelenti, továbbá az $a_{j+1} < j$ esetben $\nu_j^* = j$, az $a_{j+1} \geqq j$ esetben ν_j^* a φ sorozat j-nél nem kisebb tagjainak száma.

A későbbiekben fel fogjuk használni azt a megállapítást, hogy a $j \leqq n-2$ esetben $\nu_{j+1}^* = \nu_j$.

(1.4) Könnyen belátható, hogy a b) feltétel egyenértékű a következővel:

Minden olyan j és k egészekre, melyekre $1 \leqq j \leqq n-1$ és $j \leqq k \leqq n$ fennáll

$$(1) \qquad s_j - j(j-1) \leqq (k-j)j + r_k.$$

(1.5) Ha egy φ sorozat megvalósítható, akkor általában több megvalósítása is létezik. PETERSEN egy tételét ([5], 196. o.) felhasználva könnyen igazolható, hogy bármely megvalósításból bármely másik[3]) *négyszöges cserék* ismételt végrehajtásával létrehozható (vö. [1], 88. o. és [6], 3.1. tétel.). A G gráfon végrehajtott négyszöges cserén a következő átalakítást értjük: Legyenek P_1, P_2, P_3 és P_4 a G gráfnak olyan különböző pontjai, hogy a P_1P_2 és P_3P_4 élek szerepelnek G-ben, a P_2P_3 és P_4P_1 élek viszont nem. Hagyjuk el G-ből a P_1P_2 és P_3P_4 éleket, és vegyük hozzá a P_2P_3 és P_4P_1 éleket. (Világos, hogy ha G φ-nek megvalósítása, akkor a keletkező új gráf is az.)

(1.6) Ha a φ sorozat megvalósítható, akkor nem mindig létezik összefüggő megvalósítása is. Négyszöges cserék segítségével nem nehéz igazolni, hogy a következő feltételek teljesülése szükséges és elégséges ahhoz, hogy egy megvalósítható $\varphi = (a_1, \ldots, a_n)$ sorozatnak legyenek összefüggő megvalósításai is:

$$1) \quad a_i > 0 \ (i = 1, \ldots, n) \qquad \text{és} \qquad 2) \quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i \geqq n-1.$$

2. §

(2.1) Az (1.2) a) és b) feltételek szükségességének belátásához valamint a faktorizációs tétellel való kapcsolat létrehozásához néhány fogalmat és jelölést vezetünk be.

Egy M halmaz elemeinek számát $\nu(M)$-mel, az üres halmazt a $\emptyset$ jellel, a G-vel jelölt gráf pontjainak halmazát S-sel jelöljük. Ha $A \subseteq S$, akkor $[A]$ a G gráfnak azt a részgráfját jelenti, mely A

[3]) „Izomorf" gráfokat azonosaknak tekintve.

pontjaiból és e pontokat (G-ben) összekötő élekből áll. (Ha $A=\emptyset$, úgy $[A]$ az üres gráf.) Ha $A \subseteq S$, $B \subseteq S$, akkor $\nu(A, B)$ a G gráf azon éleinek számát jelöli, melyek egy A-beli pontot egy B-beli ponttal kötnek össze. (Ha A vagy B üres, akkor $\nu(A, B)=0$.) Ha $f(P)$ egy az S halmazon értelmezett függvény és $\emptyset \neq A \subseteq S$, úgy

$$f(A)=\sum_{P \in A} f(P).$$

Ha $A=\emptyset$, akkor legyen $f(A)=0$.

A P és P' pontokat összekötő PP' élről azt fogjuk mondani, hogy az P-ben (és ugyancsak P'-ben) *létrehoz egy illeszkedést.* Ha $A \subseteq S$, úgy $\varrho(A)$ megadja G élei által A pontjaiban létrehozott illeszkedések számát.

(2.2) Mivel minden él pontosan két illeszkedést hoz létre, azért a G gráfban létrehozott összes illeszkedések száma: $\varrho(S)$ páros szám. Ha G a $\varphi=(a_1, \ldots, a_n)$ sorozatnak egy megvalósítása, akkor $\sum_{i=1}^{n} a_i=\varrho(S)$. Az (1.2) a) feltétel tehát valóban szükséges φ megvalósíthatóságához.

(2.3) Legyenek A, B és C S-nek páronként közös elemet nem tartalmazó olyan részhalmazai, melyeknek egyesitése S. Röviden ezt így fogjuk kifejezni: (A, B, C) az S-nek egy *szétbontása.*

Legyen most (A, B, C) S-nek egy tetszőleges olyan szétbontása, amelyben A nem üres. Az $[A]$ részgráfból „kilépő" élek számát, azaz a $\nu(A, B \cup C)$ számot fogjuk kétféle módon megbecsülni, s ebből a $\varrho(P)$ függvénynek egy tulajdonságát levezetni.

G élei A-ban pontosan $\varrho(A)$ illeszkedést hoznak létre. Ezek vagy $[A]$ éleitől, vagy az A-ból kilépő élektől származnak. Mivel két pontot legfeljebb egy él köt össze, $[A]$ élei legfeljebb $\nu(A)(\nu(A)-1)$ illeszkedést létesithetnek. Az $[A]$-ból kilépő élek pontosan $\nu(A, B \cup C)$ illeszkedést hoznak A-ban létre. Eszerint

$$\varrho(A)-\nu(A)(\nu(A)-1) \leqq \nu(A, B \cup C). \tag{1}$$

$$\nu(A, B \cup C)=\nu(A, B)+\nu(A, C). \quad \text{De} \quad \nu(A, B) \leqq \nu(A) \nu(B)$$

és $\nu(A, C) \leqq \varrho(C)$, s így

$$\nu(A, B \cup C) \leqq \nu(A) \nu(B)+\varrho(C). \tag{2}$$

(1) és (2)-ből

$$\varrho(A)-\nu(A)(\nu(A)-1) \leqq \nu(A) \nu(B)+\varrho(C). \tag{3}$$

Mivel (3) $A=\emptyset$-ra is érvényes, kimondható, hogy (3) S-nek minden (A, B, C) szétbontására fennáll.

Legyen $G(P_1, \ldots, P_n)$ most a $\varphi=(a_1, \ldots, a_n)$ szabályos sorozatnak egy megvalósítása, továbbá legyen $S_j=\{P_1, \ldots, P_j\}$ $(j=1, \ldots, n)$. Ekkor az $A=S_j$, $B=S_{k-j}$ és $C=S-S_k$ halmazok az $1 \leqq j \leqq n-1$, $j \leqq k \leqq n$ esetben S-nek egy olyan szétbontását határozzák meg, melyre (3)-at alkalmazva (1.4) (1)-et kapjuk. Ebből következik, hogy az (1.4) alatti, és így az (1.2) b) feltétel is szükséges φ megvalósíthatóságához.

3. §

(3.1) Az (1.2) a) és b) feltételek elégségességének bizonyításához egy segédtételre van szükségünk. HAVEL megmutatta ([3], 3. tétel), hogy ha a szabályos $\varphi=(a_1, \ldots, a_n)$ sorozat megvalósítható és $a_n>0$, akkor φ-nek olyan $G(P_1, \ldots, P_n)$ megvalósítása is létezik, amelyben P_n a $P_1, \ldots, P_{a_n}$ pontokkal (és csak ezekkel) van összekötve. Mi e tételnek egy élesítését fogjuk felhasználni.

A G gráfnak egy nem izolált P pontját (G-ben) *ugrásmentesnek* nevezzük, ha bármely P-vel összekötött P' pontot is tekintünk, P össze van kötve minden (P-től különböző) P'-nél nagyobb fokú ponttal.

(3.2) SEGÉDTÉTEL. *Ha a* $\varphi=(a_1, \ldots, a_n)$ $(n \geqq 2)$ *sorozat megvalósítható és* $a_i>0$ $(1 \leqq i \leqq n)$, *akkor létezik* φ*-nek olyan* $G(P_1, \ldots, P_n)$ *megvalósítása is, amelyben* P_i *ugrásmentes.*

BIZONYÍTÁS: Legyen $G(P_1, \ldots, P_n)$ egy olyan megvalósítása φ-nek, amelyben a P_i-vel összekötött pontok fokainak b_i összege maximális. Igazoljuk, hogy P_i ugrásmentes. Tegyük fel az ellenkezőjét. Ekkor léteznek olyan P_i-től különböző P_j és P_k pontok, hogy P_j össze van kötve P_i-vel, P_k pedig nincs és $\varrho(P_k)>\varrho(P_j)$. Mivel P_k-ból több él fut ki mint P_j-ből és két pontot legfeljebb egy él köt össze, van olyan P_i és P_j-től különböző P_l pont, amely P_k-val össze van kötve, P_j-vel azonban nem. Hagyjuk el G-ből a P_iP_j és P_kP_l éleket és vegyük fel az új P_iP_k és P_jP_l éleket. Ily módon φ-nek egy olyan megvalósítását kapjuk, amelyben a P_i-vel összekötött pontok fokainak összege nagyobb b_i-nél. Ez ellentmond feltevésünknek.

MEGJEGYZÉS: Olyan megvalósítás, melyben minden nem izolált pont ugrásmentes, általában nem létezik. Pl. a $\varphi=(3, 2, 2, 2, 1)$ megvalósítható sorozatnak nincsen olyan megvalósítása, amelyben minden pont ugrásmentes.

4. §

(4.1) Az (1.2) a) és b) feltételek elégségességének bizonyítását az $s(\varphi)=\sum_{i=1}^{n} a_i$ értékre vonatkozó teljes indukcióval végezzük el.

Ha $s(\varphi)=0$, akkor az elégségesség triviális. Legyen 2σ egy tetszőleges pozitív páros szám, és tegyük fel, hogy minden olyan szabályos φ, amely eleget tesz (1.2) a) és b)-nek és amelyre $s(\varphi)<2\sigma$ megvalósítható, és jelöljön a továbbiakban $\varphi_1=(a_1,\ldots,a_{n_1})$ egy tetszőleges olyan, az (1.2) a) és b) feltételeknek eleget tevő szabályos sorozatot, amelyre $s(\varphi_1)=2\sigma$. Bebizonyítjuk, hogy φ_1 is megvalósítható.

$s(\varphi_1)>0$ miatt igaz $a_1>0$. Jelölje $n(1\leqq n\leqq n_1)$ azt a legnagyobb egész számot, melyre $a_n>0$. Ekkor $n>1$, mert ha $n=1$, akkor (1.2) b)-ből $j=1$-re $a_1\leqq 0$ adódna. A $\varphi=(a_1,\ldots,a_n)$ sorozat is szabályos és kielégíti az (1.2) a) és b) feltételeket, továbbá $s(\varphi)=s(\varphi_1)=2\sigma$. Igazolni fogjuk, hogy φ megvalósítható. Ebből nyilvánvalóan következni fog φ_1 megvalósítható volta is.

(4.2) (1.4) (1)-ből $j=1$ és $k=n$ mellett

$$a_1\leqq n-1$$

következik. Az $a_1=\cdots=a_n$ esetben (1.2) b) minden j-re ugyanezt az egyenlőtlenséget szolgáltatja. φ megvalósítható voltát, ekkor indukciós feltevésünk felhasználása nélkül igazoljuk.

Állításunk triviális az $n=2$ esetben. Legyen $n\geqq 3$ és legyenek a G gráf pontjai egy $P_1P_2\ldots P_n$ szabályos n-szög csúcspontjai. G éleit így határozzuk meg:

Az $a_1=2a$ (a egész) esetben, ha $a=1$, akkor a sokszög oldalai legyenek az élek, ha $1<a\leqq(n-1)/2$, akkor az oldalakon kívül még mindazok az átlók, melyek nem hosszabbak a P_1P_{a+1} átlónál.

Az $a_1=2a+1$ (a egész) esetben — ekkor (1.2) a) miatt n páros — ha $a=0$, úgy a sokszög $n/2$ leghosszabb átlója, ha $a=1$, akkor ezeken kívül még az oldalak, végül ha $1<a\leqq(n-2)/2$, akkor az eddig felsoroltakon kívül még valamennyi P_1P_{a+1}-nél nem hosszabb átló alkossa G éleinek halmazát.

Az így létrehozott G gráf a tekintett φ sorozatnak megvalósítása.

(4.3) A továbbiakban feltesszük, hogy

$$a_1>a_n.$$

Jelentse h azt a legnagyobb egészet, melyre $a_1 = a_h$. Ekkor $1 \leqq h \leqq n-1$ és $a_1 = \cdots = a_h > a_{h+1}$.

A $\varphi' = (a_1', \ldots, a_n')$ sorozatot így értelmezzük:

$$a_h' = a_h - 1, \ a_n' = a_n - 1; \quad \text{ha} \quad i \neq h, n, \quad \text{akkor} \quad a_i' = a_i.$$

Feltevéseinkből következik, hogy φ' szabályos. A (3.1) alatt említett Havel-féle tételből pedig látható, hogy ha φ megvalósítható, akkor φ' is az. Most ennek megfordítását igazoljuk. Tegyük fel, hogy $G'(P_1, \ldots, P_n)$ φ'-nek egy megvalósítása. Bebizonyítjuk, hogy ekkor φ is megvalósítható.

Mivel $n-1 \geqq a_h > a_n > 1$, azért $n-1 > a_h' > a_n' \geqq 0$ és G'-ben minden P_n-től különböző pont foka nagyobb P_n fokánál. A (3.2) segédtétel szerint feltehető, hogy G' egy olyan megvalósítása φ'-nek, amelyben a P_h pont ugrásmentes. Ekkor P_h nem lehet összekötve G'-ben P_n-nel. Ugyanis P_h legfeljebb csak $n-2$ ponttal lehet G'-ben összekötve és így van olyan pont, amellyel nincs összekötve és ennek foka a P_hP_n él létezése esetén nagyobb volna P_n fokánál.

Megállapításunk következtében a G' gráfhoz hozzávehetjük a P_hP_n élt, amikor is φ-nek egy megvalósítását kapjuk.

A következőkben bebizonyítjuk, hogy φ' kielégíti az (1.2) a) és b) feltételeket. Ekkor $s(\varphi') = s(\varphi) - 2$ miatt indukciós feltevésünkből következni fog, hogy φ' megvalósítható. A fentiek szerint ezáltal φ megvalósítható volta is igazolva lesz.

(4.4) Az $s(\varphi') = s(\varphi) - 2$ egyenletből megállapíthatjuk, hogy φ-vel együtt φ' is kielégíti az (1.2) a) feltételt.

Az (1.2) b) feltétel teljesülésének igazolásához az (1.3) alatti jelöléseket fogjuk használni. Bevezetve még a

$$t_j = (\nu_j - 1)j + r_{\nu_j} \qquad (j = 1, \ldots, n-1)$$

rövidítést, (1.2) b) a következő alakot ölti:

$$(1) \qquad s_j \leqq t_j \qquad (j = 1, \ldots, n-1).$$

A φ' sorozattal kapcsolatban jelentsék s_j' és t_j' ugyanazt mint φ-vel kapcsolatban s_j és t_j. Célunk igazolni, hogy (1)-ből következik

$$(2) \qquad s_j' \leqq t_j' \qquad (j = 1, \ldots, n-1).$$

(I) Legyen először $j \geqq h$. Ekkor $s_j' = s_j - 1$ és az $a_n > j$ esetben $t_j' = t_j$, az $a_n \leqq j$ esetben $t_j' = t_j - 1$. Most (1)-ből közvetlenül látható $s_j' \leqq t_j'$ helyessége.

(II) Legyen $j < h$. Ekkor

$$j \leqq n-2, \quad a_1 = \cdots = a_j = a_{j+1} \quad \text{és} \quad s_j' = s_j = ja_1.$$

a) Ha $a_1=a_h\leqq j$, akkor $\nu_j=j$, $t_j=(j-1)j+r_j$ és $t'_j=t_j-2$.

$s_j+r_j=s(\varphi)=2\sigma$-ból következik, hogy s_j és r_j egyenlő paritásúak, ha tehát igazoljuk az $s_j<t_j$ egyenlőtlenséget, akkor ebből következni fog $s'_j\leqq t'_j$.

$$s_j-t_j=j(a_1-j+1)-r_j.$$

Ha $a_1<j$, akkor $r_j\geqq a_n>0$ miatt $s_j-t_j<0$.

Ha $a_1=j$, akkor $s_j-t_j=j-r_j<0$, mert $r_j=a_{j+1}+\cdots$ $\cdots+a_n\geqq j+a_n>j$.

b) Legyen most $a_1=a_h>j$. Ekkor $\nu_j\geqq h$.

Ha $a_n>j$, akkor $\nu_j=n$ és $t'_j=t_j$ és így (1)-ből közvetlenül adódik $s'_j\leqq t'_j$.

A továbbiakban legyen $a_n\leqq j$. Ekkor $\nu_j<n$ és $t'_j=t_j-1$. $s'_j\leqq t'_j$ helyességét most $s_j<t_j$ igazolása révén fogjuk belátni.

A rövidség kedvéért legyen $\nu_j=k$. Ekkor

$$s_j-t_j=j(a_1-k+1)-r_k.$$

Ha $a_1-k+1\leqq 0$, akkor $r_k>0$ miatt $s_j-t_j<0$.

Ha $a_1-k+1>0$, akkor felhasználjuk az $s_{j+1}\leqq t_{j+1}$ egyenlőtlenséget ($j\leqq n-2$).

$s_{j+1}=s_j+a_1$, továbbá az (1.3) alattiak szerint

$$t_{j+1}=(k-1)(j+1)+r_k=(k-1)j+r_k+k-1=t_j+k-1.$$

Tehát

$$s_{j+1}-t_{j+1}=s_j-t_j+a_1-k+1.$$

$s_{j+1}\leqq t_{j+1}$ és az $a_1-k+1>0$ feltevésből következik $s_j-t_j<0$.

Ezzel az (1.2) tétel bizonyítását befejeztük.

5. §

(5.1) Most az (1.2) tételt egy általános faktorizációs tételből vezetjük le.

Legyen a G gráf minden egyes P pontjához egy $\varkappa(P)$ nem negatív egész szám hozzárendelve. G egy *$\varkappa$-faktorán* G-nek egy olyan G' részgráfját értjük, amelyben minden egyes P pont foka a megfelelő $\varkappa(P)$ értékkel egyenlő. A (2.1) alatti jelölésekkel a Tutte-féle faktorizációs tétel ([8], XV. tétel) véges gráfokra ilyen alakban mondható ki:

(5.2) (TUTTE). *G-nek akkor és csak akkor létezik $\varkappa$-faktora, ha S bármely (A, B, C) szétbontására*

(1) $$\varkappa(A) \leqq \varkappa(B) + 2\nu(A, A) + \nu(A, C) - \tau,$$

ahol τ a $[C]$ gráf „páratlan" komponenseinek száma, páratlannak nevezve $[C]$-nek egy $[C_i]$ komponensét (C_i e komponens pontjainak halmaza), ha $\varkappa(C_i) + \nu(A, C_i)$ páratlan. ($C = \varnothing$ esetben $\tau = 0$.)

(5.3) Legyen $\varphi = (a_1, \ldots, a_n)$ egy tetszőleges szabályos sorozat. Jelölje most G azt a gráfot, melyre $S = \{P_1, \ldots, P_n\}$ és amelyben bármely két pont pontosan egy éllel van összekötve (teljes gráf). Legyen $\varkappa(P_i) = a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ekkor G-nek egy $\varkappa$-faktora φ-nek egy megvalósítása és megfordítva φ-nek bármely megvalósítása izomorf G egy $\varkappa$-faktorával. φ tehát akkor és csak akkor megvalósítható, ha G-nek van $\varkappa$-faktora, azaz ha (1) S-nek bármely (A, B, C) szétbontására teljesül. G teljes voltát figyelembe véve (1) így alakul

(2) $$\varkappa(A) \leqq \varkappa(B) + \nu(A)(\nu(A) - 1) + \nu(A)\nu(C) - \tau,$$

ahol $\tau = 0$ vagy 1 aszerint, hogy $\varkappa(C) + \nu(A)\nu(C)$ páros vagy páratlan. (Ha C nem üres, úgy $[C]$ összefüggő!)

Ha $A = B = \varnothing$, akkor (2)-ből $\tau = 0$, azaz $\varkappa(C) = \varkappa(S)$ páros volta következik. $\varkappa(S)$ páros voltából tetszőleges (A, B, C) felbontásokra következik, hogy (2) két oldalának paritása megegyezik. ($\varkappa(S) = \varkappa(A) + \varkappa(B) + \varkappa(C)$ és $\varkappa(C) + \nu(A)\nu(C) - \tau \equiv 0$ (mod 2)-ből következik, hogy a két oldal különbsége $\equiv \varkappa(S) + \nu(A)(\nu(A) - 1)$ (mod 2).) A fentiek alapján megállapítható, hogy (2) fennállása minden szétbontásra egyenértékű a következő két kikötés teljesülésével:

a*) $\varkappa(S)$ páros,

b*) S minden (A, B, C) felbontására

(3) $$\varkappa(A) \leqq \varkappa(B) + \nu(A)(\nu(A) - 1) + \nu(A)\nu(C).$$

a*) nyilvánvalóan azonos az (1.2) a) kikötéssel.

(3) az $A = \varnothing$ esetben triviálisan érvényes; ezt tehát nem kell megkövetelni. Továbbá nyilvánvaló, hogy (3) fennáll egy (A, B, C) szétbontásra, ha fennáll arra az (A', B', C') felbontásra, mely (A, B, C)-ből úgy jön létre, hogy A'-be a $\nu(A)$ legnagyobb, B'-be pedig a $\nu(B)$ legkisebb $\varkappa$-értékkel bíró pontot helyezzük. Azonban (3)-nak csak ilyen (A', B', C') felbontásokra való megkövetelése azonos az (1.4) alatti feltétellel. Megállapíthatjuk tehát, hogy (5.2)-ből következik az (1.2) tétel.

IRODALOM

[1] C. Berge, Théorie des graphes et ses applications (Paris, 1958).
[2] D. Gale, A theorem on flows in network, *Pacific J. of Math.* **7** (1957), 1073—1082. o.
[3] V. Havel, Eine Bemerkung über die Existenz der endlichen Graphen (csehül), *Casopis pro pěstování matematiky* **80** (1955) 477—480. o.
[4] D. König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen (Leipzig, 1936).
[5] J. Peteresen, Die Theorie der regulären Graphen. *Acta Math.* **15** (1891) 193—220. o.
[6] H. J. Ryser, Combinatorial properties of matrices of zeros and ones, *Canadian J. of Math.*, **9** (1957), 371—377. o.
[7] I. K. Senior, Partitions and their representative graphs, *Amer. J. Math.* **73** (1951), 663—689. o.
[8] W. T. Tutte, The factors of graphs, *Canadian J. of Math.*, **4** (1952), 314—328. o.

ГРАФЫ С ТОЧКАМИ ЗАДАННОЙ СТЕПЕНИ

П. Эрдёш и Т. Галлаи

Последовательность $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geqq 2)$ называется реализуемой, если существует граф без петлевых и многократных ребер, точки которого $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и в котором степень точки P_i равна a_i $(i=1, 2, \ldots, n)$. Доказывается следующая теорема:

Последовательность неотрицательных целых чисел $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geqq 2)$, удовлетворяющая условию $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$, в том и только в том случае реализуема, если выполняются условия:

a) $\sum_{i=1}^{n} a_i$ четное число,

b) $\sum_{i=1}^{j} a_i - j(j-1) \leqq \sum_{k=j+1}^{n} \min(j, a_k) \qquad (j=1, \ldots, n-1).$

Доказательство, используя одну идею Хавэла [3], производится методом математической индукции относительно $\sum_{i=1}^{n} a_i$. Доказывается ещё, что проблема может рассматриваться как факторизационная задача относительно полных графов и на основание этого теорема выводится и из факторизационной теоремы Туттэ [8].

GRAPHEN MIT PUNKTEN VORGESCHRIEBENEN GRADES

P. Erdős und T. Gallai

Wir nennen eine Folge $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geqq 2)$ *realisierbar*, wenn es ein solcher (ungerichteter) Graph mit den Knotenpunkten $P_1, \ldots, P_n$ existiert, der keine Kantenschlingen und keine mehrfache Kanten enthält und in dem der Grad des Punktes P_i gleich a_i $(i=1, \ldots, n)$ ist. Es wird folgender Satz bewiesen:

Besteht die Folge $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geqq 2)$ aus nichtnegativen ganzen Zahlen und ist $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n$, so ist diese Folge dann und nur dann realisierbar, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) $\sum_{i=1}^{n} a_i$ *ist gerade,*

b) $\sum_{i=1}^{j} a_i - j(j-1) \leqq \sum_{k=j+1}^{n} \min(j, a_k) \qquad (j=1, \ldots, n-1).$

Der Beweis wird mit Hilfe eines Gedankens von Havel [3] durch Induktion über $\sum_{i=1}^{n} a_i$ geführt. Ferner wird gezeigt, dass unseres Problem als eine Faktorisationaufgabe vollständiger Graphen aufgefasst werden kann, und hiernach wird unser Satz auch aus dem Tutteschen Faktorisationssatz [8] hergeleitet.