

ÜBER EINEN FABER'SCHEN SATZ

VON PAUL ERDÖS UND GÉZA GRÜNWARD

(Received August 18, 1937)

Die  $n$ -te Partialsumme der Fourier-Reihe der geraden Funktion  $f(x)$  sei

$$(1) \quad S_n[f(x)] = a_0 + a_1 \cos \vartheta + a_2 \cos 2\vartheta + \dots + a_{n-1} \cos (n-1)\vartheta.$$

$$(2) \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \vartheta) d\vartheta, \quad a_r = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \vartheta) \cos r\vartheta d\vartheta,$$

$$r = 1, 2, \dots, n-1.$$

Das zu den Wurzeln

$$(3) \quad x_k = \cos (2k-1) \frac{\pi}{2n} = \cos \vartheta_k$$

des Tschebyscheffschen Polynoms  $T_n(x) = \cos n \arccos x$  gehörige Lagrangesche Interpolationspolynom derselben Funktion hat hingegen die Form<sup>1</sup>

$$(4) \quad L_n[f(x)] \equiv \sum_{k=1}^n f(x_k) \frac{T_n(x)}{T_n'(x_k)(x-x_k)} = c_0 + c_1 \cos \vartheta + c_2 \cos 2\vartheta + \dots + c_{n-1} \cos (n-1)\vartheta$$

mit

$$(5) \quad c_0 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\cos \vartheta_k), \quad c_r = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f(\cos \vartheta_k) \cos r\vartheta_k, \quad r = 1, 2, \dots, n-1.$$

Ausser der formellen Übereinstimmung der Formeln (1), (2) und (4), (5) finden sich zwischen den Polynomen (1) und (4) verschiedene wesentliche Analogien, weshalb Faber<sup>2</sup> und neuestens Marczinkiewicz<sup>3</sup> das Verhalten der Polynomfolgen (1) und (4)  $n = 1, 2, \dots$  parallel untersuchten. Bei diesen Untersuchungen gewann Faber folgenden aus dem Gesichtspunkte der Analogie gewissermassen negativen Satz: Es existiert eine in  $(0, \pi)$  kontinuierliche, gerade periodische Funktion  $f(\cos \vartheta)$  mit der merkwürdigen Eigenschaft, dass

<sup>1</sup> L. Fejér, Abschätzung eines Polynoms in einem Intervalle, wenn Schranken für seine Werte und ersten Ableitungswerte in einzelnen Punkten des Intervalls gegeben sind und ihre Anwendung auf die Konvergenzfrage Hermitescher Interpolationsreihen. Math. Zeitschrift 32 (1930) S. 426-457, insb. S. 442.

<sup>2</sup> G. Faber, Über stetige Funktionen (zweite Abhandlung), Math. Annalen 69 (1910) S. 372-443, insb. §9.

<sup>3</sup> I. Marczinkiewicz, Sur l'interpolation I, II, Studia Mathematica VI (1936) S. 1-17, bzw. 67-81.

ihre Fourier Reihe im Intervalle  $(0, \pi)$  gleichmässig konvergiert, ihre Lagrange-Interpolationspolynome hingegen, wenn man sie in demselben Intervalle auf die Tschebyscheff-Abscissen (3) bezieht, an unendlich vielen Stellen divergieren.

In dieser Arbeit wollen wir beweisen, dass es eine, im Intervalle  $(0, \pi)$  kontinuierliche, gerade periodische Funktion  $f(\cos \vartheta)$  gibt so, dass ihre Fourier-Reihe im ganzen Intervalle gleichmässig konvergiert, ihre zu den Tschebyscheffschen Abscissen gehörigen Lagrange-Interpolationspolynome hingegen in einem jeden Punkte des Intervalls  $(0, \pi)$  unendlich werden.

Wir bemerken noch, dass unsere kontinuierliche Funktion nirgends differenzierbar ist, sie erfüllt sogar keine Lipschitz-Bedingung mit positivem Exponent und dennoch konvergiert ihre Fourier Reihe gleichmässig.<sup>4</sup>

Wir benützen hier diejenige Konstruktion, durch welche einer von uns<sup>5</sup> eine Funktion  $f(x)$  angegeben hat, deren Lagrange-Interpolationspolynome überall divergieren.  $f(x)$  hatte die Form

$$(6) \quad f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{\varphi_k(x)}{\mu_k},$$

wo für die Polynome  $\varphi_k(x)$  im Intervalle  $-1 \leq x \leq 1$  die Ungleichungen  $|\varphi_k(x)| \leq 2$  gelten, die  $\mu_k$  hingegen Zahlen bedeuten, die mit einer durch die Konstruktion angegebenen Schnelligkeit ins Unendliche wachsen und für welche  $\sum_1^{\infty} 1/\mu_k$  konvergent ist. Aus dem Beweis der oben zitierten Arbeit ist es klar, dass die  $\varphi_k(x)$  nicht unbedingt Polynome sein müssen, es wird von ihnen nur gefordert:

$$\alpha. , |\varphi_k(x)| \leq 2; \quad \beta. , |L_n[\varphi_k(x)]| \leq A_k \quad n = 1, 2, \dots,$$

wo die  $A_k$  sowohl von  $n$  als auch von  $x$  unabhängig sind;  $\gamma. , \varphi_k(x)$  nimmt in  $n_k$ , durch die Konstruktion angegebenen ( $n_k$  ganze Zahlen,  $k = 1, 2, \dots$ ) Stellen, die Werte  $+1$  oder  $0$  an.

Wir benötigen folgendes

LEMMA. Es seien im Intervalle  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ,  $\nu + \mu = n_i$  Punkte

$$(7) \quad x_1, x_2, \dots, x_\nu; \quad y_1, y_2, \dots, y_\mu$$

gegeben. Zu einem jeden  $n_i$  kann man eine Lipschitz-Bedingung erfüllende Funktion  $f_i(\cos \vartheta)$  angeben so, dass

$$(8) \quad f_i(y_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \mu,$$

$$(9) \quad f_i(x_k) = 1, \quad k = 1, 2, \dots, \nu,$$

$$(10) \quad |f_i(\cos \vartheta)| \leq 1,$$

$$(11) \quad |S_m[f_i(\cos \vartheta)]| \leq c_1,$$

<sup>4</sup> Es ist leicht zu beweisen, dass, wenn die zu den Tschebyscheffschen Abscissen gehörigen Lagrangeschen Interpolationspolynome der Funktion  $f(x)$  im Punkte  $x_0$  divergieren, dann erfüllt die Funktion  $f(x)$  im Punkte  $x_0$  mit keinem positiven Exponent eine Lipschitz-Bedingung. Also folgt die Nichtdifferenzierbarkeit einfach aus der Divergenz der Interpolationspolynome.

<sup>5</sup> G. Grünwald, Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome stetiger Funktionen, Annals of Mathematics 37 (1936) S. 908-918.

wo  $c_1$  (ebenso wie später  $c_2, \dots$ ) eine absolute, also von  $m, n_i$  und  $x$  unabhängige Konstante bedeutet.

Aus diesem Lemma folgt unser Satz unmittelbar. Da die zu den Tschebyscheffschen Abscissen gehörigen Lagrange-Interpolationspolynome einer Lipschitz Bedingung erfüllenden Funktion gleichmässig zu der Funktion konvergieren,<sup>6</sup> wird für die Funktion  $f_i(\cos \vartheta)$   $\beta$ . ebenso wie wegen (10), (8) und (9) auch  $\alpha$ ., und  $\gamma$ ., erfüllt, woraus nach unseren früheren Bemerkungen folgt, dass bei entsprechender Wahl der Punkte (7) und der Zahlen  $\mu_k$  die Lagrange-Interpolationspolynome der stetigen Funktion

$$f(x) = \sum_1^\infty \frac{f_k(x)}{\mu_k} \quad x = \cos \vartheta$$

überall divergieren.

Andererseits wegen

$$S_m[f(x)] = S_m \left[ \sum_1^r \frac{f_k(x)}{\mu_k} \right] + S_m \left[ \sum_{r+1}^\infty \frac{f_k(x)}{\mu_k} \right] = S_m[\varphi(x)] + S_m[\psi(x)]$$

erhalten wir wegen (11) für genügend grosses  $r$  und gegebenes  $\epsilon > 0$

$$|S_m[f(x)] - S_m[\varphi(x)]| \leq c_1 \sum_{r+1}^\infty 1/\mu_k < \frac{\epsilon}{2},$$

Also, da  $\varphi(x)$  eine Lipschitz-Bedingung erfüllt und daher seine Fourier-Reihe gleichmässig konvergiert, gilt für genügend grosses  $m$

$$|S_m[f(x)] - \varphi(x)| < \epsilon,$$

womit unser Satz bewiesen ist. Also haben wir nur unser Lemma zu beweisen.

Wir bezeichnen die kleinste der Entfernungen zweier Nachbarpunkte von (7) durch  $d$  und umgeben einen jeden der Punkte  $x_k$  mit einem Intervall  $(\alpha_k, \beta_k)$  so, dass die Länge eines solchen Intervalls  $\beta_k - \alpha_k = d/n_i, k = 1, 2, \dots, \gamma$  ist und  $x_k$  genau im Mittelpunkt des Intervalls  $(\alpha_k, \beta_k)$  liegt.

Nun definieren wir  $f_i(x)$  folgendermassen:

$$f_i(x) = 2(x - \alpha_k)/(\beta_k - \alpha_k), \text{ wenn } \alpha_k \leq x \leq \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)$$

$$f_i(x) = 2(x - \beta_k)/(\alpha_k - \beta_k), \text{ wenn } \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k) \leq x \leq \beta_k$$

$$f_i(x) = 0, \quad \text{wenn } \beta_k \leq x \leq \alpha_{k+1}, -1 \leq x \leq \alpha_1,$$

$$\beta_r \leq x \leq +1.$$

Es ist klar, dass bei dieser Definition  $f_i(x)$  eine Lipschitz-Bedingung und auch (8), (9) und (10) erfüllt, also haben wir nur (11) zu beweisen.

---

<sup>6</sup> Siehe zum B. L. Fejér, Lagrangesche Interpolation und die angehörigen konjugierten Punkte, Math. Annalen 106 (1932) S. 1-55.

Es sei  $\alpha_j \leq x \leq \alpha_{j+1}$  und es sei vorausgesetzt, dass  $x$  näher zu  $\alpha_j$  als zu  $\alpha_{j+1}$  liegt ( $x$  wird jetzt für fest betrachtet). Dann ist

$$\begin{aligned}
 |S_m[f_j(x)]| &= \left| \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\nu} \left( \int_{\alpha_k}^{\frac{1}{2}(\alpha_k+\beta_k)} \frac{2(t-\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k} \frac{\sin(m+\frac{1}{2})(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)} dt \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_{\frac{1}{2}(\alpha_k+\beta_k)}^{\beta_k} \frac{2(t-\beta_k)}{\alpha_k-\beta_k} (t-\beta_k) \frac{\sin(m+\frac{1}{2})(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)} dt \right) \right| \\
 (12) \quad &\leq \left| \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\nu} \left( \int_{\alpha_k}^{\frac{1}{2}(\alpha_k+\beta_k)} \frac{4(t-\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k} \frac{\sin(m+\frac{1}{2})(t-x)}{t-x} dt \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_{\frac{1}{2}(\alpha_k+\beta_k)}^{\beta_k} \frac{4(t-\beta_k)}{\beta_k-\alpha_k} \frac{\sin(m+\frac{1}{2})(t-x)}{t-x} dt \right) \right| \\
 &\quad + c_2 = \frac{1}{\pi} \left| \sum (T_k + T'_k) \right| + c_2.
 \end{aligned}$$

Für  $r \geq 1$

$$\begin{aligned}
 |T_{j-r}| &= \left| \int_{\alpha_{j-r}}^{\frac{1}{2}(\alpha_{j-r}+\beta_{j-r})} \frac{4(t-\alpha_{j-r})}{\beta_{j-r}-\alpha_{j-r}} \frac{\sin(m+\frac{1}{2})(t-x)}{t-x} dt \right| \\
 &< 4 \int_{\alpha_{j-r}}^{\frac{1}{2}(\alpha_{j-r}+\beta_{j-r})} \left| \frac{\sin(m+\frac{1}{2})(t-x)}{t-x} \right| dt.
 \end{aligned}$$

Da nach unserer Voraussetzung  $|t-x| \geq rd$

$$|T_{j-r}| < \frac{4}{rd} \int_{\alpha_{j-r}}^{\frac{1}{2}(\alpha_{j-r}+\beta_{j-r})} |\sin(m+\frac{1}{2})(t-x)| dt < \frac{2(\beta_{j-r}-\alpha_{j-r})}{r \cdot d} < \frac{2}{n_i} \cdot \frac{1}{r}.$$

Ebenso für  $r \geq 1$ , wegen  $|t-x| \geq \frac{1}{2}rd$

$$|T_{j+r}| < 4/n_i r,$$

ferner

$$|T'_{j-r}| < 2/n_i r, \quad |T'_{j+r}| < 4/n_i r.$$

Also

$$(13) \quad \sum_{\substack{1 \leq k \leq \nu \\ k \neq j}} (|T_k| + |T'_k|) < 2 \cdot \frac{4}{n_i} \log \nu < \frac{8 \log n_i}{n_i} < c_3.$$

Da

$$\begin{aligned}
 T_j &= \frac{4}{\beta_j - \alpha_j} \int_{\alpha_j}^{\frac{1}{2}(\alpha_j+\beta_j)} \frac{4(t-\alpha_j)}{\beta_j-\alpha_j} \frac{\sin(m+\frac{1}{2})(t-x)}{t-x} dt \\
 &= \int_{\alpha_j}^{\frac{1}{2}(\alpha_j+\beta_j)} \frac{4}{\beta_j-\alpha_j} \sin(m+\frac{1}{2})(t-x) dt \\
 &\quad + \frac{4(x-\alpha_j)}{\beta_j-\alpha_j} \int_{\alpha_j}^{\frac{1}{2}(\alpha_j+\beta_j)} \frac{\sin(m+\frac{1}{2})(t-x)}{t-x} dt,
 \end{aligned}$$

für  $|x - \alpha_j| \leq 4(\beta_j - \alpha_j)$

$$|T_j| \leq \frac{4}{\beta_j - \alpha_j} \int_{\alpha_j}^{\frac{1}{2}(\alpha_j + \beta_j)} |\sin(m + \frac{1}{2})(t - x)| dt$$

$$+ \frac{4(x - \alpha_j)}{\beta_j - \alpha_j} \left| \int_{\alpha_j}^{\frac{1}{2}(\alpha_j + \beta_j)} \frac{\sin(m + \frac{1}{2})(t - x)}{t - x} dt \right|$$

$$< 2 + 16 \left| \int_{\alpha_j}^{\frac{1}{2}(\alpha_j + \beta_j)} \frac{\sin(m + \frac{1}{2})(t - x)}{t - x} dt \right| < c_4,$$

und für  $|x - \alpha_j| > 4(\beta_j - \alpha_j)$  wegen  $|t - x| > 3(\beta_j - \alpha_j)$

$$|T_j| \leq 4 \int_{\alpha_j}^{\frac{1}{2}(\alpha_j + \beta_j)} \left| \frac{\sin(m + \frac{1}{2})(t - x)}{t - x} \right| dt$$

$$< \frac{4}{3(\beta_j - \alpha_j)} \int_{\alpha_j}^{\frac{1}{2}(\alpha_j + \beta_j)} |\sin(m + \frac{1}{2})(t - x)| dt < \frac{2}{3};$$

also  $|T_j| \leq \max(\frac{2}{3}, c_4) = c_5$ . Ebenso  $|T'_j| \leq c_6$ . Also mit Rücksicht auf (12) und (13)

$$|S_m[f_i(x)]| \leq \frac{1}{\pi} \left| \sum_{k=1}^r (T_k + T'_k) \right| + c_2 \leq \frac{1}{\pi} (c_3 + c_5 + c_6) + c_2 = c_1,$$

womit alles bewiesen ist.

MANCHESTER, ENGLAND  
UND  
BUDAPEST, HUNGARY.