BIZONYOS SZÁMTANI SOROK TŐRZSSZÁMAIRÓL

BÖLCSÉSZETDOKTORI ÉRTEKEZÉS

IRTA:

ERDŐS PÁL

SÁROSPATAK, 1934.

NYOMATOTT FISCHER LAJOS KÖNYVNYOMDAI MŰINTÉZETÉBEN

TARTALOM.

Bizonyos számtani sorok törzsszámairól.

BEVEZETÉS.

A számtani sorokra vonatkozó törzsszámtételből közvetlenül következik, hogy ha az első tag s a különbség relativ primszámok, a számtani sor ξ és 2ξ között tartalmaz primszámokat, ha ξ egy a számtani sor természetétől függő számnál nagyobb. Ennek a határnak számbeli értékére nézve a primszámtétel nem ad felvilágosítást. Természetesen a primszámtételt (itt mindig a számtani haladványokra vonatkozó primszámtételt értjük) megszigoríthatjuk úgy, hogy a kérdéses határ számára explicit kifejezést nyerjünk. A O-becsléseket explicit egyenlőtlenségekkel kell helyettesiteni, azonban az ide vonatkozó számítások egyrészt meglehetősen bonyolultak, másrészt tulságosan magas határokat adnak.

Breusch* az analitikai számelmélet módszereivel határozta meg a kérdéses határokat a $3n+1$, $3n+2$, $4n+1$ és $4n+3$ számtani sorokra. Pontos számszerű adatokat használt a megfelelő L-függvények zéro helyeinek számára és helyzetére vonatkozólag, hogy minél kisebb határokat kaphasson. Eredménye a következő: ha $\xi \geqq 10^6$ az illető számtani sorok mindig tartalmaznak primszámokat ξ és 2ξ között; a törzsszámtáblák felhasználásával ezt a határt 10^6-ról 7-re csökkentette.

Mivel elemi tételekről van szó, kívánatosnak látszik Breusch mélyebb segédeszközeinek elemi meggondolásokkal való helyettesítése. Azok a módszerek, amelyekkel a Tschebyschef tételét igazoltam,** hogy t. i. ξ és 2ξ között legalább egy primszám létezik, alkalmazhatók a kérdéses aritmetikai sorokra is, sőt ugyanezen módszerekkel más számtani sorokra is levezethetünk hasonló tételeket: ξ és 2ξ helyett néhol szűkebb, máshol tágabb határokat nyerünk.

A módszer alapgondolata abban áll, hogy konstruálunk egy olyan kifejezést, amely tartalmazza a kérdéses számtani soroknak az illető intervallumban fekvő összes primszámait, ellenben más primszámokból lehetőleg keveset tartalmaz. Ezen kifejezés megbecslése adja a keresett tételeket.

Az I. részben be fogjuk bizonyítani ezekre a kifejezésekre azokat a

---

* Breusch, Zur Verallgemeinerung des Bertrandschen Postulates, dass zwischen X und 2X stets Primzahlen liegen, Math. Zeitschrift 34 k. (1932) 505—526. old.

** P. Erdős, Beweis eines Satzes von Tschebyschef, Acta Litt. ac. Scient. Regiae Univ. Hungaricae Francisco-Josephinae V. (1930—32) 194—198 old.

segédtételeket, melyekre a későbbiekben szükségünk lesz. A II. részben alkalmazzuk őket bizonyos számtani sorok primszámaira. Hogy a módszer lényegét még élesebben kidomboríthassuk s hogy az ismétléseket elkerüljük, a felmerülő tételeket még akkor is általánosan fogalmazzuk, ha föltételeiket csak egynéhány számtani sor elégíti ki. Végül a III. részben a $6n+1$, $6n+5$, $4n+1$ és $4n+3$ számtani sorok példáin mutatjuk be, hogy mikép lehet numerikusan meghatározni a fellépő határokat. (Ezek a sorok lényegben megegyeznek Breuschéival; a $3n+1$ alakú primszámok tényleg azonosak a $6n+1$ alakúakkal; a $3n+2$ alakú primszámok pedig a 2 kivételével ugyanazok, mint a $6n+5$ alakúak.) A nyert határok ezeknél a soroknál sokkal alacsonyabbak, mint 10^6.

A számtani sorok első tagját mindig a-val, különbségét d-vel jelöljük. Általában latin betükkel pozitiv egész számokat jelölünk; a p (megfelelő indexekkel) primszámot jelent, a görög betük pozitiv számokat; kivételt csak a 3. segédtétel képez, ahol $k=0$ is lehet. A következőkben mindig $a<d$, $d\geqq 2$, $(a, d)=1$; ha valamely kongruenciánál nem adjuk meg a modulust, úgy ez mindig mod d értendő.

I. Segédtételek.

1. §. A bevezetésben említett kifejezéseket a következő alakú kifejezésekből építjük fel

$$(1)\qquad P_n(a, d)=\frac{\prod_{p\mid d} p^{\left[\frac{n}{p-1}\right]}\prod_{k=1}^{n}(a+kd)}{n!}$$

Mindenekelőtt egynéhány segédtételt bizonyítunk be a $P_n(a, d)$ alakú kifejezésekre.

Elsősorban kimutatjuk, hogy ha $(a, d)=1$, $P_n(a, d)$ egész szám. Legyen p egy tetszőleges primszám s tegyük fel, hogy (1)-nek a számlálója p-nek $u_p(n)$-dik hatványával, nevezője pedig ugyanezen primszám $v_p(n)$-dik hatványával osztható; ki kell mutatnunk, hogy $u_p(n)\geqq v_p(n)$.

Ismeretes, hogy

$$(2)\qquad v_p(n)=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots<\frac{n}{p}+\frac{n}{p^2}+\cdots=\frac{n}{p-1}$$

és mivel $v_p(n)$ egész szám, $v_p(n)\leqq\left[\frac{n}{p-1}\right]$, amivel állításunk $p\mid d$ esetére igazolva van. Ha azonban $p\nmid d$, akkor $u_p(n)$ nyilván annyi, mint az (1) számlálójában lévő második szorzat p-vel osztható tényezőinek száma plus ugyanezen kifejezés p^2, p^3,... stb.-vel osztható tényezők száma. Azonban

$$(3)\qquad a+kd\equiv 0(mod\, p^r)$$

kongruenciának a kérdéses $1\leqq k\leqq n$ intervallumban legalább $\left[\frac{n}{p^r}\right]$ megoldása van k-ra nézve és pedig azért, mert az illető intervallum ennyi teljes maradéksort tartalmaz modp^r és így ebben az esetben is

$$u_p(n)\leqq\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots=v_p(n).$$

Tekintettel a későbbi alkalmazásokra, megjegyezzük hogy,

$$(4) \qquad P'_n(a,\, d) = \frac{\prod\limits_{p \mid d} p^{\left[\frac{n-1}{p-1}\right]} \prod\limits_{k=1}^{n} (a + (k-1)d)}{n\,!}$$

szintén egész. A (2)-ben tényleg mindig az egyenlőtlenség érvényes, mivel az eltünő tagok helyébe, el nem tünő tagok kerültek és így

$$(p-1)v_p(n) < n\,;\; (p-1)v_p(n) \leqq n-1\,;\; v_p(n) \leqq \left[\frac{n-1}{p-1}\right]$$

úgy hogy $p \mid d$ primszámok a (4) számlálójában legalább is oly magas hatványon fordulnak elő, mint a nevezőben. A $p \nmid d$ primszámokra ellenben ugyanazon meggondolás érvényes, mint előbb, u. i. az a körülmény, hogy a (3) alatti kongruencia megoldásaira nézve az $1 \leqq k \leqq n$ intervallum helyett a $0 \leqq k \leqq n-1$ intervallum jön tekintetbe, nem okoz változást.

2. §. $P_n(a,\, d)$ nagyságrendjére nézve az

1. segédtétel ad felvilágosítást.

$$P_n(a,\, d) = \alpha^{n + o(n)},$$

ahol

$$\alpha = \alpha(d) = d \prod_{p \mid d} p^{\frac{1}{p-1}}$$

Bizonyítás:

$$\frac{n}{p-1} - \frac{p-2}{p-1} \leqq \left[\frac{n}{p-1}\right] \leqq \frac{n}{p-1}$$

miatt és mivel

$$kd \leqq a + kd \leqq (k+1)d$$

írhatjuk

$$(5) \qquad \prod_{p \mid d} p^{-\frac{p-2}{p-1}} \left(d \prod_{p \mid d} p^{\frac{1}{p-1}}\right)^n \leqq P_n(a,\, d) \leqq (n+1)\left(d \prod_{p \mid d} p^{\frac{1}{p-1}}\right)^n$$

ahol mindkét határ $\alpha^{n + o(n)}$ alakú.

3. §. A $P_n(a,\, d)$ számelméleti szerkezetére nézve két segédtételt bizonyítunk be. Az első durva megbecslését adja annak, hogy egy tetszőleges p primszám mennyivel járul hozzá a $P_n(a,\, d)$-hez, a második pedig a nagyobb primszámokra nézve nyújt finomabb becslést.

2. segédtétel. *Legyen $p^{w_p(n)}$ az a legmagasabb hatványa p-nek, amely foglaltatik $P_n(a,\, d)$-ben.*

Ekkor

$$p^{w_p(n)} \leqq (n+1)d.$$

Bizonyítás. $w_p(n) = u_p(n) - v_p(n)$; ha tehát a (3) alatti kongruencia $1 \leqq k \leqq n$ intervallumban érvényes megoldásainak száma $t_p(n)$, akkor $p \nmid d$ esetére

$$w_p(n) = \left\{t_p(n) - \left[\frac{n}{p}\right]\right\} + \left\{t_{p^2}(n) - \left[\frac{n}{p^2}\right]\right\} + \cdots$$

Ha r_0-t a $p^{r_0} \leqq a + nd < p^{r_0+1}$ egyenlőtlenségből határozzuk meg, akkor

$\left[\frac{n}{p^r}\right]=t_{p^r}(n)=0$, ha $r>r_0$. Továbbá, mivel $1\leqq k\leqq n$ intervallum mod p^r, $\left[\frac{n}{p^r}\right]$ teljes maradékrendszerből és az $\left[\frac{n}{p^r}\right]+1$ maradékrendszer egy darabjából áll, $t_{p^r}(n)\leqq\left[\frac{n}{p^r}\right]+1$, tehát $p\nmid d$ esetére $w_p(n)\leqq r_0$. Azonban ugyanez áll $p\mid d$ esetére is, mert ekkor

$$w_p(n)=\left[\frac{n}{p-1}\right]-v_p(n)\leqq\left\{\frac{n}{p}-\left[\frac{n}{p}\right]\right\}+\left\{\frac{n}{p^2}-\left[\frac{n}{p^2}\right]\right\}+\cdots+$$

$$+\left\{\frac{n}{p^{r_0}}-\left[\frac{n}{p^{r_0}}\right]\right\}+\frac{n}{p^{r_0+1}}+\frac{n}{p^{r_0+2}}+\cdots\leqq$$

$$\leqq r_0+\frac{n}{p^{r_0}}\frac{1}{p-1}<r_0+\frac{n}{a+nd}\frac{p}{p-1}\leqq r_0+\frac{2}{d}\leqq r_0+1,$$

tehát mindenesetre $p^{w_p(n)}\leqq p^{r_0}\leqq a+nd\leqq(n+1)d$.

A 2. segédtételből következik, hogy ha $p>\sqrt{(n+1)d}$, $P_n(a,d)$ nem lehet osztható p^2-tel; tehát vagy egyáltalában nem osztható p-vel, vagy pedig annak csak első hatványával osztható. A következő segédtétel dönti el, hogy $n\leqq d$ esetében, mikor érvényes az első és mikor a második lehetőség.

3. segédtétel. *Legyen* $n\geqq d$, $p>\sqrt{(n+1)d}$ $pb\equiv a$, $b<d$. *Ha* p *a*

$$\frac{a+nd}{b+kd}<p\leqq\frac{n}{k} \tag{6}$$

intervallumban foglaltatik, akkor $P_n(a,d)$ *nem osztható* p-vel, *ha azonban* p *a*

$$\frac{n}{k+1}<p<\frac{a+(n+1)d}{b+kd} \tag{7}$$

intervallumban foglaltatik, akkor $P_n(a,d)$ osztható p-vel; (de nem osztható p^2-tel).

Előzetes megjegyzések: Kivételesen előfordulhat, hogy $k=0$; ez esetben (6) helyett $p>\frac{a+nd}{b}$ érvényes. — Nem feltétlenül szükséges, hogy a (6) által definiált intervallum létezzék, u. i. lehetséges, hogy $\frac{a+nd}{b+kd}>\frac{n}{k}$. A (7) alatti intervallum mindenesetre létezik, mert

$$\frac{n}{k+1}=\frac{nd}{d+kd}<\frac{a+nd}{b+kd}<\frac{a+(n+1)d}{b+kd}. \tag{8}$$

Amennyiben mindkét intervallum létezik, ezek (8) miatt részben fedik egymást, azonban a közös részben

$$\frac{a+nd}{b+kd}<p<\frac{a+(n+1)d}{b+kd} \tag{9}$$

nem fordul elő oly p primszám, melyre nézve $pb\equiv a$ (sőt egyáltalában nem fordul elő ily alakú egész szám); ugyanis (9) alapján írhatnók, hogy

$$a+nd < p(b+kd) < a+(n+1)d,$$

ami ellentmondásban van $p(b+kd) \equiv pb \equiv a$-val.

A 3. segédtétel bizonyitása: Mivel $p^2 > (n+1)d > n$

$\left[\frac{n}{p^2}\right] = \left[\frac{n}{p^3}\right] = \cdots = 0$ és $t_{p^2}(n) = t_{p^3}(n) = \cdots = 0$ és így mivel $p > \sqrt{nd} \geqq d$ és $(p, d) = 1$, $w_p(n) = t_p(n) - \left[\frac{n}{p}\right]$.

A (6) esetében $k \leqq \frac{n}{p}$, tehát $k \leqq \left[\frac{n}{p}\right]$; továbbá mivel az $a + xd \equiv 0$ (mod p)-ből, azaz $a + xd = py$-ból

$$pb \equiv a \equiv py$$

és mivel $(p, d) = 1$, $y \equiv b$, továbbá mivel $p(b+kd) > a+nd$ és $y < b+kd$, azaz $t_p(n) \leqq k$, $w_p(n) = 0$.

A (7) esetében azonban $\frac{n}{p} < k+1$, tehát $\left[\frac{n}{p}\right] \leqq k$: továbbá mivel

$$p(b+kd) < a+(n+1)d \text{ és } p(b+kd) \equiv a, \; p(b+kd) \leqq a+nd$$

azonkívül mivel $pb \geqq p > d > a$ és $pb \equiv a$, $pb \geqq a+d$; eszerint a következő számok: $pb, p(b+d), \ldots, p(b+kd)$ mind $a+xd$ alakúak, ahol $1 \leqq x \leqq n$ s amellett mind oszthatók p-vel; tehát $t_p(n) \geqq k+1$ és így (mivel $w_p(n) \leqq 1$) $w_p(n) = 1$.

4. §. Legyenek $p_1, p_2, \ldots, p_h$ primszámok d-hez viszonylagos törzsszámok s nálánál kisebbek. Tegyük fel továbbá, hogy $q_1, q_2, \ldots, q_h$ számokat a következő feltételek határozzák meg: $p_l q_l \equiv a$, $q_l < d$. $(l = 1, 2, \ldots, h)$. Vizsgáljuk most a következő kifejezést

$$\Pi_n(a, d) = \frac{P_n(a, d)}{P_{\left[\frac{n}{p_1}\right]}(q_1, d) P_{\left[\frac{n}{p_2}\right]}(q_2, d) \ldots P_{\left[\frac{n}{p_h}\right]}(q_h, d)}.$$

A $\Pi_n(a, d)$ nagyságrendjére vonatkozólag az 1. segédtételből közvetlenül nyerjük a 4. segédtételt.

4. segédtétel.

$$\Pi_n(a, d) = \alpha^{(1-\sigma)n + o(n)}$$

ahol

$$\sigma = \sigma(d) = \sum_{\substack{p \nmid d \\ p < d}} \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_h}.$$

Bizonyítás:

$$\Pi_n(a, d) = \alpha^{n - \left[\frac{n}{p_1}\right] - \left[\frac{n}{p_2}\right] - \cdots - \left[\frac{n}{p_h}\right] + o(n)} =$$

$$= \alpha^{n - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - \cdots \frac{n}{p_h} + o(n)} =$$

$$= \alpha^{(1-\sigma)n + o(n)}.$$

Ebből következik, hogy $\prod_n(a, d)$, n-nel együtt minden határon túl növekszik, ha $\sigma < 1$. Módszereink csak ezen esetre alkalmazhatók. Az alábbi táblázat mutatja, hogy ez a feltétel teljesül: minden számra 6-ig, minden páros számra 30-ig s minden 6-tal osztható számra nézve $138 = 6 . 23$-ig.

d	$\sigma(d)$	d	$\sigma(d)$	d	$\sigma(d)$	d	$\sigma(d)$
2	0·000 000	15	0·610 689	36	0·732 364	90	0·759 175
3	0·500 000	16	0·844 023	42	0·640 924	96	0·959 175
4	0·333 333	18	0·569 513	48	0·828 313	102	0·920 561
5	0·833 333	20	0·755 478	50	0·961 647	108	0·998 439
6	0·200 000	21	0·979 287	54	0·847 181	114	0·963 832
8	0·676 190	22	0·864 569	60	0·664 130	120	0·816 463
9	0·842 857	24	0·665 623	66	0·789 615	126	0·873 606
10	0·476 190	26	0·922 033	72	0·909 534	132	0·941 062
12	0·433 766	28	0·856 099	78	0·846 309	138	0·995 792
14	0·701 166	30	0·500 105	84	0·805 081	210	0·772 844

5. §. A $\prod_n(a, d)$ kifejezésnek az $a + kd$ aritmetikai sor törzsszámaira nézve igen nagy jelentősége van. Ez a következő segédtételből világlik ki.

5. segédtétel. Legyen $n > d^2$; ekkor $\prod_n(a, d)$ egyetlen oly $p > \sqrt{(n+1)d}$ primszámmal sem osztható, melyre nézve nem áll fenn $p \equiv a$.

Előzetes megjegyzések. $\prod_n(a, d)$ kifejezés nem feltétlenül egész szám. Egy tört akkor osztható egy m egész számmal, ha rövidítés után a tört számlálója osztható m-mel. Továbbá egy tört akkor osztható pontosan m^r-nel, ha osztható m^r-nel, de már nem osztható m^{r+1}-gyel. Ha A és B egész számok pontosan m^r-nel illetve m^s-nel oszthatók, akkor az $\frac{A}{B}$ tört pontosan m^{r-s}-sel osztható, ha $r > s$, ha azonban $r \leq s$ akkor $\frac{A}{B}$ egyáltalában nem osztható m-mel. Ha már most minden p primszámhoz megállapítjuk az r_p kivetőt úgy hogy az $\frac{A}{B}$ tört pontosan p^{r_p}-vel legyen osztható, akkor $\frac{A}{B} \leq \prod_p p^{r_p}$; ugyanis $\prod_p p^{r_p}$ pontosan megegyezik a redukált alakban felirt $\frac{A}{B}$ tört számlálójával.

A 5. segédtétel bizonyítása. Legyen $p > \sqrt{(n+1)d}$ és $n > d$; akkor $p > d$, tehát $(p, d) = 1$. Ennek következtében a $pb \equiv a$ megoldható b-re nézve, úgy, hogy $b < d$ és $b \neq 1$, $(b, d) = 1$, ennek következtében b osztható egy p_l-lel $(l = 1, 2, \ldots, h)$. Tehát legyen $b = p_l c$; ahol természetesen $c < d$ és mivel $p_l q_l \equiv a \equiv pb = pp_l c$, $p_l c \equiv q_l$. Most k—t a következő egyenlőtlenségből határozzuk meg:

$$\frac{n}{(k+1)p_l} < p \leq \frac{n}{kp_l}$$

Ekkor $p > \frac{1}{k+1}\left[\frac{n}{p_l}\right]$. Ha

$$p < \frac{q_l + \left(\left[\frac{n}{p_l}\right] + 1\right)d}{c + kd} \text{ akkor}$$

a 3. segédtételből következik, hogy $P_{\left[\frac{n}{p_l}\right]}(q_l, d)$ osztható p-vel (ugyanis a segédtétel erre az esetre alkalmazható, mert $d \leqq \frac{n}{d} < \frac{n}{p_l}$, tehát $\left[\frac{n}{p_l}\right] \geqq d$ és $p > \sqrt{\left(\left[\frac{n}{p_l}\right] + 1\right)d}$; mivel $P_n(a, d)$ a 2. segédtétel értelmében nem osztható p^2-tel, a $\Pi_n(a, d)$ nem osztható p-vel. Ha

$$p \geqq \frac{q_l + \left(\left[\frac{n}{p_l}\right] + 1\right)d}{c + kd} > \frac{q_l + \frac{n}{p_l}d}{c + kd} = \frac{p_l q_l + nd}{cp_l + kp_l d}$$

akkor, mivel $p_l q_l \leqq a$, $cp_l = b$,

$$\frac{a + nd}{b + kp_l d} < p < \frac{n}{kp_l}$$

úgy hogy a 3. segédtétel értelmében, már $P_n(a, d)$ sem osztható p-vel.

II. Bizonyos számtani sorok primszámaira vonatkozó tételek.

6. §. Az 1. és 3. segédtételek alapján megbecsülhetjük az $a + kd$ alakú, ξ-nél kisebb primszámok szorzatát. Ezt a megbecslést, amely a továbbiakban is nagyon értékesnek fog bizonyulni, adja a következő tétel:

1. **Tétel.** *Ha* $\xi \to \infty$

$$\prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \leqq (\alpha(d))^{\frac{\xi}{d-1} + o(\xi)}$$

Bizonyítás. Legyen $a + nd \leqq \xi < a + (n + 1)d$; mivel $P_n(a, d)$ a 3. segédtétel értelmében osztható azokkal a primszámokkal, melyekre nézve $p \equiv a$ és $n < p < a + (n + 1)d$ és mivel azok a primszámok, melyekre nézve $p \equiv a$, $\frac{\xi}{d} < p \leqq \xi$, az $n \leqq \frac{\xi - a}{d} < \frac{\xi}{d}$ továbbá $\xi < a + (n + 1)d$ miatt ezen primszámok között előfordulnak, az 1. segédtétel értelmében, ha $n \to \infty$, ill. $\xi \to \infty$

$$\prod_{\substack{\frac{\xi}{d} < p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \leqq P_n(a, d) = \alpha^{n + o(n)} \leqq \alpha^{\frac{\xi}{d} + o(\xi)}$$

tehát, ha $\varepsilon < 0$ és $\xi \geqq \xi_0(\varepsilon)$,

$$\prod_{\substack{\frac{\xi}{d} < p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \leqq \alpha^{\frac{\xi}{d}(1 + \varepsilon)}$$

Ebből viszont következik, hogy ha $\xi \geqq \xi_0(\varepsilon)$ és r értékét $\frac{\xi}{d^{r+1}} < \xi_0(\varepsilon) \leqq \frac{\xi}{d^r}$-ből határozzuk meg

$$\prod_{\frac{\xi}{d^2} < p \leqq \frac{\xi}{d}} p \leqq \alpha^{\frac{\xi}{d^2}(1+\varepsilon)}$$

illletőleg

$$\prod_{\substack{\frac{\xi}{d^r+1} < p \leqq \frac{\xi}{d^r} \\ p \equiv a}} p \leqq \alpha^{\frac{\xi}{d^r+1}(1+\varepsilon)}$$

ennélfogva

$$\prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \leqq \prod_{\substack{p \leqq \xi_0(\varepsilon) \\ p \equiv a}} p \,.\, \alpha^{\left(\frac{\xi}{d} + \frac{\xi}{d^2} + \cdots + \frac{\xi}{d^r+1}\right)(1+\varepsilon)} \leqq$$

$$\leqq \prod_{\substack{p \leqq \xi_0(\varepsilon) \\ p \equiv a}} p \,.\, \alpha^{\frac{\xi}{d-1}(1+\varepsilon)}$$

és ez, ha $\xi \geqq \xi_1(\varepsilon)$, kisebb mint $\alpha^{\frac{\xi}{d-1}(1+\varepsilon)}$

Az 1. tételből a $\pi(\xi;\, a,\, d)$-re vagyis azon primszámok számára, amelyekre nézve $p \equiv a$, $p \leqq \xi$, fölírhatjuk a következő egyenlőtlenséget

$$\left(\frac{\xi}{\log^2\xi}\right)^{\pi(\xi;\, a,\, d) - \frac{\xi}{\log^2\xi}} \leqq \left(\frac{\xi}{\log^2\xi}\right)^{\pi(\xi;\, a,\, d) - \pi\left(\frac{\xi}{\log^2\xi};\, a,\, d\right)} \leqq$$

$$\leqq \prod_{\substack{\frac{\xi}{\log^2\xi} \leqq p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \leqq \prod_{\substack{p \leqq \xi \\ d \equiv a}} p \leqq \alpha^{\frac{\xi}{d} + o(\xi)}$$

tehát

$$\pi(\xi;\, a,\, d) \leqq \frac{\xi}{\log^2\xi} + \frac{\frac{\xi}{d}\log\alpha + o(\xi)}{\log\xi - 2\log\log\xi} = \frac{\log\alpha}{d}\frac{\xi}{\log\xi} + o\left(\frac{\xi}{\log\xi}\right)$$

és így amennyiben $\beta > \frac{\log\alpha}{d}$, elegendő nagy ξ-re

$$\pi(\xi;\, a,\, d) \leqq \beta\,\frac{\xi}{\log\xi}. \tag{10}$$

7. §. Ha $\sigma < 1$, akkor a 2., 4. és 5. segédtételből levezethetjük a 2. tételt

2. Tétel. *Ha* $\sigma < 1$, *akkor* $\xi \to \infty$ esetében

$$\prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \geqq (\alpha(d))^{\frac{1-\sigma}{d}\xi + o(\xi)}.$$

Előzetes megjegyzés. Ebből a tételből adódik a klasszikus Dirichlet-tétel speciális esete: *ha* $(a, d) = 1$ *és* $\sigma(d) < 1$, *akkor végtelen sok* $a + kd$ *alakú törzsszám van.* A 8-ik oldalon lévő táblázatból tehát megállapíthatjuk, hogy módszerünk megadja a Dirichlet tételt mindazon számtani sorokra, melyeknek különbsége kisebb, mint 29, csakhogy $d = 7, 11, 13, 25$ és 27 esetben a módszert $2d$-re, $d = 17, 19$ és 23 esetben pedig d helyett $6d$-re kell alkalmaznunk.

A 2. tétel bizonyítása. A 2. és 5. segédtételekből következik, hogy (v. ö. még az 5. segédtételhez tartozó előzetes megjegyzéssel) ha $n > d^2$

$$\Pi_n(a, d) \leqq \prod_{p \leqq \sqrt{(n+1)d}} (n+1)d \prod_{\substack{\sqrt{(n+1)d} < p \leqq a+nd \\ p \equiv a}} p \leqq \{(n+1)d\}^{\sqrt{(n+1)d}} \prod_{\substack{p \leqq a+nd \\ p \equiv a}} p =$$

$$= \alpha^{o(n)} \prod_{\substack{p \leqq a+nd \\ p \equiv a}} p$$

ha $n \to \infty$; tehát a 4. segédtétel értelmében,

$$\prod_{\substack{p \leqq a+nd \\ p \equiv a}} p \geqq \alpha^{(1-\sigma)n + o(n)}$$

Ha most az adott ξ-hez tartozó n-et az $a + nd \leqq \xi < a + (n+1)d$ egyenlőtlenségből határozzuk meg, akkor $\xi \to \infty$ esetre

$$\prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \geqq \alpha^{(1-\sigma)\left(\frac{\xi - a}{d} - 1\right) + o(\xi)} = \alpha^{\frac{1-\sigma}{d}\xi + o(\xi)}$$

A 2. tételből következik, hogy

$$\xi^{\pi(\xi;\, a,\, d)} \geqq \prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \geqq \alpha^{\frac{1-\sigma}{d}\xi + o(\xi)}$$

tehát

$$\pi(\xi;\, a,\, d) \geqq \frac{1-\sigma}{d} \log\alpha \frac{\xi}{\log\xi} + o(\xi)$$

amiből, ha $\gamma < \frac{1-\sigma}{d} \log\alpha$, elég nagy ξ-re következik

$$\pi(\xi;\, a,\, d) \geqq \gamma \frac{\xi}{\log\xi}.$$

8. §. Az 1. s 2. tétel kombinációjából adódik a

3. Tétel. *Ha* $\sigma < 1$, $\lambda > \frac{d}{d-1} \frac{1}{1-\sigma}$, *akkor* ξ-*nek elegendő nagy értékeire legalább egy* $p \equiv a$ *primszám létezik a* $\xi < p \leqq \lambda\xi$ *intervallumban.*

Bizonyítás. Elegendő nagy ξ érték mellett az 1. és a 2. tétel értelmében

$$\prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \leqq \alpha^{\frac{\xi}{d-1} + o(\xi)} < \alpha^{\frac{1-\sigma}{d}\lambda\xi + o(\xi)} \leqq \prod_{\substack{p \leqq \lambda\xi \\ p \equiv a}} p$$

Ezen tételnek közvetlen következménye a

4. Tétel. Ha $\sigma < \frac{d-2}{2(d-1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(d-1)}$, *akkor ξ-nek elegendő nagy értékeinél $\xi < p \leqq 2\xi$ intervallumban legalább egy $a + kd$ alakú primszám van.*

Bizonyítás. Ez esetben u. i. $\sigma < \frac{1}{2} < 1$ és $\frac{d}{d-1}\frac{1}{1-\sigma} < 2$ úgy hogy λ 2-nek választható.

Speciális esetek: $d = 6$ és $d = 12$; az első esetben $\sigma = \frac{1}{5}$, $\frac{d-2}{2(d-1)} = \frac{2}{5}$ a második esetben azonban $\sigma = 0{,}433766$ és ez kisebb mint $\frac{d-2}{2(d-1)} = \frac{5}{11} = 0{,}454545$. Tehát ξ-nek elegendő nagy értékei mellett a ξ és 2ξ között legalább egy $6k+1$, $6k+5$, $12k+1$, $12k+5$, $12k+7$, $12k+11$, továbbá $4k+1$ és $4k+3$ alakú primszám létezik.

Egyébként $d = 6$ esetre a 3. tétel az intervallumot még szűkíti, amennyiben megállapítja, hogy elegendő nagy ξ mellett a $\xi - \lambda\xi$ intervallumban legalább egy $6k+1$ és $6k+5$ alakú primszám létezik, ha $\lambda > 1{\cdot}5$.

9. §. A 4. tételt még élesebben fogalmazza meg az

5. Tétel. *Ha* $\sigma < \frac{1}{2} - \frac{d}{(d-1)(2d+1)} = \frac{2d^2 - 3d - 1}{2(d-1)(2d+)}$, *akkor ξ-nek elegendő nagy értékei mellett* ξ (exkl.) és 2ξ (inkl.) között legalább egy $a + kd$ alakú primszám létezik.

Bizonyítás. Vizsgáljuk a következő kifejezést

$$\Phi_n(a, d) = \frac{\Pi_{2n}(a, d)}{P_n(a, d)};$$

Az 1. és 4. segédtétel alapján $n \to \infty$ esetében

$$\Phi_n(a, d) = a^{(1-2\sigma)n + o(n)} \tag{11}$$

Ha $n > d^2$, akkor $\Phi_n(a, d)$ az 5. segédtétel értelmében egyetlenegy olyan primszámmal sem osztható, melyre nézve $p \not\equiv a$ és $p > \sqrt{(2n+1)d}$. A 3. segédtétel értelmében azok a primszámok, melyekre nézve $p \equiv a$, továbbá $n < p < a + (n+1)d$ és $p > \sqrt{(2n+1)d} > \sqrt{(n+1)d}$, osztói a nevezőnek, azaz $P_n(a, d)$-nek, tehát nem osztói a $\Phi_n(a, d)$-nek. Azok a primszámok, melyekre nézve $p \equiv a$ és $\frac{a+2nd}{1+2d}, < p \leqq n$, $p > \sqrt{(2n+1)d}$, ugyancsak a 3. segédtétel értelmében még a $\Pi_{2n}(a, d)$ kifejezésnek sem osztói. Tehát a 2. segédtétel és az 1. tétel értelmében $n \to \infty$ esetre nézve

$$\Phi_n(a, d) \leqq \prod_{p \leqq \sqrt{(2n+1)d}} (2n+1)d \prod_{\sqrt{(2n+1)d} < p \leqq \frac{a+2nd}{1+2d}} p \prod_{a+(n+1)d \leqq p \leqq a+2nd} p \leqq$$

$$\leqq \{(2n+1)d\}^{\sqrt{(2n+1)d}} \prod_{\substack{p \leqq \frac{a+2nd}{1+2d} \\ p \equiv a}} p \prod_{\substack{a+(n+1)d \leqq p \leqq a+2nd \\ p \equiv a}} p \leqq$$

$$\leqq \alpha^{\frac{a+2nd}{1+2d}\frac{1}{d-1}+o(n)} \prod_{\substack{a+(n+1)d \leqq p \leqq a+2nd \\ p \equiv a}} p =$$

$$= \alpha^{\frac{2d}{(d-1)(2d+1)}n+o(n)} \prod_{\substack{a+(n+1) \leqq p \leqq a+2nd \\ p \equiv a}} p$$

amiből a (11) alapján adódik

$$\prod_{\substack{a+(n+1)d \leqq p \leqq a+2nd \\ p \equiv a}} p \geqq \alpha^{\left(1-2\sigma-\frac{2d}{(d-1)(2d+1)}\right)n+o(n)}$$

Az n koefficiense a kitevőben a feltevés szerint pozitiv, tehát a baloldalon lévő szorzat elegendő nagy n mellett nem lehet üres. Eszerint elegendő nagy n mellet az $a+(n+1)d \leqq p \leqq a+2nd$ intervallumban mindenesetre van legalább egy primszám, melyre nézve $p \equiv a$; ez a primszám, ha n-t, elegendő nagy ξ mellett, az $a+nd \leqq \xi < a+(n+1)d$ egyenlőtlenségből határozzuk meg, az $a+2nd \leqq 2a+2nd \leqq 2\xi$ alapján a $\xi < p \leqq 2\xi$ intervallumban fekszik.

Az 5. tétel alapján közvetlenül elintézhetjük a $d=2$ és a $d=4$ eseteket; mert valóban $d=2$-nél $\frac{1}{2}-\frac{d}{(d-1)(2d+1)}=\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}>0=\sigma$ viszont $d=4$ esetében $\frac{1}{2}-\frac{d}{(d-1)(2d+1)}=\frac{1}{2}-\frac{4}{27}=\frac{19}{54}>\frac{1}{3}=\sigma$. A $d=10$ eset a $\frac{1}{2}-\frac{d}{(d-1)(2d+1)}=\frac{1}{2}-\frac{10}{189}=\frac{169}{378}<\frac{10}{21}=\sigma$ miatt az 5. tétellel még nincs elintézve.

10. §. Amennyiben $1+2d$ nem törzsszám, még élesebben fogalmazhatjuk az 5. tételt. Ekkor u. i. $d \geqq 3$, tehát $1+2d<d^2$, úgy hogy $1+2d$ osztható a $p_1, p_2, \ldots, p_h$ primszámok valamelyikével. Erre az esetre érvényes a

6. Tétel. *Ha* $l=1, 2, \ldots, h$ valamelyik értéke mellett $p_l \mid 1+2d$ és $\sigma<\frac{1}{2}-\frac{1}{p_l(d-1)}$, *akkor elegendő nagy* ξ mellett a ξ (excl.) és 2ξ (incl.) intervallumban legalább egy $p \equiv a$ primszám létezik.

Bizonyítás. Legyen $1+2d=p_l b$; $3d>1+2d=p_l b \geqq 3b$ miatt $b<d$; viszont $abp_l \equiv a \equiv p_l q_l$ miatt $q_l \equiv ab$. Tehát $n>d^2>d$ és $p>\sqrt{(2n+1)d}>\sqrt{\left(\left[\frac{2n}{p_l}\right]+1\right)d}$ esetben a 3. segédtétel értelmében $\Phi_n(a,d)$ egyetlen egy primszámmal sem osztható, melyre nézve $p \equiv a$ és $\left[\frac{2n}{p_l}\right]<p<\frac{q_l+\left(\left[\frac{2n}{p_l}\right]+1\right)d}{b}$; és így jelen esetben

$$\frac{q_l+\left(\left[\frac{2n}{p_l}\right]+1\right)d}{b}>\frac{q_l+\frac{2n}{p_l}d}{b}=\frac{p_lq_l+2nd}{bp_l}\geqq\frac{a+2nd}{1+2d}.$$

Az 5. tétel bizonyításánál alkalmazott meggondolásokból közvetlenül adódik, hogy $\Phi_n(a, d)$ egyetlen oly primszámmal sem osztható, melyre nézve $p\equiv a$ és $p>\frac{2n}{p_l}$, $p>\sqrt{(2n+1)d}$. Tehát a 2. segédtétel és az 1. tétel alapján $n\to\infty$ esetre

$$\Phi_n(a, d)\leqq\prod_{p\leqq\sqrt{(2n+1)d}}\{(2n+1)d\}\prod_{\substack{\sqrt{(2n+1)d}\leqq p\leqq\frac{2n}{p_l}\\ p\equiv a}}p\prod_{a+(n+1)d\leqq p\leqq a+2nd}p\leqq$$

$$\leqq a^{\frac{2n}{p_l(d-1)}+o(n)}\prod_{\substack{a+(n+1)d\leqq p\leqq a+2nd\\ p\equiv a}}p$$

Ebből és (11)-ből az $1-2\sigma>\frac{2}{p_l(d-1)}$ miatt kimondhatjuk, hogy az egyenlőtlenség jobboldalán álló szorzat nem lehet üres, amiből viszont a tétel ugyanúgy adódik, mint az 5. tétel esetén. $d=10$ esetében $1+2d=21$, tehát p_l-et 7-nek választhatjuk, (természetesen célszerű a p_l-t lehetőleg nagynak venni) ez esetben $\frac{1}{2}-\frac{1}{p_l(d-1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{63}=\frac{61}{126}>\frac{10}{21}=\sigma(10)$. Tehát elég nagy ξ-re nézve a $\xi<p\leqq2\xi$ intervallumban mindig van legalább egy $10k+1$, $10k+3$, $10k+7$ s $10k+9$ alakú primszám.

Hasonló módon szigoríthatjuk meg az 5. tételt arra az esetre nézve, ha $1+d$ nem prímszám. Egy további szigorítási lehetőség forog fenn $p_l\mid 1+2d$ esetében; ekkor arra a tényre támaszkodunk, hogy a $p\equiv a$ primszámok melyek a $\frac{a+2nd}{b+p_ld}<p\leqq\frac{2n}{p_l}$, $p>\sqrt{(2n+1)d}$ egyenlőtlenséget kielégítik szintén nem osztói a $\Phi_n(a, d)$-nek; az intervallumot, melynek $p\equiv a$ primszámai a $\Phi_n(a, d)$ kifejezésnek nem osztói, további feltevések segítségével még kiterjeszthetjük. Közvetlenül beláthatjuk azonban, hogy ily módon csak oly tételeket nyerhetünk, amelyek csak $\sigma<\frac{1}{2}$ esetekben alkalmazhatók; ugyanis ha $\sigma>\frac{1}{2}$ a $\Phi_n(a, d)$ kifejezés $n\to\infty$ esetére a 0-hoz tart. Egy későbbi cikkben szándékozunk az itt alkalmazott módszernek lényeges élesbbitését adni, úgy hogy olyan esetekben is lehessen alkalmazni, amelyeknél (mint pl. $d=8$ esetén) $\sigma(d)>\frac{1}{2}$.

III. A határok numerikus meghatározásáról.

11. §. Könnyű belátni, hogy az előbbiekben előforduló o-becslések mind helyettesíthetők explicit egyenlőtlenségekkel, e célból az 1. segédtétel helyébe az (5) explicit egyenlőtlenségeit tesszük. Ennek következtében a tételünkre vonatkozó korlátok meghatározására elvileg sehol sem okoz nehézséget.

Az 1. tétel bizonyítása a $\prod\limits_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p$ szorzat számára egy $\alpha^{\frac{\xi}{d-1}+o(\xi)}$ alakú felső korlátot ad. Azonban ez a korlát numerikus számítások elvégzésére nem igen alkalmas, mert tulságosan magas és így célszerű lesz az 1. tételt átalakítani, ill. „numerikus" alakra hozni:

7. Tétel. *Ha* $\xi \geqq 1$, akkor

$$\prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \leqq d\xi(\alpha(d))^{\frac{\xi}{d-1}} \tag{12}$$

Bizonyítás. Vizsgáljuk a (4) kifejezést, amely mint láttuk, mindig egész szám. Mivel

$$P'_n(a, d) \leqq \prod_{p \mid d} p^{\frac{n-1}{p-1}} \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} kd = d^n \Big(\prod_{p \mid d} p^{\frac{1}{p-1}} \Big)^{n-1}$$

és mivel $P'_n(a, d)$ minden $p \equiv a$ primszámmal, melyre $n < p < a + nd$ fennáll, osztható, érvényes a következő egyenlőtlenség

$$\prod_{\substack{n < p < a+nd \\ p \equiv a}} p \leqq d^n \delta^{n-1},$$

ahol $\delta = \delta(d) = \dfrac{1}{d}\alpha(d) = \prod\limits_{p \mid d} p^{\frac{1}{p-1}}$.

Ha most e képletben n helyébe sorba betesszük $n_1 = \left\{\dfrac{n}{d}\right\}$, $n_2 = \left\{\dfrac{n}{d^2}\right\}, \ldots, n_r = \left\{\dfrac{n}{d^r}\right\} = 1$ értékeket, ahol $d^{r-1} < n \leqq d^r$ és $\{\eta\}$ a legkisebb egész számot jelenti, mely $\geqq \eta$, akkor elvégezve az így előállott egyenlőtlenségek szorzását s tekintetbe véve az

$$a + n_{k+1}d \geqq 1 + n_{k+1}d \geqq 1 + \frac{n}{d^{k+1}}d = 1 + \frac{n}{d^k} > n_k \; (k = 0, 1, 2 \ldots, r; n_0 = n)$$

vonatkozásokat, nyerjük a következő egyenlőtlenséget

$$\prod_{\substack{p < a+nd \\ p \equiv a}} p \leqq d^{n+n_1+n_2+\cdots+n_r} \delta^{n+n_1+n_2+\cdots+n_r-r-1}$$

És mivel

$$n + n_1 + n_2 + \cdots + n_r \leqq n + \frac{n+d-1}{d} + \frac{n+d^2-1}{d^2} + \cdots + \frac{n+d^r-1}{d^r} =$$

$$= (n-1)\Big(1 + \frac{1}{d} + \frac{1}{d^2} + \cdots + \frac{1}{d^r}\Big) + (r+1) < \frac{(n-1)d}{d-1} + r + 1$$

írhatjuk

$$\prod_{\substack{p < a+nd \\ p \equiv a}} p \leqq d^{\frac{(n-1)d}{d-1}} d^{r+1} \delta^{\frac{(n-1)d}{d-1}} = a^{\frac{(n-1)d}{d-1}} d^{r-1} d^2 \leqq$$

$$\leqq a^{\frac{(n-1)d}{d-1}} (n-1) d^2 .$$

Legyen most $\xi \geqq a$ és határozzuk meg n-t az $a+(n-1)d \leqq \xi \leqq a+nd$ egyenlőtlenségből, akkor fennáll, hogy $(n-1)d < \xi$, tehát

$$\prod_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv a}} p \leqq d \xi a^{\frac{\xi}{d-1}} ;$$

azonban nyilvánvaló, hogy ez akkor is érvényes, ha $1 \leqq \xi < a$.

A d speciális numerikus értékeire (különösen ha $d=2$, 4, 6) a 7. tételt még pontosabban fejezhetnők ki, úgy hogy elegendő nagy ξ értékek mellett a (12) egyenlőtlenség bal oldalán még a ξ tényező se szerepeljen; azonban a mi céljainknak a 7. tétel fenti fogalmazása is elég pontos.

12. §. Ha meg akarjuk határozni azon ξ_0 korlátot, melytől fogva ξ és 2ξ között legalább egy $p \equiv a$ prímszám van, még a 4. tétel által elintézett esetekben is célszerű lesz az 5. és 6. tételek bizonyításánál felhasznált eljárást alkalmazni s lehetőleg kiterjeszteni azt az intervallumot, amely nem tartalmaz oly $p \equiv a$ prímszámot, amely egyúttal a $\Phi_n(a, d)$ osztója.

A korlátok meghatározásának módszerét a $d=6$ és $d=4$ esetekben fogjuk bemutatni. Itt nem az a célunk, hogy a korlátokat, lehetőleg leszorítsuk; további csökkentésüket elérhetjük egyrészt pontosabb becslés, másrészt a 7. tételnek a 11. §-ban említett szigorúbb fogalmazása és végül azáltal, hogy a kisprímszámoknak $\left(p \leqq \sqrt{6(2n+1)}\right.$ ill. $\left.p \leqq \sqrt{4(2n+1)}\right)$ a $\Phi_n(a, d)$-hez való járulékát a 7. tétel által lehetővé tett pontossággal határozzuk meg.

13. §. Itt a $d=6$ esetet vesszük tekintetbe, vagyis foglalkozunk a $6k+1$ és a $6k+5$ alakú prímszámokkal; az előbbieket jelöljük p'-vel, az utóbbiakat pedig p''-vel; legyen még rövidség okából $P'=P_n(1, 6)$ és $P''=P_n(5, 6)$ és

$$\Phi_n' = \frac{P_{2n}'}{P_n' \, P_{\left[\frac{2n}{5}\right]}''}, \qquad \Phi_n'' = \frac{P_{2n}''}{P_n'' \, P_{\left[\frac{2n}{5}\right]}'}$$

(Ezek a jelölések csak a 13. §-ban érvényesek.) Ekkor az (5) egyenlőtlenség szerint

$$\left.\begin{matrix} \Phi_n' \\ \Phi_n'' \end{matrix}\right\} \geqq 3^{-\frac{1}{2}} (n+1)^{-1} \left(\left[\frac{2n}{5}\right]+1\right)^{-1} \alpha^{2n-n-\left[\frac{2n}{5}\right]} \geqq$$

$$\geqq 3^{-\frac{1}{2}} (n+1)^{-1} \left(\frac{2n}{5}+1\right)^{-1} \alpha^{\frac{3}{5}n} \qquad \left(\alpha = 6 \,.\, 2 \,.\, 3^{1/2} = 2^2 \,.\, 3^{3/2}\right)$$

Legyen $n > 36$, akkor $\sqrt{6(2n+1)} < \sqrt{6 \cdot 3n} < 5\sqrt{n} < \frac{5}{6} n < \frac{12}{13} n$. Ha $n < p' < 6n+7$, akkor a 3. segédtétel értelmében $p' | P'_n$; ha $\frac{12n+1}{13} < p' \leq n$, akkor ugyanazon segédtétel értelmében $p' \dagger P'_{2n}$; tehát Φ'_n nem osztható azokkal a primszámokkal, melyekre nézve $\frac{12}{13}(n+1) < p' < 6n+7$. Hasonló módon belátható, hogy Φ''_n nem osztható azokkal a törzsszámokkal, amelyekre nézve $\frac{12}{13}(n+1) < p' < 6n+11$. Tehát a 2. és 5. segédtétel értelmében

$$\Phi'_n \leq \prod_{p \leq \sqrt{6(2n+1)}} 6(2n+1) \prod_{p' \leq \frac{12}{13}(n+1)} p' \prod_{6n+7 \leq p' \leq 12n+1} p'$$

$$\Phi''_n \leq \prod_{p \leq \sqrt{6(2n+1)}} 6(2n+1) \prod_{p'' \leq \frac{12}{13}(n+1)} p'' \prod_{6n+11 \leq p'' \leq 12n+5} p''$$

azonban

$$\prod_{p \leq \sqrt{6(2n+1)}} 6(2n+1) \leq (12n+6)^{\pi\sqrt{12n+6}} \text{*}$$

és a 7. tétel értelmében

$$\left.\begin{array}{l} \prod\limits_{p' \leq \frac{12}{13}(n+1)} p' \\ \prod\limits_{p'' \leq \frac{12}{13}(n+1)} p'' \end{array}\right\} \leq \frac{72}{13}(n+1)\alpha^{\frac{12}{65}(n+1)} \leq 6(n+1)\alpha^{\frac{12}{65}(n+1)}$$

úgy hogy

$$\left.\begin{array}{l} \prod\limits_{6n+7 \leq p' \leq 12n+1} p' \\ \prod\limits_{6n+11 \leq p'' \leq 12n+5} p'' \end{array}\right\} \geq \alpha^{\frac{27n-12}{65}} 6^{-1} 3^{-\frac{1}{2}} (n+1)^{-2} \left(\frac{2}{5} n + 1\right)^{-1} (12n+6)^{-\pi\sqrt{12n+6}} =$$

$$= 10\alpha^{\frac{27n-77}{65}} (n+1)^{-2} (2n+5)^{-1} (12n+6)^{-\pi\sqrt{12n+6}}$$

Ha tehát a

$$\prod_{6n+7 \leq p' \leq 12n+1} p' \quad \text{és} \quad \prod_{6n+11 \leq p'' \leq 12n+5} p''$$

szorzatok valamelyike üres, akkor

$$\alpha^{\frac{27n-77}{65}} \leq \frac{1}{10}(n+1)^2(2n+5)(12n+6)^{\pi\sqrt{12n+6}} < (12n+6)^{3+\pi\sqrt{12n+6}}$$

ha tehát $n \geq 90$, a $\frac{27n-77}{65} \geq \frac{26n+13}{65} = \frac{2n+1}{5}$ miatt

$$\alpha^{\frac{2n+1}{5}} \leq (12n+6)^{3+\pi\sqrt{12n+6}}$$

* $\pi(n)$ jelenti a primszámok számát n-ig.

azaz mivel $\alpha = 2^2 . 3^{3/2} > 2^4$,

(13) $$2^{8n+4} < (12n+6)^{15 + 5\pi\sqrt{12n+6}}$$

Azonban, ha $m > 66$, $\pi(m) < \frac{m}{3} - 3$. Tehát, ha $\sqrt{12n+6} > 66$, $n > 400$, miután azonban $1 + x \leqq 2^x$ és így

$$(12n+6)^{15+5\pi\sqrt{12n+6}} < (12n+6)^{5/3\sqrt{12n+6}} =$$

$$= (\sqrt[6]{12n+6})^{10\sqrt{12n+6}} < (1 + [\sqrt[6]{12n+6}])^{10\sqrt{12n+6}} \leqq 2^{10\sqrt{12n+6}[\sqrt[6]{12n+6}]} \leqq$$

$$\leqq 2^{10(12n+6)^{2/3}},$$

a (13) következményeképp tehát fölírhatjuk:

$$\frac{2}{3}(12n+6) < 10(12n+6)^{2/3}, \quad (12n+6)^{1/3} < 15$$

ami $n > 400$ esetén nem áll. Tehát, ha $n > 400$, van egy p' törzsszám, melyre nézve $6n + 7 \leqq p' \leqq 12n + 1$ és egy p'' törzsszám, melyre nézve $6n + 11 \leqq p'' \leqq 12n + 5$. Ezek a primszámok a $\xi < p \leqq 2\xi$ intervallumban fekszenek, ha az n-t a ξ-hez a $6n + 1 \leqq \xi < 6n + 7$ ill. a $6n + 5 \leqq \xi < 6n + 11$ egyenlőtlenségekből határozzuk meg. $\xi \geqq 2500$-ra nézve mindkét esetben $n \geqq 400$ és így eljutunk a

8. Tétel-hez. *Ha* $\xi \geqq 2500$ *akkor* ξ (excl.) *és* 2ξ (incl.) *között mindig van* $6k + 1$ és $6k + 5$ alakú primszám.

14. §. Itt a $d = 4$ esetre határozzuk meg a korlátokat, tehát a $4k + 1$ és $4k + 3$ alakú primszámokról lesz szó, melyeket most p' ill. p''-vel jelölünk; legyen továbbá rövidség kedvéért:

$$P'_n = P_n(1, 4), \quad P''_n = P_n(3, 4) \quad \text{és}$$

$$\Phi'_n = \frac{P'_{2n}}{P'_n \, P''_{\left[\frac{2n}{3}\right]}}, \qquad \Phi''_n = \frac{P''_{2n}}{P''_n \, P'_{\left[\frac{2n}{3}\right]}}$$

itt $\alpha = 4 . 2 = 8$ és így az (5) alatti egyenlőtlenség alapján

$$\left.\begin{matrix}\Phi'_n \\ \Phi''_n\end{matrix}\right\} \geqq (n+1)^{-1}\left(\left[\frac{2n}{3}\right]+1\right)^{-1} 8^{2n - n - \left[\frac{2n}{3}\right]} \geqq 3(n+1)^{-1} \; (2n+3)^{-1} \; 8^{n/3} =$$

$$= 3(n+1)^{-1} \; (2n+3)^{-1} \; 2^n.$$

Legyen $n \geqq 81$, akkor $2\sqrt{2n+1} < 4\sqrt{n} < \frac{4n}{9} < \frac{8n}{17}$. A 2. segédtételből következik, hogy ha $n < p' < 4n + 5$, $p' \mid P'_n$; ha $\frac{8n+1}{9} < p' \leqq n$, $p' \nmid P'_{2n}$;

ha $\left[\frac{2n}{3}\right] < p' < \frac{8n+1}{9}$ $\left(\text{mivel } \frac{8n+1}{9} \leqq \frac{3 + 4\left(\left[\frac{2n}{3}\right]+1\right)}{3}\right)$ $p' \mid P''$;

ha $\frac{n}{2} < p' < \left[\frac{2n}{3}\right]$ $\left(\text{mivel } \left[\frac{2n}{3}\right] \leqq \frac{2n}{3} < \frac{1+4(n+1)}{5}\right)$ $p' \mid P_n$ és végül ha $\frac{8n+1}{17} < p' \leqq \frac{n}{2}$ $p' \nmid P'_n$. Igy tehát Φ'_n nem osztható p'-vel, ha $\frac{8n+1}{17} < p' < 4n+5$; hasonló módon látható, hogy Φ''_n nem osztható p''-vel ha $\frac{8n+3}{17} < p'' < 4n+7$. Eszerint, a 2. s 5. segédtétel értelmében mindenesetre

$$\Phi'_n \leqq \prod_{p \leqq \sqrt{4(2n+1)}} 4(2n+1) \prod_{p' \leqq \frac{8}{17}(n+1)} p' \prod_{4n+5 \leqq p' \leqq 8n+1} p'$$

$$\Phi''_n \leqq \prod_{p \leqq \sqrt{4(2n+1)}} 4(2n+1) \prod_{p'' \leqq \frac{8}{17}(n+1)} p'' \prod_{4n+7 \leqq p'' \leqq 8n+3} p''$$

Azonban itt

$$\prod_{p \leqq \sqrt{4(2n+1)}} 4(2n+1) \leqq (8n+4)^{\pi\sqrt{8n+4}}$$

és a 7. tétel értelmében

$$\left.\begin{array}{l} \prod\limits_{p' \leqq \frac{8}{17}(n+1)} p' \\ \prod\limits_{p'' \leqq \frac{8}{17}(n+1)} p'' \end{array}\right\} \leqq \frac{32}{17}(n+1)2^{\frac{8}{17}(n+1)} < (n+1)2^{\frac{8n+25}{17}}$$

tehát

$$\left.\begin{array}{l} \prod\limits_{4n+5 \leqq p' \leqq 8n+1} p' \\ \prod\limits_{4n+7 \leqq p'' \leqq 8n+3} p'' \end{array}\right\} \geqq 2^{\frac{9n-25}{17}} . 3(n+1)^{-2}(2n+3)^{-1}(8n+4)^{-\pi\sqrt{8n+4}}$$

Ha tehát a $\prod\limits_{4n+5 \leqq p' \leqq 8n+1} p'$ és $\prod\limits_{4n+7 \leqq p' \leqq 8n+3} p''$ szorzatok valamelyike üres, akkor

$$2^{\frac{9n-25}{17}} \leqq \frac{1}{3}(n+1)^2(2n+3)(8n+4)^{\pi\sqrt{8n+4}} = (n+1)^2\left(\frac{2}{3}n+1\right)(8n+4)^{\pi\sqrt{8n+4}} <$$

$$< (n+1)^3(8n+4)^{\pi\sqrt{8n+4}} < (2n+1)^3(8n+4)^{\pi\sqrt{8n+4}} = 2^{-6}(8n+4)^{3+\pi\sqrt{8n+4}}$$

azaz

$$2^{\frac{9n+77}{17}} < (8n+4)^{3+\pi\sqrt{8n+4}} \tag{14}$$

tehát, ha $n > 4$, akkor

$$2^{\frac{9n}{17}} < (9n)^{3+\pi\sqrt{9n}} .$$

Mivel $m > 66$ esetén $\pi(m) < \frac{m}{3} - 3$; $3\sqrt{n} > 66$, $n > 484$-re

áll $$2^{\frac{9n}{17}} < 9n^{\sqrt{n}}$$

Továbbá
$$2^x > 1 + 2x\text{-ből (ha } x > 3)$$
$$2^{6\sqrt[6]{n}} > 9n, \text{ ha } n > 729$$

tehát
$$2^{\frac{9n}{17}} < 2^{6n^{2/3}}$$

és így
$$9n < 102n^{2/3}.$$

Azonban, ha $n > \left(\frac{102}{9}\right)^3$, ez az eredmény nyilvánvalóan helytelen, tehát még inkább helytelen, ha $n > 1500$.

Ha $n > 1500$, akkor van egy p' ill. p'' primszám, melyekre nézve
$$4n+5 \leqq p' \leqq 8n+1, \quad 4n+7 \leqq p'' \leqq 8n+3.$$

Amennyiben az adott ξ hez az n-t a $4n+1 \leqq \xi < 4n+5$ ill. $4n+3 \leqq \xi < 4n+7$ egyenlőtlenségekből határozzuk meg, úgy p' és p'' a $\xi < p \leqq 2\xi$ intervallumba esnek, ha $\xi \geqq 6007$, akkor mindkét esetben $n > 1500$, tehát bebizonyítottuk a következő tételt:

9. Tétel. Minden $\xi \geqq 6007$-re nézve van $4k+1$ és $4k+3$ alakú primszám a $\xi < p \leqq 2\xi$ intervallumban.

15. §. A törzsszámtáblázatok segítségével könnyen meghatározhatjuk ξ-re nézve a pontos alsó határokat, amelyektől fogva ξ (excl.) és 2ξ (incl.) között létezik a kívánt alakú törzsszám. Azt találjuk, hogy a $6k+1$ alakú törzsszámokra nézve ez a határ 3·5, a $6k+5$ alakúakra nézve 2·5, a $4k+1$ alakúakra 6·5 és végül a $4k+3$ alakúakra 3·5.

Az elemi számelmélet egy ismeretes tétele alapján az utolsó megállapítás következményeképen be lehet bizonyítani, hogy 1! 2! és 6!-on kívül egyetlen faktoriális sem bontható fel két négyzetszám összegére.

E dolgozat szószerinti fordítása a Matematische Zeitschrifthez 1932. szeptemberében beküldött cikkemnek. Giovanni Ricci, pisai tanár 1933. decemberében megjelent dolgozatának (Sul teorema di Dirichlet relativo alla progressione aritmetica, Bollettino dell' Unione Matematica Italiana 12, 304—309. l.) módszere hasonló az enyémhez.