KATONA GYULA

SPERNER TIPUSU TÉTELEK

Egyetemi doktori disszertáció

Budapest, 1968

TARTALOMJEGYZÉK

1.§. Bevezetés	1. o.
2.§. Jelölések	1. o.
3.§. A Sperner-tétel eredeti bizonyitása	3. o.
4.§. Lubell bizonyitása	6. o.
5.§. Egy Erdős-tétel bizonyitása Lubell módszerével	7. o.
6.§. A Sperner-tétel egy élesitése	10.o.
7.§. Sperner lemmájának élesitése	15. o.
8.§. Egy Erdős-probléma megoldása	33. o.
Irodalom	45. o.

1.§. Bevezetés

Sperner [1] 1928-ban publikálta az ugynevezett Sperner-tételt, amely a kombinatorika egy uj ágának fejlődését inditotta el. E dolgozatban először ismertetjük Sperner eredeti bizonyitását, amely egy egyszerü lemmán alapszik. Utána egy Lubell-től [2] származó ujabb keletü, igen egyszerü bizonyitás következik, majd Sperner tételének egy Erdős-féle általánositása [3]. Közöljük a Sperner-tétel egy érdekes élesitését is [4], [5], végül Sperner eredeti bizonyitásában szereplő lemma becslését élesitjük pontossá [6], aminek jó alkalmazási lehetőségei vannak ilyen tipusu tételek teljes indukciós bizonyitásánál. Utóbbi alkalmazására példát is mutatunk [6].

2.§. Jelölések

A dolgozatban általában egy véges X halmaz részhalmazaival fogunk foglalkozni:

$$X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \qquad (1\leq n).$$

X részhalmazait nagy, elemeit mindig kis latin betükkel fogjuk jelölni. A részhalmazok egy rendszerének jelölésére az irott nagybetük fognak szolgálni:

$$\mathcal{A}=\{A_1, A_2, \dots A_m\} \qquad (A_i \neq A_j, \text{ ha } i\neq j).$$

X összes részhalmazainak rendszerét $\mathcal{S}$ -sel jelöljük.

Ha A X-nek egy részhalmaza, $|A|$ jelöli elemeinek számát. Ugyanigy, ha $\mathcal{A}=\{A_1,\dots,A_m\}$, akkor $|\mathcal{A}|=m$.

Ha $\mathcal{A}$ X részhalmazainak egy rendszere, jeloljük $\mathcal{A}_k$ -val azon $\mathcal{A}$ -ban lévő részhalmazok rendszerét, amelyek elemszáma éppen k :

$$\mathcal{A}_k=\{A: A\in\mathcal{A},\ |A|=k\} \qquad (0\le k\le n).$$

$\mathcal{A}(a)$ -val fogjuk jelölni azt a részhalmazrendszert, amely $\mathcal{A}$ -nak a -t tartalmazó részhalmazaiból áll:

$$\mathcal{A}(a)=\{A: A\in\mathcal{A},\ a\in A\}$$

Ha $\mathcal{A}$ minden eleme pontosan k elemből áll, akkor $c(\mathcal{A})$ -t a következőképpen definiáljuk:

$$c(\mathcal{A})=\{B: |B|=k-1,\ \exists A\,(B\subset A\in\mathcal{A})\}.$$

$\mathcal{A}$ -nak azt a tulajdonságát, hogy semelyik két különböző részhalmaza sem tartalmazza egymást ($A_i\not\supset A_j$, ha $i\ne j$) a következőképpen fogjuk jelölni:

$$\mathcal{A}\in SP,$$

és az ilyen $\mathcal{A}$ -kat Sperner rendszereknek fogjuk nevezni.

Végül láncnak fogjuk nevezni az X részhalmazainak egy olyan $\mathcal{L}=\{L_1,L_2,\dots,L_h\}$ rendszerét, melyre $L_1\subset L_2\subset\dots\subset L_h$ teljesül. $|\mathcal{L}|=h$ -t a lánc hosszának nevezzük.

3.§. A Sperner-tétel eredeti bizonyitása [1]

3.1. Tétel (Sperner). Ha X egy n elemü véges halmaz, $\mathcal{A}$ az ő különböző részhalmazainak egy olyan rendszere, hogy $\mathcal{A} \in SP$, akkor

(3.1) $$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

A bizonyitáshoz a következő lemmát fogjuk használni:

3.1. Lemma. Legyen $\mathcal{A}$ az n elemü X részhalmazainak egy olyan rendszere, hogy minden elemének pontosan k eleme legyen $(0 \leq k \leq n)$. Ekkor

(3.2) $$|c(\mathcal{A})| \geq \frac{|\mathcal{A}|\,k}{n-k+1}$$

A lemma bizonyitása. Tekintsük az olyan (A, B) párok számát, ahol $A \in \mathcal{A}$, $B \in c(\mathcal{A})$ és $A \supset B$. Ez a szám triviálisan $|\mathcal{A}|\,k$. Másrészt azonban, minden B halmazhoz legfeljebb $n-k+1$ olyan A található, amelynek ő része. Igy

$$|c(\mathcal{A})|(n-k+1) \geq |\mathcal{A}|\,k,$$

ami ekvivalens (3.2)-vel.

A tétel bizonyitása. Jelöljük v-vel $\mathcal{A}$ legnagyobb halmazának elemszámát; tehát $|\mathcal{A}_v| > 0$, de $|\mathcal{A}_{v+1}| = \ldots = |\mathcal{A}_n| = 0$. Tegyük fel, hogy $v > \left[\frac{n}{2}\right]$. Be fogjuk látni, hogy

(3.3) $(\mathcal{A}-\mathcal{A}_v)\cup c(\mathcal{A}_v)\in SP.$

Valóban, az $\mathcal{A}-\mathcal{A}_v$ -ben szereplő részhalmazok nem tartalmazhatják egymást, ugyanigy a $c(\mathcal{A}_v)$ -ben szereplők sem, hiszen egyforma az elemszámuk és különbözők. Továbbá, egy $\mathcal{A}-\mathcal{A}_v$ -beli nem tartalmazhat $c(\mathcal{A}_v)$ -belit, mert minden $\mathcal{A}-\mathcal{A}_v$ -beli halmaz elemszáma legfeljebb $v-1$. Végül, ha egy $B\in c(\mathcal{A}_v)$ tartalmazna egy $C\in\mathcal{A}-\mathcal{A}_v$ halmazt, akkor $c(\mathcal{A}_v)$ definiciója miatt lenne egy olyan A , melyre $B\subset A$, $A\in\mathcal{A}$ s igy $C\subset B\subset A$ fennállna, ami ellentmondásban van $\mathcal{A}\in SP$ -vel.

Mivel $v>\left[\frac{n}{2}\right]$, igy $\frac{v}{n-v+1}>1$, kivéve, ha n páratlan, és $v=\frac{n+1}{2}$. Tehát a lemmát használva:

(3.4) $|(\mathcal{A}-\mathcal{A}_v)\cup c(\mathcal{A}_v)|>|\mathcal{A}|$, ha $v>\frac{n+1}{2}$

és

(3.5) $|(\mathcal{A}-\mathcal{A}_v)\cup c(\mathcal{A}_v)|\geq|\mathcal{A}|$, ha $v=\frac{n+1}{2}$.

Tekintsük most egyelőre a páros n esetét. Az eddig elmondottakból következik, hogy az extremális $\mathcal{A}$ nem tartalmazhat $\frac{n}{2}$ -nél több elemü részhalmazt. Definiáljuk $\mathcal{A}^*$ -ot a következőképpen:

$$\mathcal{A}^*=\{A^*:\ A^*=X-A,\ A\in\mathcal{A}\}.$$

A definicióból látható, hogy $\mathcal{A}^* \in SP$ és $|\mathcal{A}^*| = |\mathcal{A}|$. Igy ha $\mathcal{A}$ extremális, akkor $\mathcal{A}^*$ is, tehát $\mathcal{A}^*$ sem tartalmazhat $\frac{n}{2}$ -nél több elemü részhalmazt. Ez $\mathcal{A}$ -ra nézve azt jelenti viszont, hogy nem tartalmazhat $\frac{n}{2}$ -nél kevesebb elemü részhalmazt. Összefoglalva: ha $\mathcal{A}$ extremális, akkor csupa $\frac{n}{2}$ elemü részhalmazból állhat. Az ilyen rendszerek közül természetesen az az extremális, amely tartalmazza az összes $\frac{n}{2}$ elemü halmazt. Ezek száma $\binom{n}{\frac{n}{2}}$, tehát (3.1)-et páros n esetere igazoltuk. Sőt, azt is láthattuk, hogy az egyetlen extremális rendszer $\mathcal{S}_{\frac{n}{2}}$.

Páratlan n esetére a fenti gondolatmenetből (3.4) alkalmazásával csak az jön ki, hogy az extremális rendszer csupa $\frac{n+1}{2}$ és $\frac{n-1}{2}$ elemü halmazokból állhat. Ha $\mathcal{A}$ egy ilyen tulajdonságu rendszer, (3.5) alkalmazásával azt nyerjük, hogy mindig van egy olyan rendszer is, amely csupa $\frac{n-1}{2}$ elemü halmazból áll már, de legalább annyi részhalmazból áll, mint ő. Ezzel ebben az esetben is igazoltuk (3.1)-et, azonban nem határoztuk meg az extremális rendszereket.

Az extremális rendszerek - mint sejthető - $\mathcal{S}_{\frac{n-1}{2}}$ és $\mathcal{S}_{\frac{n+1}{2}}$. Ez ugy lenne bizonyitható, ha kimutatnánk, hogy (3.5)-ben is csak akkor lehetne egyenlőség, ha $|\mathcal{A}_{\frac{n+1}{2}}| = 0$ vagy $|\mathcal{A}_{\frac{n+1}{2}}| = \binom{n}{\frac{n+1}{2}}$, tehát a lemmát kellene élesiteni ilymódon a $v = \frac{n+1}{2}$ esetre. Ezt a lényegében egyszerü, de fáradságos diszkussziót itt elhagyjuk, mivel a 7.§-ban kimondott 7.1. tételnek egyszerü speciális esete.

4.§. Lubell bizonyitása [2]

Ez a paragrafus igen rövid lesz a Lubell-féle bizonyitás egyszerüsége miatt.

Nevezzük teljes láncnak az n elemü X különböző részhalmazainak egy olyan $\mathcal{T}$ rendszerét, amelynek elemei páronként tartalmazzák egymást és pontosan $n+1$ részhalmazt tartalmaznak:

$$\mathcal{T}=\{T_0, T_1, \ldots, T_n\}, \quad T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \ldots \subset T_n, \quad |T_k|=k.$$

Vegyünk egy $\mathcal{A}=\{A_1, \ldots, A_m\} \in SP$ rendszert. A lánc definiciójából következik, hogy egy lánc nem tartalmazhat két különböző halmazt $\mathcal{A}$ -ból, hiszen ebből következne $A_i \supset A_j$ $(i \neq j)$, ellentmondással. Igy a következő egyenlőtlenség áll fenn:

(4.1) $$\sum_{i=1}^{m} (\mathcal{A}_i \text{ -t tartalmazó teljes láncok száma}) \leq \text{(összes teljes láncok száma)}.$$

A fenti mennyiségek azonban könnyen kiszámithatók. Az összes láncok száma ugyanis $n!$, az $\mathcal{A}_i$ -t tartalmazó láncok száma viszont $|A_i|!\,(n-|A_i|)!$. Beirva (4.1)-be:

(4.1') $$\sum_{i=1}^{m} |A_i|!\,(n-|A_i|)! \leq n!,$$

vagy

(4.2) $$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \leq 1,$$

ahonnan $\binom{n}{|A_i|} \leq \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ alkalmazásával következik

$$\frac{m}{\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}} \leq 1,$$

azaz (3.1).

(4.2)-ből kiolvasható a Sperner-tételnél egy kicsit általánosabb tétel is:

4.1. Tétel. Legyen X egy n elemü véges halmaz, $\mathcal{A}$ az ő részhalmazainak egy olyan rendszere, hogy $\mathcal{A} \in SP$, akkor

$$(4.2)' \qquad \sum_{i=0}^{n} c_i \leq 1,$$

ahol $c_i = \dfrac{|\mathcal{A}_i|}{\binom{n}{i}}$.

5.§. Egy Erdős-tétel bizonyitása Lubell módszerével

Egy igen természetes általánositása a Sperner-rendszerek fogalmának a legfeljebb h hosszuságu láncot tartalmazó rendszerek fogalma. A továbbiakban tehát $\mathcal{A} \in SP_h$ -val $(1 \leq h \leq n+1)$ fogjuk jelölni azt, hogy az $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ rendszer rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy nincs benne $h+1$ különböző $A_{i_1}, \ldots, A_{i_{h+1}}$ halmaz, melyre teljesülne $A_{i_1} \supset \ldots \supset A_{i_{h+1}}$.

5.1. Tétel. Ha X egy n elemü véges halmaz, $\mathcal{A}$ az ő különböző részhalmazainak egy olyan rendszere, hogy $\mathcal{A} \in SP_h$ akkor

(5.1) $$|\mathcal{A}| \leq x_1^n + x_2^n + \ldots + x_h^n,$$

ahol $x_1^n \geq x_2^n \geq x_3^n \geq \ldots \geq x_h^n \geq \ldots \geq x_{n+1}^n$ az $\binom{n}{i}$ $(0 \leq i \leq n)$ binomiális együtthatókat jelentik nagyság szerinti rendezésben.

Bizonyitás. Legyen $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$. Vegyünk egy $\mathcal{T}$ tetszőleges láncot. $\mathcal{T}$ nem tartalmazhat $A_1, A_2, \ldots, A_m$ -ek közül $h+1$ -et, mert ekkor - feltevésünkkel ellentétben - $\mathcal{A}$ -ban volna $h+1$ hosszuságu lánc. Ekkor fennáll a következő egyenlőtlenség

(5.2) $$\sum_{i=1}^{m} (A_i \text{ -t tartalmazó teljes láncok száma}) \leq$$
$$\leq h(\text{összes teljes láncok száma}).$$

Azaz, beirva a zárójelekben szereplő mennyiségek értékeit:

$$\sum_{i=1}^{m} |A_i|!\,(n-|A_i|)! \leq h \cdot n!,$$

vagy

(5.3) $$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \leq h.$$

Indexeljük az A_i halmazokat $\binom{n}{|A_i|}$ nagysága szerint, tehát legyen

$$\binom{n}{|A_1|} \geq \binom{n}{|A_2|} \geq \ldots \geq \binom{n}{|A_m|}.$$

Mivel A_i-k különbözők, igy a j elemü halmazokból legfeljebb $\binom{n}{j}$ van, igy fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\binom{n}{|A_i|} \leq x_1^n \quad \text{ha} \quad 1 \leq i \leq x_1^n,$$

(5.4)

$$\binom{n}{|A_i|} \leq x_k^n \quad \text{ha} \quad x_1^n + \ldots + x_{k-1}^n \leq i \leq x_1^n + \ldots + x_{k-1}^n + x_k^n$$

$$(1 \leq i \leq m, \ 2 \leq k \leq n+1).$$

Alkalmazzuk (5.3)-ban az (5.4) egyenlőtlenségeket.

$$h \geq \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} = \sum_{1 \leq i \leq x_1^n} \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} + \sum_{k=2}^{h-1} \sum_{\substack{x_1^n + \ldots + x_{k-1}^n < i \leq \\ \leq x_1^n + \ldots + x_k^n}} \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} + \sum_{x_1^n + \ldots + x_{h-1}^n < i \leq m} \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \geq$$

$$\geq \sum_{1 \leq i \leq x_1^n} \frac{1}{x_1^n} + \sum_{k=2}^{h-1} \sum_{\substack{x_1^n + \ldots + x_{k-1}^n < i \leq \\ \leq x_1^n + \ldots + x_k^n}} \frac{1}{x_k^n} + \sum_{x_1^n + \ldots + x_{h-1}^n < i \leq m} \frac{1}{x_h^n} =$$

$$= h - 1 + \frac{m - (x_1^n + \ldots + x_{h-1}^n)}{x_h^n}.$$

Innen pedig egyszerü átrendezéssel kapjuk (5.1)-et.

Megjegyzés. A fenti tételt Erdős Pál bizonyitotta [3] -ban. Az ott szereplő bizonyitás az eredeti Sperner-féle bizonyitás technikájával készült, ez a bizonvitás Lubell módszerének módositása s itt szerepel először.

6.§. A Sperner-tétel egy élesitése

Erdős [3] egy számelméleti probléma megoldásánál sikerrel alkalmazta a Sperner-tételt. Azonban a probléma több dimenziós általánositásához már nem volt elegendő a Sperner-tétel eredeti formájának használata. Ez a probléma vezetett igy el a tétel következő élesitéséhez, amelyet D. Kleitman [4] és - tőle függetlenül - a szerző [5] vettek észre.

6.1. Tétel. Legyenek X_1, X_2 diszjunkt, n_1 illetve n_2 elemü halmazok $(n=n_1+n_2,\ n_1 \geq n_2)$. Ha $\mathcal{A}=\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ az $X=X_1 \cup X_2$ részhalmazainak egy olyan rendszere, melyben nincs két különböző A_i és A_j $(i \neq j)$, melyre teljesülne

(6.1) $$A_i \cap X_1 = A_j \cap X_1 \quad \text{és} \quad A_i \cap X_2 \supset A_j \cap X_2,$$

vagy

(6.1') $$A_i \cap X_1 \supset A_j \cap X_1 \quad \text{és} \quad A_i \cap X_2 = A_j \cap X_2,$$

akkor

(6.2) $$m \leq \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Megjegyzések.

1. Ha $n_2=0$, akkor a fenti tétel éppen a Sperner-tételt adja vissza. Valóban, ekkor $A_i \cap X_2 = A_j \cap X_2$ és igy $A_i \cap X_1 = A_i$ és $A_j \cap X_1 = A_j$ miatt a (6.1') feltétel éppen $A_i \supset A_j$ -t adja.

2. Ha $n_1>0,\ n_2>0$, ez a tétel valóban egy élesitése a Sperner-tételnek, hiszen e tétel feltételei gyengébbek, az állitás azonban ugyanaz. Hozzá kell tenni azonban, hogy az extremális rendszer egyértelmüsége már nem áll fenn, mert $\mathcal{S}_{[\frac{n}{2}]}$ -en kivül más extremalis rendszer is van, mint azt a következő példa mutatja.

Legyen n páros és $n_2=1,\ n_1=n-1$, továbbá álljon $\mathcal{A}$ X_1 összes $\frac{n}{2}-1$ elemü részhalmazaiból, és azokbol a halmazokból, amelyeknek X_2 része, de X_1 -be eső részük $\frac{n}{2}$ elemü. Könnyen látható, hogy $|\mathcal{A}| = \binom{n-1}{\frac{n}{2}-1} + \binom{n-1}{\frac{n}{2}} = \binom{n}{\frac{n}{2}}$ és a (6.1), (6.1') feltételek egyike sem állhat fenn.

Bizonyitás. Legyen $B \subset X_2$ egy tetszőleges halmaz. Tekintsük azon $A_i\ (1 \le i \le m)$ halmazokat, melyekre $A_i \cap X_2 = B$ és vegyük ezeknek X_1 -be eső részét. Az igy nyert halmazok rendszerét jelöljük $\mathcal{A}^*(B)$ -vel:

$$\mathcal{A}^*(B) = \{C : C = A_i - B,\ A_i \in \mathcal{A},\ A_i \cap X_2 = B\}.$$

Legyen továbbá $\mathcal{L} = \{B_1, B_2, \ldots, B_h\}$ egy h hosszuságu lánc X_2 -ben. Ekkor az $\bigcup_{i=1}^{h} \mathcal{A}^*(B_i)$ rendszer nem tartalmazhat egy $h+1$ hosszuságu láncot. Ha ugyanis lenne egy ilyen $C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C_{h+1}$ lánc, a skatulya-elv szerint valamely B_i-re $C_j, C_k \in \mathcal{A}^*(B_i)$ teljesülne, vagyis $B_i \cup C_j$ -re és $B_i \cup C_k$ -ra fennállna (6.1), feltevésünkkel ellentétben.

Hogy hatásosan ki tudjuk használni az $\bigcup_{i=1}^{h} \mathcal{A}^*(B_i)$ tipusu rendszerekre Erdős tételét (5.1. Tétel), bebizonyitunk egy lemmát, amely biztositja sok, elég hosszu lánc létezését X_2-ben.

6.1. Lemma. Legyenek $D_1, D_2, \ldots, D_{2^n}$ egy n elemü halmaz összes részhalmazai valamilyen sorrendben. Jelöljük Γ_n-nel azt a gráfot, amelynek csucspontjai $D_1, D_2, \ldots, D_{2^n}$ és két csucspontja, D_i és D_j akkor és csak akkor van összekötve egy irányitott éllel (D_i -től D_j -felé), ha $D_i \subset D_j$ és $|D_j| = |D_i| + 1$. Ekkor Γ_n -ban létezik $\binom{n}{[\frac{n}{2}]}$ pont-diszjunkt irányitott ut, melyek közül egy $n+1$ hosszuságu és $\binom{n}{\frac{n+1-h}{2}} - \binom{n}{\frac{n-1-h}{2}}$ darab h hosszuságu $(h = n-1, n-3, \ldots; h > 0)$, (egy ut hosszusága alatt értjük a csucspontok számát), vagy másképpen fogalmazva, melyben a legalább h hosszuságu $(h = 1, 2, \ldots n+1)$ utak száma $\binom{n}{[\frac{n+1-h}{2}]}$.

A lemma bizonyitása. Ha $n = 1$, akkor az állitás triviális. Legyen most $n > 1$ és bizonyitsuk az állitást n -re vonatkozó teljes indukcióval. Tegyük fel tehát, hogy Γ_n -ben léteznek a lemma feltételeit kielégitő $\mathcal{L}_1^n, \mathcal{L}_2^n, \ldots, \mathcal{L}_{\binom{n}{[\frac{n}{2}]}}^n$ utak. Könnyen látható, hogy Γ_n minden csucspontja pontosan egy ut által van tartalmazva, mivel az utak hosszának összege éppen 2^n . Vegyük most a Γ_{n+1} gráfot. Az első n elem által meghatározott részhalmazok kifeszitik Γ_n -et, igy feltehetjük, hogy az $\mathcal{L}_1^n, \mathcal{L}_2^n, \dots, \mathcal{L}^n_{\binom{n}{[\frac{n}{2}]}}$ utak már ki vannak jelölve Γ_{n+1}-ben is. Ezeket az utakat folytassuk a következő kétféle módon:

1. Tekintsük $\mathcal{L}_i^n$ végpontját $\left(1 \le i \le \binom{n}{[\frac{n}{2}]}\right)$, tehát azt a pontot, amely a legnagyobb halmaznak felel meg $\mathcal{L}_i$ pontjai közül. Vegyük hozzá ehhez a legnagyobb halmazhoz az uj, $n+1$-edik elemet, és az igy kapott uj halmazzal hosszabbitsuk meg $\mathcal{L}_i^n$-t. Jelöljük az igy nyert utat $\mathcal{L}_i^{n+1}$-vel. Nyilvánvalóan $\mathcal{L}_i^{n+1}$-k ismét diszjunktak, és $\mathcal{L}_i^{n+1}$ hossza eggyel nagyobb $\mathcal{L}_i^n$ hosszánál $\left(1 \le i \le \binom{n}{[\frac{n}{2}]}\right)$.

2. Hagyjuk el $\mathcal{L}_i^n$-ből a végpontját (azaz a legnagyobb halmaznak megfelelő csucspontot), ha $\mathcal{L}_i^n$ hossza nagyobb, mint 1. A megmaradt csucspontoknak megfelelő halmazok mindegyikéhez vegyük hozzá az $n+1$-edik elemet. Ezen uj halmazoknak megfelelő csucspontok ismét egy irányitott utat alkotnak. Igy jutottunk az $\mathcal{L}_{\binom{n}{[\frac{n}{2}]}+1}, \dots, \mathcal{L}_{\binom{n+1}{[\frac{n+1}{2}]}}$ utakhoz.

Az $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{\binom{n+1}{[\frac{n+1}{2}]}}$ utak valóban diszjunktak lesznek, mert, mig az első esetben a végpontoknak megfelelő halmazokat bővitettük az uj elemmel, addig a második esetben az összes többi pontnak megfelelő halmazt. Könnyen látható az is, hogy pontosan egy $n+2$ hosszuságu van az uj utak között, és általában a h $(h=n, n-2, \dots, h>0)$ hosszuságu utak száma

$$\left[\binom{n}{\frac{n+1-(h-1)}{2}}-\binom{n}{\frac{n-1-(h-1)}{2}}\right]+\left[\binom{n}{\frac{n+1-(h+1)}{2}}-\binom{n}{\frac{n-1-(h+1)}{2}}\right]=$$

$$=\binom{n+1}{\frac{n+2-h}{2}}-\binom{n+1}{\frac{n-h}{2}}$$

lesz, hiszen h hosszuságu utakat az első esetben a Γ_n -beli $h-1$ hosszu utakból, a második esetben a $h+1$ hosszu utakból kaptunk. Ezzel igazoltuk lemmánkat.

Térjünk most vissza a tétel bizonyitására. A lemma által biztositott irányitott utaknak megfelelő láncokat X_2 -ben jelöljük ismét $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{\binom{n_2}{[\frac{n_2}{2}]}}$ -vel: $\mathcal{J}=\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \dots \cup \mathcal{L}_{\binom{n_2}{[\frac{n_2}{2}]}}$. Könnyen látható az

$m=\sum_{B\subset X_2} |\mathcal{A}^*(B)|$ egyenlőség is.

Ezekből következik

$$(6.3)\qquad m=\sum_{B\in\mathcal{L}_1}|\mathcal{A}^*(B)|+\dots+\sum_{B\in\mathcal{L}_{\binom{n_2}{[\frac{n_2}{2}]}}}|\mathcal{A}^*(B)|.$$

Itt $B_1\in\mathcal{L}_i$ és $B_2\in\mathcal{L}_i$ $\left(1\le i\le\binom{n_2}{[\frac{n_2}{2}]}\right)$ esetén $\mathcal{A}^*(B_1)\cap\mathcal{A}^*(B_2)=0$, mert ellenkező esetben volna egy $C\in\mathcal{A}^*(B_1)\cap\mathcal{A}^*(B_2)$ halmaz és a $C\cup B_1$, $C\cup B_2$ halmazok kielégitenék a (6.1) feltételt, feltevésünkkel ellentétben. Igy a (6.3) egyenlőséget átirhatjuk az

$$(6.4)\qquad m=\left|\bigcup_{B\in\mathcal{L}_1}\mathcal{A}^*(B)\right|+\dots+\left|\bigcup_{B\in\mathcal{L}_{\binom{n_2}{[\frac{n_2}{2}]}}}\mathcal{A}^*(B)\right|$$

alakba, ahol az egyes tagok becsülhetők már a 6.1. tétel segitségével, a lemma előtt elmondottak alapján:

(6.5) $$\left|\bigcup_{B\in\mathcal{L}_i}\mathcal{A}^*(B)\right| \le x_1^{n_1}+x_2^{n_1}+\dots+x_{|\mathcal{L}_i|}^{n_1}.$$

A 6.1. lemmából tudjuk, hogy azon $\mathcal{L}_i$ -k száma, melyekre $|\mathcal{L}_i|\ge h$, pontosan $\binom{n_2}{\left[\frac{n_2+1-h}{2}\right]}$. Tehát (6.4)-ből és (6.5)-ből

$$m \le \sum_{h=1}^{n_2+1}\binom{n_2}{\left[\frac{n_2+1-h}{2}\right]} x_h^{n_1}.$$

Felhasználva, hogy $x_h^{n_1}=\binom{n_1}{\left[\frac{n_1+1-h}{2}\right]}$, némi diszkusszióval következik

$$m \le \sum_{h=1}^{n_2+1}\binom{n_2}{\left[\frac{n_2+1-h}{2}\right]}\binom{n_1}{\left[\frac{n_1+1-h}{2}\right]} = \sum_{i=0}^{n_2}\binom{n_2}{i}\binom{n_1}{\left[\frac{n_1+n_2}{2}\right]-i} = \binom{n_1+n_2}{\left[\frac{n_1+n_2}{2}\right]},$$

azaz a tételt bebizonyitottuk.

7.§. Sperner lemmájának élesitése [6]

E paragrafusban a 3.1. lemmában szereplő $|c(\mathcal{A})|$ szám pontos alsó korlátját fogjuk meghatározni.

A továbbiakban szükségünk lesz a következő egyszerü lemmára:

7.1. Lemma. Ha m és k természetes számok, m -et egyértelmüen irhatjuk fel a következő alakban:

(1.1) $$m=\binom{a_k(m,k)}{k}+\binom{a_{k-1}(m,k)}{k-1}+\ldots+\binom{a_{t(m,k)}(m,k)}{t(m,k)},$$

ahol $t(m,k)\geq 1$ $a_k>a_{k-1}>\ldots>a_{t(m,k)}$ természetes számok és $a_i(m,k)\geq i$ $(i=t(m,k),t(m,k)+1,\ldots,k)$.

Bizonyitás. A (1.1) előállitás létezését k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyitjuk. $k=1$ -re az állitás triviális. Tegyük fel, hogy valamilyen $k-1$ -re $(k>1)$ már teljesül, és bizonyitsuk be k-ra. Legyen a_k a legnagyobb olyan egész szám, melyre $\binom{a_k}{k}\leq m$ teljesül. Ha itt egyenlőségjel áll, már készen is vagyunk. Ha nem, használhatjuk az indukciós hipotézist $m-\binom{a_k}{k}$ -ra

(1.2) $$m-\binom{a_k}{k}=\binom{a_{k-1}}{k-1}+\ldots+\binom{a_t}{t},$$

ahol $t\geq 1$, $a_{k-1}>\ldots>a_t$, $a_i\geq i$ $(i=t,t+1,\ldots,k-1)$. (1.2) már ad is m-re egy (1.1) tipusu kifejtést, csupán azt kell még igazolnunk, hogy $a_k>a_{k-1}$ és $a_k\geq k$. Ha $a_k\leq a_{k-1}$ lenne, akkor

$$m\geq\binom{a_k}{k}+\binom{a_{k-1}}{k-1}\geq\binom{a_k}{k}+\binom{a_k}{k-1}=\binom{a_k+1}{k}$$

állna fenn, ellentmondásban a_k meghatározásával. Másrészt $a_k\geq k$ következik $a_k>a_{k-1}$ -ből és $a_{k-1}\geq k-1$ -ből.

A (1.1) előállitás egyértelmüségét szintén k-ra vonatkozó teljes indukcióval lehet bizonyitani. $k=1$ -re az állitás triviális, tegyük fel, hogy valamilyen $k-1$ -re is igaz és igazoljuk k -ra, mégpedig indirekt uton; tegyük fel, hogy két különböző előállitás is van:

$$(7.3)\quad m=\binom{a_k}{k}+\binom{a_{k-1}}{k-1}+\ldots+\binom{a_t}{t}=\binom{a'_k}{k}+\binom{a'_{k-1}}{k-1}+\ldots+\binom{a'_r}{r}.$$

Két esetet különböztessünk meg. Ha $a_k=a'_k$, már $m-\binom{a_k}{k}$-ra ad (7.3) két különböző előállitást, ami az indukciós feltétel miatt lehetetlen. Ha $a_k<a'_k$, akkor az ellentmondást a következőképpen nyerjük:

$$m\le\binom{a_k}{k}+\binom{a_k-1}{k-1}+\ldots+\binom{a_k-k+1}{1}=\binom{a_k+1}{k}-1<\binom{a_k+1}{k}\le$$
$$\le\binom{a'_k}{k}\le\binom{a'_k}{k}+\ldots+\binom{a'_r}{r}.$$

Ezzel a lemmát igazoltuk.

A 7.1. Lemma alapján bevezethetjük a következő jelöléseket:

$$E_k(m)=\binom{a_k(m,k)-1}{k-1}+\binom{a_{k-1}(m,k)-1}{k-2}+\ldots+\binom{a_{t(m,k)}(m,k)-1}{t(m,k)-1}$$

és

$$F_k(m)=\binom{a_k(m,k)}{k-1}+\binom{a_{k-1}(m,k)}{k-2}+\ldots+\binom{a_{t(m,k)}(m,k)}{t(m,k)-1},$$

ahol a szereplő kifejezések (7.1)-ben vannak defíniálva.

Ezen előkészités alapján kimondhatjuk a tételt.

2.1. Tétel. Legyenek n, m és k adott egészek, melyekre teljesül

$$n \geq 1, \quad 1 \leq k < n \quad \text{és} \quad 1 \leq m \leq \binom{n}{k}.$$

Ha X egy n elemü halmaz és

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}, \quad |A_i| = k \quad (i = 1, \ldots, m)$$

X részhalmazainak egy rendszere, akkor

$$\min |c(\mathcal{A})| = F_k(m),$$

ahol a minimum az összes olyan $\mathcal{A}$ -kra vétetik, amelyek a fenti feltételeket kielégitik.

~~Megjegyzés. Az eredmény érdekessége, hogy a minimum nem függ n -től, szemben a (3.2)-ben szereplő alsó korláttal.~~

A bizonyitás előtt kimondunk egy másik tételt. E tétel önmagában is érdekes, de itt azért van rá szükség, mert a két tételt egyszerre fogjuk teljes indukcióval bizonyitani.

2.2. Tétel. Legyenek n, m és k adott, a következő tulajdonságokkal rendelkező egész számok:

$$n \geq 1, \quad 1 \leq k < n, \quad \binom{n}{k} \leq m < 2\binom{n}{k}.$$

Legyen továbbá X és Y két különböző, diszjunkt n elemü halmaz. Ha

$$\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$$

egy olyan halmazrendszer, melyre

$$A_i \subset X \qquad \text{vagy} \qquad A_i \subset Y \qquad (1 \le i \le m)$$

és

$$|A_i| = k \qquad\qquad (1 \le i \le m),$$

akkor

$$\min|c(\mathcal{A})| = \binom{n}{k-1} + F_k\left(m - \binom{n}{k}\right).$$

Bizonyitás.

1. Konstruáljuk meg először egy $\mathcal{A}$ rendszert, melyre a 12.1. Tételben $|c(\mathcal{A})|$ felveszi a minimumát.

Egy tetszőleges $A \subset X$ halmazhoz rendelhetünk egy $0-1$ sorozatot, amelynek i-edik eleme 1 vagy 0 aszerint, hogy $x_i \in A$ vagy $x_i \notin A$. Rendezzük most X részhalmazait a hozzájuk rendelt sorozatok lexikografikus sorrendje szerint. Más szóval

$$A < B,$$

ha valamilyen j-re $(j \le n)$ fennáll, hogy $1 \le i < j$ esetén x_i vagy eleme A-nak is és B-nek is, vagy pedig egyiküknek sem, továbbá $x_j \notin A$ és $x_j \in B$.

A keresett rendszer $\mathcal{S}_k$ (X összes k elemű részhalmaza) -nak a fenti rendezés szerinti első m részhalmazából áll.

Jelöljük ezt a rendszert $\mathcal{M}(n, m, k)$ -val. k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyitjuk most, hogy

$$|c(\mathcal{M}(n,m,k))| = F_k(m).$$

$k=1$ -re az állitás triviális. Bizonyitsuk, hogy $k>1$-re is teljesul, ha feltesszük, hogy $k-1$ -re már igaz.

Legyen A az $\mathcal{M}(n,m,k)$ halmaz utolsó eleme, és x_r legyen az A halmaz első eleme (azaz $x_r \in A$, de $x_i \notin A$ $(1 \leq i < r)$). $\mathcal{M}(n,m,k)$ -nak - definiciója miatt - minden olyan B halmaz eleme lesz, melyre $|B|=k$ és $x_i \notin B$ $(1 \leq i \leq r)$. Ezek száma $\binom{n-r}{k}$. Ugyanakkor $\mathcal{M}(n,m,k)$ -ban nincs olyan halmaz, melynek $x_1, x_2, \dots, x_{r-1}$ eleme volna. Igy

(2.4) $$\binom{n-r}{k} \leq m \leq \binom{n-r+1}{k}$$

teljesül. Ha a jobboldalon egyenlőség áll, akkor $\mathcal{M}(n,m,k)$ az $x_r, x_{r+1}, \dots, x_n$ elemekből alkotható összes k elemü halmazokból áll. Ekkor valóban

$$|c(\mathcal{M}(n,m,k))| = \binom{n-r+1}{k-1} = F_k(m).$$

Feltehetjük tehát, hogy (2.4) a jobboldalon szigoru egyenlőtlenség áll. Ekkor azonban (2.4)-ből következik $n-r = a_k(m,k)$. Igy $\mathcal{M}(n,m,k)$ két részre osztható: az egyik részben (jelöljük $\mathcal{N}$ -nel) $\binom{a_k(m,k)}{k}$ halmaz van, azok, melyeknek x_r nem eleme, a másik részben (jelöljük $\mathcal{P}$ -vel) pedig azok a halmazok vannak, amelyeknek x_r eleme. Utóbbiak száma

$$\binom{a_{k-1}(m,k)}{k-1}+\binom{a_{k-2}(m,k)}{k-2}+\ldots+\binom{a_{t(m,k)}(m,k)}{t(m,k)}.$$

$c(\mathcal{M}(n,m,k))$ elemeit is csoportosithatjuk aszerint, hogy x_r elemük-e vagy sem. Az utóbbi halmazok száma nyilván $\binom{a_k(m,k)}{k-1}$. Az előbbiek száma viszont meg fog egyezni $|c(\mathcal{P}-\{x_r\})|$ -rel (ahol $\mathcal{P}-\{x_r\}$ azt a halmazrendszert jelenti, melyet -ből ugy kapunk, hogy elemeiből egyenként kivonjuk $\{x_r\}$-et). Itt viszont alkalmazhatjuk indukciós feltevésünket:

$$|c(\mathcal{P}-\{x_r\})|=F_{k-1}\left(\binom{a_{k-1}(m,k)}{k-1}+\ldots+\binom{a_{t(m,k)}(m,k)}{t(m,k)}\right)=$$

100,0.

$$=\binom{a_{k-1}(m,k)}{k-2}+\ldots+\binom{a_{t(m,k)}(m,k)}{t(m,k)-1}.$$

Tehát

$$|c(\mathcal{M}(n,m,k))|=\binom{a_k(m,k)}{k-1}+|c(\mathcal{P}-\{x_r\})|=F_k(m)$$

valóban fennáll.

2. A fentiek alapján könnyü megadni egy olyan rendszert, amelyre a 12.2. Tételbeli $|c(\mathcal{A})|$ felveszi a minimumát. Álljon ez ugyanis az X-beli összes k elemü részhalmazból és $\mathcal{M}\left(n,m-\binom{n}{k},k\right)$ -ból Y -ban.

3. Az előző két pontban beláttuk, hogy a 7.1. Tétel esetében

$$\min|c(\mathcal{A})| \leq F_k(m),$$

és a 7.2. Tétel esetében

$$\min|c(\mathcal{A})| \leq \binom{n}{k-1} + F_k\left(m-\binom{n}{k}\right).$$

Igy elég igazolnunk, hogy

(7.5) $$|c(\mathcal{A})| \geq F_k(m),$$

illetve

(7.6) $$|c(\mathcal{A})| \geq \binom{n}{k-1} + F_k\left(m-\binom{n}{k}\right).$$

(7.5)-öt és (7.6)-ot egyszerre fogjuk bizonyitani k-ra vonatkozó teljes indukcióval. $k=1$ -re állitásaink ismét triviálisak, tegyük fel tehát, hogy valamilyen k -nál kisebb értékekre már igazak, és bizonyitsuk k -ra.

4. Legelőször egy egyenlőtlenséget igazolunk:

(7.7) $$F_k(m) \leq F_k(m_1) + F_{k-1}(m_2),$$

ha $m = m_1 + m_2$, $m_1 \geq 0$, $m_2 \geq 0$

(7.8)

egész számok és

(7.9) $$m_2 \leq E_k(m).$$

A (7.7) egyenlötlenséget rögzitett k mellett minden (7.8)-at és (7.9)-et kielégitő m, m_1 és m_2 esetére fogjuk igazolni, felhasználva a $k-1$ -re vonatkozó indukciós hipotézist. Az egyszerüség kedvéért a következő jelöléseket vezetjuk be a bizonyitáshoz:

$$t = t(m, k) \qquad a_i = a_i(m, k) \qquad (t \leq i \leq k)$$

$$r = t(m_1, k) \qquad b_i = a_i(m_1, k) \qquad (r \leq i \leq k)$$

$$s = t(m_2, k-1) \qquad c_i = a_i(m_2, k-1) \qquad (s \leq i \leq k-1).$$

(7.8)-ból és (7.9)-böl következik

(7.10) $$m_1 \geq m - E_k(m) = \binom{a_k - 1}{k} + \ldots + \binom{a_t - 1}{t},$$

ami maga után vonja a

(7.11) $$b_k \geq a_k - 1$$

egyenlötlenséget, hiszen ellenkező esetben

$$m_1 \leq \binom{a_k - 2}{k} + \binom{a_k - 3}{k-1} + \ldots + \binom{a_k - (k+1)}{1} = \binom{a_k - 1}{k} - 1$$

teljesülne - (7.10)-zel ellentmondásban. Másrészt (7.8) miatt

(7.12) $$a_k \geq b_k.$$

(7.11) és (7.12) alapján két esetet különböztethetünk meg:

(a) $b_k = a_k$ és (b) $b_k = a_k - 1$.

(a) Ebben az esetben (7.7) a következő alaku:

$$\binom{a_k}{k-1} + \binom{a_{k-1}}{k-2} + \ldots + \binom{a_t}{t-1} \leq \binom{a_k}{k-1} + \binom{b_{k-1}}{k-2} + \ldots + \binom{b_r}{r-1} + F_{k-1}(m_2).$$

Mindkét oldalból kivonva $\binom{a_k}{k-1}$ -et:

(7.13) $$F_{k-1}\left(m - \binom{a_k}{k}\right) \leq F_{k-1}\left(m_1 - \binom{a_k}{k}\right) + F_{k-1}(m_2).$$

Legyen Y_1 és Y_2 két diszjunkt, $b_{k-1}+1$ illetve $c_{k-1}+1$ elemü halmaz. Konstruáljuk meg Y_1 -en az $\mathcal{M}\left(b_{k-1}+1,\ m_1 - \binom{a_k}{k},\ k-1\right)$ és Y_2 -őn az $\mathcal{M}(c_{k-1}+1,\ m_2,\ k-1)$ rendszereket. Igy $Y_1 \cup Y_2$ -őn nyertünk egy $\mathcal{N}$ rendszert, amelyre az indukciós hipotézis alapján (3. pont (7.5)) felirható

(7.14) $$F_{k-1}\left(m - \binom{a_k}{k}\right) \leq |c(\mathcal{N})| =$$
$$= \left|c\left(\mathcal{M}\left(b_{k-1}+1,\ m_1 - \binom{a_k}{k},\ k-1\right)\right)\right| + \left|c\left(\mathcal{M}(c_{k-1}+1, m_2, k-1)\right)\right|.$$

Azonban már tudjuk (1. pont (7.4)), hogy

(7.15) $$\left|c\left(\mathcal{M}\left(b_{k-1}+1, m_1 - \binom{a_k}{k}, k-1\right)\right)\right| = F_{k-1}\left(m_1 - \binom{a_k}{k}\right)$$

és

(7.16) $$\left|c\left(\mathcal{M}(c_{k-1}+1,\ m_2,\ k-1)\right)\right| = F_{k-1}(m_2).$$

Végül (7.13) következik (7.14), (7.15) és (7.16)-ból.

(b) $b_k = a_k - 1$. Két alesetet is különböztessünk meg: (ba) $m_2 \geq \binom{a_k-1}{k-1}$, (bb) $m_2 < \binom{a_k-1}{k-1}$.

(ba) Ez esetben (7.7) a következő alakot veszi fel:

$$\binom{a_k}{k-1}+\binom{a_{k-1}}{k-2}+\ldots+\binom{a_t}{t-1} \leq \binom{a_k-1}{k-1}+\binom{b_{k-1}}{k-2}+\ldots+\binom{b_r}{r-1}+$$
$$+\binom{a_k-1}{k-2}+\binom{c_{k-2}}{k-3}+\ldots+\binom{c_s}{s-1},$$

mivel $c_{k-1} = a_k - 1$ (7.9) és a (ba) feltevés miatt. Vonjunk ki mindkét oldalból $\binom{a_k}{k-1} = \binom{a_k-1}{k-1} + \binom{a_k-1}{k-2}$ -ét:

(7.17) $F_{k-1}(m - \binom{a_k}{k}) \leq F_{k-1}(m_1 - \binom{a_k-1}{k}) + F_{k-2}(m_2 - \binom{a_k-1}{k-1})$.

(7.17) igazsága következik az indukciós hipotézisből, ha

(7.18) $$m_2 - \binom{a_k-1}{k-1} \leq F_{k-1}(m - \binom{a_k}{k})$$

fennáll. Azonban (7.9) miat

(7.19) $$\binom{a_k-1}{k-1}+\binom{c_{k-2}}{k-2}+\ldots+\binom{c_s}{s} \leq \binom{a_k-1}{k-1}+\binom{a_{k-1}-1}{k-2}+\ldots$$
$$\ldots+\binom{a_t-1}{t-1}.$$

Mindkét oldalból kivonva $\binom{a_k-1}{k-1}$ -et:

$$(7.20) \quad \binom{c_{k-2}}{k-2}+\ldots+\binom{c_s}{s} \leq \binom{a_{k-1}-1}{k-2}+\ldots+\binom{a_t-1}{t-1},$$

és (7.20) ekvivalens (7.18)-al.

(bb) Ez esetben (7.7) a következő alaku:

$$\binom{a_k}{k-1}+\binom{a_{k-1}}{k-2}+\ldots+\binom{a_t}{t-1} \leq \binom{a_k-1}{k-1}+\binom{b_{k-1}}{k-2}+\ldots+\binom{b_r}{r-1}+F_{k-1}(m_2).$$

Kivonva mindkét oldalból $\binom{a_k-1}{k-1}$ -et:

$$(7.21) \quad \binom{a_k-1}{k-2}+F_{k-1}\left(m-\binom{a_k}{k}\right) \leq F_{k-1}\left(m_1-\binom{a_k-1}{k}\right)+F_{k-1}(m_2).$$

Legyen X_1 és Y_1 két diszjunkt, a_k-1 elemü halmaz. Konstruáljuk meg az $\mathcal{M}\left(a_k-1,\ m_1-\binom{a_k-1}{k},\ k-1\right)$ rendszert X_1-en. Ez megtehető, ha $m_1-\binom{a_k-1}{k} \leq \binom{a_k-1}{k-1}$.
De ez következik $a_k-1=b_k>b_{k-1}$ -ből, hiszen

$$m_1-\binom{a_k-1}{k}=\binom{b_{k-1}}{k-1}+\ldots+\binom{b_r}{r}.$$

Konstruáljuk meg továbbá az $\mathcal{M}(a_k-1,\ m_2,\ k-1)$ rendszert Y_2 -n. Ennek lehetőségét a (bb) feltevés biztositja. Igy van egy $\mathcal{N}$ rendszerünk $X_1 \cup Y_1$ -en. Alkalmazzuk rá az indukciós feltevést (3. pont (7.6))

$$(7.22) \quad \begin{aligned} \binom{a_k-1}{k-2}+F_{k-1}\left(m-\binom{a_k}{k}\right) &\leq \left|c\left(\mathcal{M}\left(a_k-1,\ m_1-\binom{a_k-1}{k},\ k-1\right)\right)\right|+ \\ &+\left|c\left(\mathcal{M}(a_k-1,\ m_2,\ k-1)\right)\right|. \end{aligned}$$

Azonban tudjuk (l. pont (7.4)), hogy

(7.23) $\left|c\left(\mathcal{M}\left(a_k-1,\ m_1-\binom{a_k-1}{k},\ k-1\right)\right)\right| = F_{k-1}\left(m_1-\binom{a_k-1}{k}\right)$

és

(7.24) $\left|c\left(\mathcal{M}\left(a_k-1,\ m_2,\ k-1\right)\right)\right| = F_{k-1}\left(m_2\right),$

végül (7.21) következik a (7.22), (7.23) és (7.24) egyenlőtlenségekből. Tehát a (7.7) egyenlőtlenséget minden esetben bizonyitottuk k -ra.

5. Definiáljuk a_k^* -ot a következőképpen:

$$a_k^* = a_k^*(m) = \begin{cases} a_k & \text{ha} \quad m = \binom{a_k}{k} \\ a_k+1 & \text{különben} \end{cases}$$

A (7.7) egyenlőtlenségre nekünk az

(7.25) $$m_2 \leq \frac{m \cdot k}{a_k^*}$$

feltétel mellett lesz szükségünk (7.9) helyett. Ezért most be kell bizonyitanunk az

(7.26) $$\frac{m \cdot k}{a_k^*} \leq E_k(m)$$

egyenlőtlenségeket.

(7.26)-ot is k -ra vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk, azonban hangsulyozni szeretnénk, hogy (7.26) bizonyitása független az eredeti két tétel bizonyitásától. Ha $k=1$, az állitás triviális. Tegyük fel, hogy $k>1$ és bizonyitsuk k -ra, feltéve, hogy $k-1$ -re már igaz.

Ha $m=\binom{a_k}{k}$, akkor $a_k^*=a_k$ és $E_k(m)=\binom{a_k-1}{k-1}$, igy (7.26) egyenlőséggel teljesül. Feltehetjük tehát, hogy $a_k^*=a_k+1$. Természetesen

$$(7.27)\qquad \frac{k}{a_k+1}\binom{a_k}{k}<\binom{a_k-1}{k-1}$$

és az indukciós hipotézis alapján

$$(7.28)\qquad \frac{k-1}{a_{k-1}+1}\left[\binom{a_{k-1}}{k-1}+\dots+\binom{a_r}{r}\right]\leq\binom{a_{k-1}-1}{k-2}+\dots+\binom{a_r-1}{r-1}.$$

Ha $\frac{k}{a_k+1}\leq\frac{k-1}{a_{k-1}+1}$, összeadva (7.27)-et és (7.28)at, (7.26)-hoz jutunk. Ellenkező esetben

$$(7.29)\qquad \frac{k}{a_k+1}>\frac{k-1}{a_k}$$

teljesül, mert $a_k\geq a_{k-1}+1$. Tekintsük a következő azonosságot:

$$\binom{a_k}{k-1}\left(\frac{k}{a_k+1}-\frac{k-1}{a_k}\right)=\binom{a_k-1}{k-1}-\frac{k}{a_k+1}\binom{a_k}{k}.$$

A zárójelben álló kifejezés (7.29) miatt pozitiv, igy felirható

$$\left[\binom{a_{k-1}}{k-1}+\binom{a_{k-2}}{k-2}+\dots+\binom{a_r}{r}\right]\left(\frac{k}{a_k+1}-\frac{k-1}{a_k}\right)<\binom{a_k-1}{k-1}-\frac{k}{a_k+1}\binom{a_k}{k},$$

mivel $a_k > a_{k-1}$. Irjuk $\frac{k-1}{a_{k-1}+1}$ -et $\frac{k-1}{a_k}$ helyett, és rendezzük át az egyenlőtlenséget:

$$\frac{k}{a_k+1}\left[\binom{a_k}{k}+\binom{a_{k-1}}{k-1}+\dots+\binom{a_r}{r}\right] < \binom{a_k-1}{k-1} + \frac{k-1}{a_{k-1}+1}\left[\binom{a_{k-1}}{k-1}+\dots+\binom{a_r}{r}\right].$$

Végül ebből az egyenlőtlenségből (7.28) alkalmazásával (7.26)-ot kapjuk.

6. Bizonyitsuk most a (7.5) állítást k esetére n -re vonatkozó teljes indukcióval. Ha $n=k$, (7.5) triviális. Tegyük fel, hogy $n>k$, és hogy bármely $|X|<n$ halmazra teljesül (7.5) és bizonyitsuk n -re. X -nek van legalább egy olyan e eleme, melyet legfeljebb $\frac{m \cdot k}{n}$ darab A_i tartalmaz. Definiáljuk a következő rendszereket:

$$\mathcal{B} \doteq \{A : A \in \mathcal{A},\ e \notin A\}$$

és

$$\mathcal{C} = \{A-\{e\} : A \in \mathcal{A},\ e \in A\},$$

ahol

(7.30) $$m_2 = |\mathcal{C}| \leq \frac{m \cdot k}{n} \leq \frac{m \cdot k}{a_k^*(m)}.$$

Természetesen $c(\mathcal{B}) \subset c(\mathcal{A})$ és

$$c(\mathcal{C})(\cup)\{e\} \subset c(\mathcal{A}).$$

(Általában $\mathcal{D}(\cup)\{a\}$ a $\{D \cup \{a\} : D \in \mathcal{D}\}$ rendszert jelöli.) Mivel $c(\mathcal{B})$ és $c(\mathcal{C})$ diszjunktak,

(7.31) $$|c(\mathcal{A})| \geq |c(\mathcal{B})| + |c(\mathcal{C})|.$$

Azonban a $\mathcal{B}$ rendszer $X-\{e\}$ részhalmazaiból áll, igy felhasználhatjuk az indukciós hipotézist $n-1$ -re:

(7.32) $$|c(\mathcal{B})| \geq F_k(m-m_2).$$

Továbbá, alkalmazzuk az indukciós hipotézist $k-1$ -re:

(7.33) $$|c(\mathcal{C})| \geq F_{k-1}(m_2).$$

(7.31)-ből, (7.32)-ből és (7.33)-ból következik

(7.34) $$F_k(m-m_2)+F_{k-1}(m_2) \leq |c(\mathcal{A})|.$$

Felhasználva az 5. pont eredményét is, a (7.5) egyenlőtlenség következik (7.34)-ből és (7.7)-ből (7.30) figyelembevételével. (7.7)-et már használhatjuk k -ra is, hiszen már erre is igazoltuk.

7. Bizonyitsuk most (7.6)-ot k esetére n -re vonatkozó teljes indukcióval. Ha $n=k$, az állitás triviális. Tegyük fel hát, hogy valamilyen n esetén már bármely $|X|=|Y|<n$ halmazokra igaz, s igazoljuk n -re. A bizonyitás nagyon hasonló az előző ponthoz.

Legyen $\mathcal{A}_1$ és $\mathcal{A}_2$ a következőképpen meghatározva:

$$\mathcal{A}_1=\{A: A\in\mathcal{A},\ A\subset X\}$$

$$\mathcal{A}_2=\{A: A\in\mathcal{A},\ A\subset Y\}.$$

Legyen $|\mathcal{A}_1|=r$ és $|\mathcal{A}_2|=s$, ekkor létezik két elem $e\in X$ és $f\in Y$ ugy, hogy e -t legfeljebb $\frac{r\cdot k}{n}$, és f-et legfeljebb

$\frac{s \cdot k}{n}$ halmaz tartalmazza. Definiáljuk a következő rendszereket:

$$\mathcal{B} = \{A : A \in \mathcal{A}, e \notin A, f \notin A\},$$
$$\mathcal{C}_1 = \{A - \{e\} : A \in \mathcal{A}_1, e \in A\},$$
$$\mathcal{C}_2 = \{A - \{f\} : A \in \mathcal{A}_2, f \in A\},$$

ahol

$$(2.35) \qquad r_2 = |\mathcal{C}_1| \leq \frac{r \cdot k}{n}$$

és

$$(2.36) \qquad s_2 = |\mathcal{C}_2| \leq \frac{s \cdot k}{n}.$$

Természetesen

$$c(\mathcal{B}) \subset c(\mathcal{A})$$
$$c(\mathcal{C}_1)(\cup)\{e\} \subset c(\mathcal{A})$$

és

$$c(\mathcal{C}_2)(\cup)\{f\} \subset c(\mathcal{A}).$$

Mivel továbbá $c(\mathcal{B})$, $c(\mathcal{C}_1)(\cup)\{e\}$ és $c(\mathcal{C}_2)(\cup)\{f\}$ diszjunkt rendszerek, fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$(2.37) \quad |c(\mathcal{A})| \geq |c(\mathcal{B})| + |c(\mathcal{C}_1)| + |c(\mathcal{C}_2)| = |c(\mathcal{B})| + |c(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)|.$$

Azonban $\mathcal{B}$ rendszer az $X \cup Y - \{e\} - \{f\}$ halmaz részhalmazaiból áll, alkalmazhatjuk az indukciós feltevést $n-1$ -re (k mellett):

$$|c(\mathcal{B})| \geq \binom{n-1}{k-1} + F_k\left(m - r_2 - s_2 - \binom{n-1}{k}\right). \tag{7.38}$$

Továbbá, használjuk a $k-1$ -re vonatkozó indukciós feltevést is:

$$|c(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)| \geq \binom{n-1}{k-2} + F_{k-1}\left(r_2 + s_2 - \binom{n-1}{k-1}\right). \tag{7.39}$$

(7.37)-ből, (7.38)-ból és (7.39)-ből következik, hogy

$$\binom{n}{k-1} + F_k\left(m - r_2 - s_2 - \binom{n-1}{k}\right) + F_{k-1}\left(r_2 + s_2 - \binom{n-1}{k-1}\right) \leq \leq |c(\mathcal{A})|. \tag{7.40}$$

Most szeretnénk felhasználni a (7.7) egyenlőtlenséget, ami a (7.25) feltétel mellett érvényes (5. pont). E célból nekünk csak annyit kell igazolni, hogy

$$r_2 + s_2 - \binom{n-1}{k-1} \leq \frac{\left[m - r_2 - s_2 - \binom{n-1}{k} + r_2 + s_2 - \binom{n-1}{k-1}\right] k}{a_k^*\left(m - \binom{n}{k}\right)} = \frac{\left[m - \binom{n}{k}\right] k}{a_k^*\left(m - \binom{n}{k}\right)}. \tag{7.41}$$

Azonban

$$(7.42)\quad r_2+s_2-\binom{n-1}{k-1}\le\frac{\left[r+s-\binom{n}{k}\right]\cdot k}{n}=\frac{\left[m-\binom{n}{k}\right]\cdot k}{n}$$

közvetlen folyománya (7.35)-nek és (7.36)-nak. Mivel $m\le 2\binom{n}{k}$ a 2. Tételben szereplő feltétel, $a_k^*\left(m-\binom{n}{k}\right)\le n$ teljesül és igy (7.42) (7.41)-hez vezet. Tehát (7.7) alkalmazható erre az esetre:

$$(7.43)\quad F_k\left(m-\binom{n}{k}\right)\le F_k\left(m-r_2-s_2-\binom{n-1}{k}\right)+F_{k-1}\left(r_2+s_2-\binom{n-1}{k-1}\right).$$

Végül (7.40) és (7.43) a kivánt egyenlőtlenséget adja, s ezzel az egész bizonyitás végetért.

~~Megjegyzés. A tételt $k=3$ esetére Hajnal András bizonyitotta (publikálatlan).~~

13.§. Egy Erdős-probléma megoldása [6].

Legyen X egy n elemü halmaz és $\mathcal{A}$ az X részhalmazainak egy rendszere:

$$\mathcal{A}=\{A_1,A_2,\dots,A_m\},\ A_i\subset X,\ |A_i|=k\quad(1\le i\le m).$$

Erdős Pál vetette fel a következő kérdést. Milyen m számokra biztos, hogy tudunk konstruálni egy $\mathcal{B}$ rendszert a következő tulajdonságokkal:

113-fra $$\mathcal{B}=\{B_1,B_2,\dots,B_m\},\ B_i\subset A_i,\ |B_i|=k-1\quad(1\le i\le m).$$

A probléma megoldásában a házasság-problémát fogjuk használni, világos tehát, hogy ebből a szempontból fontos, hogy mikor áll fenn $F_k(m) < m$, $F_k(m) = m$ vagy $F_k(m) > m$.
E kérdéssel foglalkozik a lemmák itt következő sorozata.

13.1. Lemma. Ha k és x pozitiv egészek, akkor

$$f(x) = \binom{x}{k-1} - \binom{x}{k}$$

monoton növekedő függvény k és $2k-3$ között, $2k-2$-től kezdve azonban monoton csökkenő. $f(2k-3)$ és $f(2k-2)$ értéke egyenlő.

Bizonyitás. Ha $0 \leq a < b \leq x$, könnyen látható, hogy $\binom{x}{a} - \binom{x}{b} < 0$, $\binom{x}{a} - \binom{x}{b} = 0$ vagy $\binom{x}{a} - \binom{x}{b} > 0$ aszerint, hogy $a+b < x$, $a+b = x$, vagy $a+b > x$.
Tekintsük az $f(x+1) - f(x) = \binom{x}{k-2} - \binom{x}{k-1}$ különbséget. Az előbbi megjegyzést használva

$$f(x+1) - f(x) < 0, \text{ ha } 2k-3 < x$$

$$f(x+1) - f(x) = 0, \text{ ha } 2k-3 = x,$$

végül

$$f(x+1) - f(x) > 0, \text{ ha } 2k-3 > x.$$

A lemma bizonyitása ezzel befejeződött.

A következő két kis lemma az előző egyszerü következménye:

13.1.a. Lemma. Ha k es x pozitiv egészek, akkor

$$\binom{x}{k-1} - \binom{x}{k} \leq \binom{2k-2}{k-1} - \binom{2k-2}{k}.$$

13 **8.1.b. Lemma.** Ha k és $x \geq 2k$ pozitiv egészek, akkor

$$\binom{x}{k-1}-\binom{x}{k} \leq \binom{2k}{k-1}-\binom{2k}{k}.$$

13 **8.2. Lemma.** Ha $1 \leq k$, akkor

$$\sum_{i=1}^{k-1}\left[\binom{2i-2}{i-1}-\binom{2i-2}{i}\right] \leq \binom{2k-2}{k-1}-\binom{2k-2}{k}.$$

Bizonyitás. Legyenek a és b a következő tulajdonságu pozitiv egész számok: $\frac{a}{2} \leq b \leq a-1$. Ekkor

$$(8.1)\qquad \binom{a}{b}-\binom{a}{b+1}=\binom{a}{b}\left[1-\frac{a-b}{b+1}\right]=\binom{a}{b}\frac{2b-a+1}{b+1},$$

és hasonlóan

$$(8.2)\qquad \binom{a+2}{b+1}-\binom{a+2}{b+2}=\binom{a+2}{b+1}\left[1-\frac{a-b+1}{b+2}\right]=\binom{a+2}{b+1}\frac{2b-a+1}{b+2}.$$

Továbbá

$$(8.3)\qquad \binom{a+2}{b+1}\frac{2b-a+1}{b+2}=\binom{a}{b}\frac{2b-a+1}{b+1}\,\frac{(a+2)(a+1)}{(b+2)(a-b+1)},$$

ahol

115. o-ra.

$$\frac{a+1}{b+2} \geq 1$$

és

$$\frac{a+2}{a-b+1} \geq \frac{a+2}{\frac{a}{2}+1}=2.$$

Azaz

$$(8.4)\qquad \binom{a+2}{b+1}-\binom{a+2}{b+2}\geq 2\left[\binom{a}{b}-\binom{a}{b+1}\right]$$

következik a (8.1), (8.2) és (8.3) formulákból. Helyettesitsünk (8.4)-ben a helyére $2i-2$ -őt és b helyére $i-1$ -et:

$$(8.5)\qquad \binom{2(i+1)-2}{i}-\binom{2(i+1)-2}{i+1}\geq 2\left[\binom{2i-2}{i-1}-\binom{2i-2}{i}\right].$$

Bizonyitsuk most a lemmát k -ra vonatkozó teljes indukcióval. $k=1$ esetén az állitás triviális, igazoljuk $k+1$ -re, feltéve, hogy k -ra már igaz. Felhasználva az indukciós hipotézist és (8.5)-öt a

$$\sum_{i=1}^{k}\left[\binom{2i-2}{i-1}-\binom{2i-2}{i}\right]\leq 2\left[\binom{2k-2}{k-1}-\binom{2k-2}{k}\right]\leq$$

$$\leq\binom{2(k+1)-2}{k}-\binom{2(k+1)-2}{k+1}$$

egyenlőtlenséghez jutunk, ami éppen a bizonyitandó volt.

8.3. Lemma. Ha $1\leq k$ és $2k-1<a_k(m,k)$, akkor

$$(8.6)\qquad F_k(m)<m.$$

Bizonyitás. A 8.1.b. lemma alapján

$$\text{(13.7)} \qquad \binom{a_k(m,k)}{k-1} - \binom{a_k(m,k)}{k} \leq \binom{2k}{k-1} - \binom{2k}{k}.$$

Másrészt a 13.1.a. lemma alapján

$$\binom{a_i(m,k)}{i-1} - \binom{a_i(m,k)}{i} \leq \binom{2i-2}{i-1} - \binom{2i-2}{i} \qquad (1 \leq i \leq k-1).$$

Összegezés után a

$$\sum_{i=1}^{k-1} \left[\binom{a_k(m,k)}{i-1} - \binom{a_k(m,k)}{i} \right] \leq \sum_{i=1}^{k-1} \left[\binom{2i-2}{i-1} - \binom{2i-2}{i} \right]$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Alkalmazzuk most a 13.2. lemmát és (13.5)-öt:

$$\text{(13.8)} \qquad \begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} \left[\binom{a_k(m,k)}{i-1} - \binom{a_k(m,k)}{i} \right] &\leq \binom{2k-2}{k-1} - \binom{2k-2}{k} < \\ &< \binom{2(k+1)-2}{k} - \binom{2(k+1)-2}{k+1}. \end{aligned}$$

Adjuk össze (13.7)-et és (13.8)-at; a kapott egyenlőtlenség,

117-re

$$F_k(m) - m < \binom{2k}{k-1} - \binom{2k}{k} - \binom{2(k+1)-2}{k} - \binom{2(k+1)-2}{k+1} = 0$$

megegyezik (13.6)-tal.

8.4 Lemma. Ha $1 \leq k$ és $2k-1 > a_k(m,k)$, akkor

(8.9) $$F_k(m) > m.$$

Bizonyitás. Tudjuk, hogy

(8.10) $$a_i(m,k) \leq a_k(m,k) - (k-i).$$

Ha $k > i \geq a_k(m,k) - (k-1)$, akkor $a_k(m,k) - (k-i) \leq 2i-1$ és (8.10) miatt

$$a_i(m,k) \leq 2i-1$$

áll fenn. Ebben az esetben nyilvánvalóan igaz

(8.11) $$\binom{a_i(m,k)}{i-1} - \binom{a_i(m,k)}{i} \geq 0.$$

Ha $1 \leq i < a_k(m,k) - (k-1)$, akkor (8.10) és a 8.1. Lemma alapján

(8.12) $$\binom{a_i(m,k)}{i-1} - \binom{a_i(m,k)}{i} \geq \binom{a_k(m,k)-(k-1)}{i-1} - \binom{a_k(m,k)-(k-i)}{i}$$

teljesül. Összeadva (8.11)-et és (8.12)-t a

$$\sum_{i=1}^{k-1} \left[\binom{a_i(m,k)}{i-1} - \binom{a_i(m,k)}{i} \right] \geq \sum_{i=1}^{a_k(m,k)-k} \left[\binom{a_k(m,k)-(k-i)}{i-1} - \binom{a_k(m,k)-(k-i)}{i} \right]$$

$$= \binom{2a_k(m,k)-2k+1}{a_k(m,k)-k-1} - \binom{2a_k(m,k)-2k+1}{a_k(m,k)-k} + 1$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Innen

$$F_k(m)-m \geq \binom{2a_k(m,k)-2k+1}{a_k(m,k)-k-1} - \binom{2a_k(m,k)-2k+1}{a_k(m,k)-k} + 1 + \tag{13.13}$$
$$+ \binom{a_k(m,k)}{k-1} - \binom{a_k(m,k)}{k},$$

ahol

$$\binom{2a_k(m,k)-2k+1}{a_k(m,k)-k-1} - \binom{2a_k(m,k)-2k+1}{a_k(m,k)-k} \geq \tag{13.14}$$
$$\geq \binom{a_k(m,k)-1}{a_k(m,k)-k-1} - \binom{a_k(m,k)-1}{a_k(m,k)-k},$$

a 13.1. Lemma alapján. (13.14) jobboldalát átirva

$$\binom{a_k(m,k)-1}{a_k(m,k)-k-1} - \binom{a_k(m,k)-1}{a_k(m,k)-k} = \tag{13.15}$$
$$= \binom{a_k(m,k)-1}{k} - \binom{a_k(m,k)-1}{k-1}.$$

Itt

$$\binom{a_k(m,k)-1}{k}-\binom{a_k(m,k)-1}{k-1}=\left[\binom{a_k(m,k)}{k}-\binom{a_k(m,k)}{k-1}\right]-$$

$$-\left[\binom{a_k(m,k)-1}{k-1}-\binom{a_k(m,k)-1}{k-2}\right],$$

és mivel a lemma feltevése miatt $2k-2>a_k(m,k)-1$, igy

$$\binom{a_k(m,k)-1}{k}-\binom{a_k(m,k)-1}{k-1}\geq\binom{a_k(m,k)}{k}-\binom{a_k(m,k)}{k-1}. \tag{13.16}$$

Végül, (13.16), (13.15) és (13.13) a bizonyitandó

$$F_k(m)-m\geq 1$$

egyenlőtlenséghez vezetnek.

13.5. <u>Lemma.</u> Ha

$$m>\binom{2k-1}{k}+\binom{2(k-1)-1}{k-1}+\ldots+\binom{1}{1} \tag{13.17}$$

akkor

$$F_k(m)<m.$$

Másrészt viszont, ha

$$m\leq\binom{2k-1}{k}+\binom{2(k-1)-1}{k-1}+\ldots+\binom{1}{1}, \tag{13.18}$$

akkor

$$F_k(m) \geq m,$$

ahol egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha

$$m = \binom{2k-1}{k} + \binom{2(k-1)-1}{k-1} + \ldots + \binom{2s-1}{s} \tag{13.19}$$

valamilyen s -re $(1 \leq s \leq k)$.

<u>Bizonyitás.</u> Tekintsük először a (13.17) esetet. $a_i(m,k) = 2i-1 \quad (1 \leq i \leq k)$ itt nem teljesülhet, mert ez a (13.19) esethez tartozik. Igy létezik egy $r \; (1 \leq r \leq k)$, melyre

$$a_r(m,k) > 2r-1$$

$$a_i(m,k) = 2i-1 \qquad (r < i \leq k).$$

Mivel

$$m - F_k(m) = \left[\binom{a_r(m,k)}{r} + \ldots\right] - \left[\binom{a_r(m,k)}{r-1} + \ldots\right],$$

az állítás a 13.3. Lemmából következik:

$$\binom{a_r(m,k)}{r} + \ldots \quad > F_r\left[\binom{a_r(m,k)}{r} + \ldots\right].$$

A (13.18) eset kétféleképpen következhet be:

1. Ha (13.19) teljesül, akkor $F_k(m) = m$ nyilvánvaló.

2. Valamilyen r -re $(1 < r \leq k)$

$$a_r(m,k) < 2r-1$$

és

$$a_i(m,k) = 2i-1 \qquad (r < i \leq k).$$

Mivel

$$m - F_k(m) = \left[\binom{a_r(m,k)}{r} + \dots\right] - \left[\binom{a_r(m,k)}{r-1} + \dots\right],$$

igy az állitás a 8.4. Lemmából következik:

$$\binom{a_r(m,k)}{r} + \dots < F_r\left[\binom{a_r(m,k)}{r} + \dots\right].$$

Miután sikerült megállapitanunk $F_k(m) > m$, $F_k(m) = m$ és $F_k(m) < m$ szükséges és elégséges feltételeit, visszatérhetünk eredeti problémánkhoz.

8.1. Tétel. Legyenek $1 \leq k \leq n$ pozitiv egészek, X egy n elemü halmaz,

$$\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\} \qquad |A_i| = k \qquad (1 \leq i \leq m)$$

X részhalmazainak egy rendszere. Ha

$$(8.20) \qquad m \leq \binom{2k-1}{k} + \binom{2(k-1)-1}{k-1} + \dots + \binom{1}{1},$$

akkor létezik egy

$$(13.21) \qquad \mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\} \quad |B_i| = k-1,\ B_i \subset A_i \ (1 \le i \le m)$$

rendszer, mig ellenkező esetben nem szükségképpen.

Bizonyitás. Először az utóbbi esetet igazoljuk. Ha (13.20) ellenkezője teljesül, akkor a 13.5 Lemma alapján $F_k(m) < m$. Tudjuk azonban (12.1. Tétel), hogy létezik egy olyan $\mathcal{A}$ rendszer, melyre $|\mathcal{A}| = m$ és $|c(\mathcal{A})| = F_k(m)$. Igy a (13.21)-et kielégitő $\mathcal{B}$ rendszer nem létezhet.

A bizonyitás másik részében, ahol egy $\mathcal{B}$ rendszer létezését igazoljuk, szükségünk van a következő tételre, amely az ugynevezett házasság probléma megoldását adja (lásd pl. [7]).

Házasság-Tétel. Legyen G egy irányitatlan páros gráf. Legyen E és F a csucsok két olyan diszjunkt halmaza, amely együttesen tartalmazza az összes csucsot, és minden él E és F között van. Ha G rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy bármely i $(1 \le i \le |E|)$ darab E-beli csucs legalább i darab F-beli csuccsal van összekötve, akkor létesithető egy egy-egyértelmü megfeleltetés E és F egy $|E|$ elemü részhalmaza között ugy, hogy az egymásnak megfelelő csucsok G-ben éllel vannak összekötve.

A mi esetünkben $E = \mathcal{A}$, $F = c(\mathcal{A})$ és $A \in \mathcal{A}$, $B \in c(\mathcal{A})$ akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $A \supset B$. Igy elegendő igazolnunk, hogy minden

$$\mathcal{C} = \{A_{i_1}, \dots, A_{i_r}\} \subset \mathcal{A}$$

részrendszer esetén található legalább r darab elem $c(\mathcal{C})$-
-ben. Mivel $r \leq m$, igy (13.20) miatt

$$r \leq \binom{2k-1}{k} + \binom{2(k-1)-1}{k-1} + \ldots + \binom{1}{1},$$

tehát használhatjuk a 13.5. Lemmát:

(13.21) $$F_k(m) \geq m.$$

De a 12.1. Tétel alapján

$$|c(\mathcal{C})| \geq F_k(m).$$

Utóbbi (13.21)-gyel éppen azt jelenti, hogy a gráf rendelkezik a kivánt tulajdonsággal. A házasság tétel alkalmazásával nyert egy-egy értelmü leképezés a kivánt $\mathcal{B}$ rendszert szolgáltatja.

Következmény. Ha $2k-1 \geq n$, akkor (13.20) mindig teljesül és $\mathcal{B}$ mindig létezik.

Ez azonnal következik az

$$\binom{n}{k} \leq \binom{2k-1}{k} \leq \binom{2k-1}{k} + \ldots + \binom{1}{1}$$

egyenlötlenségböl és abból a tényből, hogy $\mathcal{A}$ -nak legfeljebb $\binom{n}{k}$ eleme van.

IRODALOM

[1] SPERNER, E.: Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge, Math. Z. 27(1928)544-548.

[2] LUBELL, F.: A short proof of Sperner's theorem, J. Combinatorial Theory 1(1966)

[3] P. ERDŐS, On a lemma of Littlewood and Offord, Bull. of the Amer.Math. Soc. 51(1946)898-902.

[4] KLEITMAN, D.: On a lemma of Littlewood and Offord and the distribution of certain sums, Math. Z. 90(1965)251-259.

[5] KATONA, G.: On a conjecture of Erdős and a stronger form of Sperner's theorem, Studia Sci.Math.Hung. 1(1966)59-63.

[6] KATONA, G.: A theorem of finite sets, Graph Theory, Proc of the Colloq. held at Tihany, 1966 September, Akadémiai Kiadó, Budapest 1968.

[7] ORE, O.: Graphs and matching theorems, Duke Math.J. 22(1955) 625-639.

Megjegyzés (Katona Gyula, 2011 január 9.). Valaki belefirkált a dolgozatba. A 7. és 8. fejezet minden számozásában a fejezetszámot 5-tel növelte, kihúzott 2 megjegyzést a 18. és 33. oldalakon. Ceruzával. Nem az én írásom. Nem értem a célokat és okokat. Ki lehetett? Az opponens?