Colloques internationaux C.N.R.S.

N° 260 - PROBLÈMES COMBINATOIRES ET THÉORIE DES GRAPHES

OPTIMIZATION FOR ORDER IDEALS UNDER A WEIGHT ASSIGNMENT (*)

G. O. H. KATONA

Institute of the Hungarian Academy of Sciences, 1053 Budapest V, Realtanoda u. 13-15, Hongrie

Résumé. — On appelle famille héréditaire une famille $\mathcal{F}$ de parties d'un ensemble de cardinalité n si $B \in \mathcal{F}$ et $A \subset B$ alors $A \in \mathcal{F}$. Etant donné une fonction réelle $w(x)$ $(0 \leqq x \leqq n)$ (fonction de poids) notre but est de déterminer pour quelles familles $\mathcal{F}$ l'expression $\sum_{A \in \mathcal{F}} w(|A|)$ atteint son minimum où nous supposons que $\mathcal{F}$ est une famille héréditaire de cardinalité N (N est fixé).

Si $w(x)$ est une fonction monotone, croissante, le problème est alors trivial ; les éléments de $\mathcal{F}$ doivent être tous les parties de cardinalités 0, 1, ..., k plus certaines parties de cardinalité $k + 1$, par exemple les plus petites dans l'ordre lexicographique (quasi-sphère).

Le problème devient moins évident si $w(x)$ est une fonction monotone, décroissante. Dans ce cas on doit définir $\mathcal{F}$ comme les N premières parties dans l'ordre lexicographique (quasi-cylindre).

Si la fonction $w(x)$ est croissante puis décroissante (ou l'inverse), alors une famille optimale $\mathcal{F}$ doit être l'intersection ou l'union d'une quasi-sphère et d'un quasi-cylindre selon les cas.

Les résultats ci-dessus ont été obtenus en collaboration avec R. Ahlswede, et feront partie d'un article à paraître dans « Advances in Mathematics ».

Many extremal problems for families of subsets are such that it is easy to prove that the extremal family $\mathcal{F}$ has the order ideal property (i.e. $A \subset B \in \mathcal{F}$ implies $A \in \mathcal{F}$). This fact makes sense to study order ideals, but there are other motivations, too.

Let $f(x)$ be a real-valued function on the non-negative integers. We want to minimize the value

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} f(|A|) \tag{1}$$

where $\mathcal{F}$ is an order ideal, $|\mathcal{F}| = N$ is fixed and $|X|$ means the size of X. If $f(x)$ is monotonically increasing then the problem is trivial. We have to choose the N subsets with the smallest possible size, that is, all the sets with sizes

$0, 1, \ldots, k$

$$\left(\binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{k} \leqslant N < \binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}\right)$$

and some of the sets with size $k + 1$. We call such an arrangement a *quasi-sphere* if the sets of size $k + 1$

(*) This is an abstract of the talk of the author at the conference. However its results are contained in a common paper with R. Ahlswede [1].

are chosen in lexicographic order (as 0,1 sequences).

On the other hand, a family of the first N subsets in lexicographic order is called a *quasi-cylinder.*

Théorème — *If* $f(x)$ *is monotonically decreasing then* (1) *takes its maximal value for a quasi-cylinder. If* $f(x)$ *is increasing in the interval* $[0, k]$ *and decreasing in* $[k, n]$ *(for some* $0 < k < n$*), then the union of a quasi-cylinder and a quasi-sphere gives the optimum in* (1). *On the other hand, if* $f(x)$ *is first decreasing and then increasing, then the intersection of a quasi-cylinder and a quasi-sphere is optimal for* (1).

As an application, it is easy to prove a theorem of Lindsey (see [2], [3], [4] and [5]) :

$$\max_{|\mathcal{F}|=N} \left|\{(A, B) : A, B \in \mathcal{F}, |A - B| + |B - A| = 1\}\right| \quad (2)$$

is assumed for a quasi-cylinder.

To prove this, we have to show first, that (2) is maximal for an order ideal. This is trivial. On the other hand (2) is equal to

$$\max_{|\mathcal{F}|=N} \sum_{i=1}^{n} \left| \{ (A, B) : A, B \in \mathcal{F}, A \subset B, |B| = |A| + 1 = i \} \right| = \max_{|\mathcal{F}|=N} \sum_{i=1}^{n} \left| \{ B : B \in \mathcal{F}, |B| = i \} \right| i =$$

$$= \max_{|\mathcal{F}|=N} \sum_{B \in \mathcal{F}} |B| = - \min_{|\mathcal{F}|=N} \sum_{B \in \mathcal{F}} (-|B|) .$$

As the function $f(x) = -x$ is decreasing, our theorem leads to the desired statement.

In [1] there is another application for random graphs.

References

[1] R. AHLSWEDE and G. O. H. KATONA, Contributions to the geometry of Hamming spaces, *Discrete Math.* **17** (1977) 1-22.

[2] G. F. CLEMENTS, Sets of lattice points which contain a maximal number of edges, *Proc. Amer. Math. Soc.* **27** (1971) 13-15.

[3] J. H. LINDSEY, Assignement of numbers to vertices, *Amer. Math. Monthly* **71** (1964) 508-516.

[4] A. J. BERNSTEIN, Maximally connected arrays on the *n*-cube, *SIAM J. Appl. Math.* **15** (1967) 1485-1489.

[5] L. H. HARPER, Optimal assigments of number to vertices, *J. Soc. Industr. Appl. Math.* **12** (1964) 131-135.