АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

3

МОСКВА · 1977

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том XXII — 1977 — Выпуск 3

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИНЫ СУММЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

Г. О. Х. КАТОНА

Введение

Цель настоящей заметки — расширить результаты работы [1], вышедшей на венгерском языке. Ради полноты мы повторим здесь и результаты [1].

Теорема 1 (см. [1]). *Пусть ξ и η — независимые одинаково распределенные случайные векторы в d-мерном евклидовом пространстве. Тогда*

$$\mathbf{P}(|\xi+\eta|\geqslant x)\geqslant\frac{1}{2}\mathbf{P}^2(|\xi|\geqslant x).\tag{1}$$

Эскиз доказательства. 1. Если x_1, x_2, x_3 ($x\leqslant|x_1|$, $|x_2|$, $|x_3|$) — векторы в 3-мерном евклидовом пространстве, то существует пара x_i, x_j ($1\leqslant i<j\leqslant 3$), удовлетворяющая условию $|x_i+x_j|\geqslant x$.

2. Векторы x_1, x_2, x_3 в d-мерном евклидовом пространстве определяют 3-мерное подпространство; таким образом, утверждение 1 имеет место и в d-мерном пространстве.

3. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($x\leqslant|x_i|$, $1\leqslant i\leqslant n$) — векторы в d-мерном пространстве, а G — граф с вершинами $x_1, \ldots, x_n$, в котором вершины x_i и x_j связаны ребром тогда и только тогда, когда $|x_i+x_j|\geqslant x$. Вследствие утверждения 2 граф не имеет пустых треугольников. Тогда можно применить следующую теорему:

Теорема Турана ([2]). *Пусть G — граф с n вершинами, не имеющий пустого подграфа, число вершин которого равно k, и целые числа q и r ($0\leqslant r<k-1$) определяются соотношением $n=q(k-1)+r$. Тогда число ребер в G не меньше числа ребер в графе $T_{n,k}$, который является объединением r полных графов с $q+1$ вершинами и $k-1-r$ полных графов с q вершинами (в полном графе каждые две вершины соединены ребром).*

Для определенного выше графа G, очевидно, $k=3$, поэтому согласно теореме Турана минимальное число ребер в G равно $n(n-2)/4$, если $n=2q$, и $(n-1)^2/4$, если $n=2q+1$. Минимальное число ребер графа G — это минимальное число неупорядоченных пар (i,j), удовлетворяющих условию $|x_i+x_j|\geqslant x$ $(i\neq j)$. Так как $|x_i+x_i|=2|x_i|\geqslant x$, то минимальное число упорядоченных пар равно $n(^1/_2 n-1)+n=n^2/2$ в случае $n=2q$ и равно $^1/_2(n-1)^2+n=(n^2+1)/2>n^2/2$ в случае $n=2q+1$.

4. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — векторы, ξ и η — независимые случайные векторы с $\mathbf{P}(\xi=x_i)=\mathbf{P}(\eta=x_i)=1/m$. Предположим, что число век-

торов, удовлетворяющих условию $|x_i| \geqslant x$, равно n. Следовательно, число упорядоченных пар i, j, для которых $|x_i + x_j| \geqslant x$, не меньше $n^2/2$, и поэтому

$$\mathbf{P}(|\xi + \eta| \geqslant x) \geqslant \frac{1}{2}\frac{n^2}{m^2} = \frac{1}{2}\mathbf{P}^2(|\xi| \geqslant x).$$

5. Для любого случайного вектора ξ существует последовательность случайных векторов, описанных в п.4, которая слабо сходится к ξ. Таким образом, теорема 1 имеет место для любых случайных векторов в d-мерном пространстве.

Следующий пример показывает, что коэффициент $^1/_2$ в оценке (1) нельзя увеличить. Пусть x_1, x_2, x_3 — векторы в плоскости с длинами $|x_1| = |x_2| = x$, $|x_3| = {}^1/_2 x - \varepsilon$; угол между x_1 и x_2 равен $120° + \varepsilon$, а углы между x_1 и x_3 и между x_2 и x_3 равны $120° - {}^1/_2\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ и достаточно мало); пусть, наконец,

$$\mathbf{P}(\xi = x_1) = \mathbf{P}(\xi = x_2) = p/2, \quad \mathbf{P}(\xi = x_3) = 1 - p.$$

Легко видеть, что $|x_1 + x_2| = x - \varepsilon_1$ и $|x_1 + x_3| = |x_2 + x_3| = x\sqrt{3}/2 + \varepsilon_2$. Итак, $|\xi + \eta| \geqslant x$ тогда и только тогда, когда $\xi = \eta = x_1$ или $\xi = \eta = x_2$; значит,

$$\mathbf{P}(|\xi + \eta| \geqslant x) = 2\frac{p^2}{4} = \frac{1}{2}\mathbf{P}^2(|\xi| \geqslant x).$$

Непрерывные варианты некоторых комбинаторных задач

Вначале мы покажем, как можно сформулировать непрерывные варианты некоторых комбинаторных теорем.

Пусть X — конечное или бесконечное множество. Совокупность $G = (X, E)$ называется *ориентированным g-графом*, если $E \subset X^g$, т. е. E состоит из упорядоченных наборов $e = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_g})$, где $x_{i_j} \in X$. Каждый набор $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_g})$ называется *ребром*. Кратные ребра исключены. Число ребер графа G будем обозначать $N(G)$. Если $Y \subset X$, то *подграф* $G_Y = (X, E)_Y$ содержит те ребра e графа G, для которых $x_{i_j} \in Y$ ($j = 1, \ldots, g$).

Пусть $\mathcal{G}_t$ — некоторый класс t-вершинных ориентированных g-графов. Класс $\mathcal{G}_t$ называется *симметричным*, если из $(T, E) \in \mathcal{G}_t$ следует $(T, E') \in \mathcal{G}_t$, где E' получается из E с помощью произвольной перенумерации вершин. Класс $\mathcal{G}_t$ называется *наследственным*, если из $(T, E) \in \mathcal{G}_t$ и $E' \subset E$ вытекает $(T, E') \in \mathcal{G}_t$.

Предположим, что $T = \{1, 2, \ldots, t\}$ и $G = (T, E) \in \mathcal{G}_t$ имеет следующее свойство: $(x_{i_1}, \ldots, a, \ldots, x_{i_g}) \in E$ тогда и только тогда, когда $(x_{i_1}, \ldots, b, \ldots, x_{i_g}) \in E$, иначе говоря, a и b *эквивалентны в* G. Для таких G граф $G^*(a, b) = (T \setminus \{b\}, E^*(a, b))$ определяется следующим образом: $E^*(a, b)$ состоит из последовательностей $(x'_{i_1}, \ldots, x'_{i_g})$, где $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_g}) \in E$ и $x'_{i_j} = x_{i_j}$, если $x_{i_j} \neq b$, и $x'_{i_j} = a$, если $x_{i_j} = b$ (иначе говоря, мы склеиваем вершины a и b). Класс $\mathcal{G}_t^*(a, b)$ состоит из всех таких графов $G^*(a, b)$, где a и b эквивалентны в G. Если класс $\mathcal{G}_t^*$ симметричен, то $\mathcal{G}_t^*(a, b)$ не зависит от выбора склеенных вершин a и b, т. е. $\mathcal{G}_t^*(a, b) = \mathcal{G}_t^*$.

По графу G^* построим t-вершинный граф $\hat{G^*} = (T, \hat{E^*})$, где $\hat{E^*} = E^* \bigcup$ {все наборы $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_g})$ элементов из T, содержащие b по крайней мере один раз}. Пусть $\hat{\mathcal{G}_t^*}$ состоит из всех графов $\hat{G^*}$, построенных по графам $G^* \in \mathcal{G}_t^*$. Класс $\mathcal{G}_t$ называется *допустимым*, если он симметричен, наследствен и

$$\hat{\mathcal{G}_t^*} \subset \mathcal{G}_t. \tag{2}$$

Пример 1. Пусть $g = 2$, $t = 3$ и $\mathcal{G}_3 =$ {3-вершинные графы, не имеющие противоположно ориентированных ребер или имеющие не более 2 петель}. Легко видеть, что класс $\mathcal{G}_3$ допустим.

Будем говорить, что $\mathcal{G}_t \in D(c)$, если в любом конечном ориентированном n-вершинном g-графе G, который не имеет подграфа $G_T \in \mathcal{G}_t$ ($|T| = t$)* и который (в случае $t > |X|$) не является подграфом некоторого графа в $\mathcal{G}_t$,

$$N(G) \geqslant cn^g. \tag{3}$$

Пример 2. Пусть класс $\mathcal{G}_3$ такой же, как в примере 1, и G — n-вершинный ориентированный 2-граф, который не имеет подграфов из $\mathcal{G}_3$. Это значит, что среди любых трех вершин графа G существует пара вершин, соединенных противоположно ориентированными ребрами и что G содержит все петли. По теореме Турана (при $k = 3$) число пар противоположно ориентированных ребер не меньше $n(n-2)/4$. Поэтому общее число ребер в G (с учетом n петель) не меньше $n^2/2$, т. е. $\mathcal{G}_3 \in D(^1/_2)$.

Теорема 2. *Пусть (X, σ, μ) — пространство с конечной мерой, $E \subset X^g$ — измеримое множество в произведении $(X, \sigma, \mu)^g = (X^g, \sigma_g, \mu_g)$. Предположим, что класс $\mathcal{G}_t$ допустим, $\mathcal{G}_t \in D(c)$, граф $G = (X, E)$ не содержит t-вершинного подграфа $G_T \in \mathcal{G}_t$ и (в случае $t > |X|$) G не является подграфом некоторого графа из $\mathcal{G}_t$. Тогда*

$$\mu_g(G) = \mu_g(E) \geqslant c\mu_g(X^g). \tag{4}$$

Доказательство. 1. Очевидно, что теорема справедлива в случае $t \geqslant n$, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mu(x_i) = \alpha$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$: $\mu_g(G) = \alpha^g N(G)$ и $\mu_g(X^g) = \alpha^g n^g$.

2. Теперь мы докажем, что если теорема имеет место для $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mu(x_i) = \alpha_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, то она справедлива и для $Y = \{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$, $\mu'(y_i) = \alpha_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-2)$, $\mu'(y_{n-1}) = \alpha_{n-1} + \alpha_n$. Пусть $G_1 = (Y, E_1)$ $(E_1 \subset Y^g)$ — граф, удовлетворяющий условиям теоремы. Граф $G_2 = (X, E_2)$ определяется следующим образом: $e = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_g}) \in E_2$ тогда и только тогда, когда $(y_{i_1}, \ldots, y_{i_g}) \in E_1$, где $y_n = y_{n-1}$. Равенства

$$\mu_g(E_2) = \mu'_g(E_1) \quad \text{и} \quad \mu_g(X^g) = \mu'_g(Y^g) \tag{5}$$

---

* Символ $|A|$ обозначает число элементов множества A.

очевидны. Предположим, что в G_2 имеется подграф $(G_2)_T$ ($|T| = t$) из $\mathcal{G}_t$. Если множество T не содержит одновременно x_{n-1} и x_n, то и в G_1 существует t-вершинный подграф из $\mathcal{G}_t$, а это противоречит определению G_1. Если $x_{n-1} \in T$, $x_n \in T$, то $((G_2)_T)^* \in \mathcal{G}_t^*$ и $((G_2)_T)^{\hat{*}} \in \mathcal{G}_t^{\hat{*}}$ (мы склеивали x_{n-1} и x_n), где $((G_2)_T)^*$ — $(t-1)$-вершинный граф, изоморфный $(t-1)$-вершинному подграфу $P = (U, E)$ ($U = \{y_i : x_i \in T \setminus \{x_n\}$) графа G_1. Пусть $y \in Y \setminus U$ — некоторая вершина графа G_1, и $R = (U \cup \{y\}, E')$, где $E' = E \cup \{$все наборы $(y_{i_1}, \ldots, y_{i_g})$ элементов из $U \cup \{y\}$, содержащие y по крайней мере один раз$\}$. Очевидно, граф R изоморфен графу $((G_2)_T)^{\hat{*}}$. Однако $((G_2)_T)^{\hat{*}} \in \mathcal{G}_t$ согласно (2) и подграф $(G_1)_{U \cup \{y\}} = (U \cup \cup \{y\}, E'')$ удовлетворяет условию $E'' \subset E'$: из наследственности следует, что граф $(G_1)_{U \cup \{y\}}$ изоморфен некоторому графу из $\mathcal{G}_t$. Таким образом, G_1 имеет подграф из $\mathcal{G}_t$, но это противоречит определению G_1. Следовательно, G_2 тоже удовлетворяет условиям теоремы, и поэтому

$$\mu_g(E_2) \geqslant c\mu_g(X^g). \tag{6}$$

Утверждение $\mu'_g(E_1) \geqslant c\mu'_g(Y^g)$ вытекает из (5) и (6).

3. Из 1 и 2 следует по индукции, что теорема справедлива и в случае $t \geqslant n$, $\mu(x_i) = k_i\alpha$ ($1 \leqslant i \leqslant n$), где $\alpha \geqslant 0$ — любое число; k_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) — целые числа.

4. Теперь мы докажем теорему в случае произвольного пространства (X, σ, μ) с конечной мерой. Пусть $E \subset X^g$ — измеримое множество, удовлетворяющее условиям теоремы, и $n \geqslant t$ — целое число. Введем функцию $f(y_1, \ldots, y_n)$ ($y_i \in X$, $1 \leqslant i \leqslant n$), равную числу таких упорядоченных последовательностей $i_1, \ldots, i_g$ ($1 \leqslant i_j \leqslant n$ для $1 \leqslant j \leqslant g$), что $(y_{i_1}, \ldots, y_{i_g}) \in E$. Если $y_i \neq y_j$ ($i \neq j$), то $G = (X, E)$ и, следовательно, $G_{\{y_1, \ldots, y_n\}}$ не содержит t-вершинного подграфа G_T из $\mathcal{G}_t$. Тогда ввиду (3)

$$f(y_1, \ldots, y_n) \geqslant cn^g.$$

Если среди $y_1, \ldots, y_n$ имеются равные элементы, то последнее неравенство следует из п. 3 этого доказательства. Таким образом, справедлива оценка

$$\int_{X^n} f(y_1, \ldots, y_n)\, d\mu \geqslant \int_{X^n} cn^g d\mu = cn^g \mu(X^n). \tag{7}$$

Положим

$$I(i_1, \ldots, i_g, y_1, \ldots, y_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } (y_{i_1}, \ldots, y_{i_g}) \in E, \quad 1 \leqslant i_j \leqslant n \ (1 \leqslant j \leqslant g), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, $f(y_1, \ldots, y_n) = \sum\limits_{i_1, \ldots, i_g = 1}^{n} I(i_1, \ldots, i_g, y_1, \ldots, y_n)$, поэтому

$$\int_{X^n} f(y_1, \ldots, y_n)\, d\mu = \int_{X^n} \Big(\sum_{i_1, \ldots, i_g = 1}^{n} I(i_1, \ldots, i_g, y_1, \ldots, y_n) \Big) d\mu =$$

$$= \sum_{i_1, \ldots, i_g = 1}^{n} \int_{X^n} I(i_1, \ldots, i_g, y_1, \ldots, y_n)\, d\mu. \tag{8}$$

Если $i_1, \ldots, i_g$ — различные числа, то

$$\int\limits_{X^n} I(i_1, \ldots, i_g, y_1, \ldots, y_n)\,d\mu = \int\limits_{X^n} I(1, \ldots, g, y_1, \ldots, y_n)\,d\mu =$$

$$= \int\limits_{E \times X^{n-g}} 1\ d\mu = \mu_g(E)\,\mu(X^{n-g}). \tag{9}$$

Если среди $y_1, \ldots, y_n$ есть равные элементы, то

$$\int\limits_{X^n} I(i_1, \ldots, i_g, y_1, \ldots, y_n)\,d\mu \leqslant \mu(X^n). \tag{10}$$

Из (7), (8), (9) и (10) вытекает, что

$$cn^g \mu(X^n) \leqslant \int\limits_{X^n} f\,d\mu \leqslant \frac{n!}{(n-g)!}\mu_g(E)\,\mu(X^{n-g}) + \left(n^g - \frac{n!}{(n-g)!}\right)\mu(X^n);$$

значит,

$$c\mu(X^g) \leqslant \frac{n!}{n^g(n-g)!}\mu_g(E) + \left(1 - \frac{n!}{n^g\,(n-g)!}\right)\mu(X^g).$$

Так как $n!/n^g\,(n-g)! \to 1$, когда $n \to \infty$, то $c\mu\,(X^g) \leqslant \mu_g\,(E)$. Теорема доказана.

Пусть X — множество вершин. Если E — множество неупорядоченных последовательностей $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_g})$, то $G = (X, E)$ называется *неориентированным g-графом.* В случае, когда $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_g})$ различны в каждой последовательности, G называется *однородным g-графом.* Ребро $(x_{i_1}, \ldots$ $\ldots, x_{i_g})$ в неориентированном g-графе можно понимать как множество всех перестановок $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_g})$, т. е. как класс всех ориентированных ребер, получаемых из $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_g})$. Если G — неориентированный однородный g-граф, то $\widetilde{G}$ обозначает ориентированный g-граф, содержащий всевозможные петли (т. е. ребра $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_g})$, в которых не все элементы различны) и все ориентированные варианты ребер из G. Если $\mathcal{G}_t$ — некоторый класс t-вершинных неориентированных однородных g-графов, то $\widetilde{\mathcal{G}}_t$ обозначает класс всех графов $\widetilde{G}$, где $G \in \mathcal{G}_t$, и всех графов, не содержащих всех петель. Класс $\mathcal{G}_t$ некоторых t-вершинных неориентированных однородных g-графов называется *допустимым,* если класс $\widetilde{\mathcal{G}}_t$ допустим.

Нетрудно показать, что если G — n-вершинный неориентированный однородный g-граф и

$$N(G) \geqslant \binom{n}{g} - (1-c)\frac{n^g}{g!}, \tag{11}$$

то для $\widetilde{G}$ имеет место (3). Действительно, число ребер, содержащих меньше g вершин, равно $n^g - n!/(n-g)!$, а число ориентированных вариантов ребер в G не меньше $g!\left(\binom{n}{g} - (1-c)n!/g!\right)$. Следовательно,

$$N(\widetilde{G}) \geqslant g!\left(\binom{n}{g} - (1-c)\frac{n^g}{g!}\right) + n^g - \frac{n!}{(n-g)!} = cn^g,$$

т. е. (3) имеет место.

Пример 3. Непрерывный вариант теоремы Турана. Теорема Турана утверждает, что если n-вершинный неориентированный 2-граф G

не имеет k-вершинного пустого подграфа ($\mathcal{G}_k = \{k$-вершинный пустой граф$\}$), то

$$N(G) \geqslant r\binom{q+1}{2} + (k-1-r)\binom{q}{2},$$

где $n = q(k-1) + r$ $(0 \leqslant r < k-1)$. Функция $\binom{q}{2} = q(q-1)/2$ является выпуклой, поэтому

$$r\binom{q+1}{2} + (k-1-r)\binom{q}{2} \geqslant (k-1)\binom{(r(q+1)+(k-1-r)q)/(k-1)}{2} =$$
$$= (k-1)\binom{n/(k-1)}{2} = \frac{n^2}{2(k-1)} - \frac{n}{2}.$$

При $g = 2$ правая часть (11) имеет вид $(cn^2 - n)/2$, следовательно, в нашем случае (11) выполняется при $c = 1/(k-1)$. Класс $\widetilde{\mathcal{G}}_k$ — допустимый, значит, можно использовать теорему 2: *Если неориентированный 2-граф G над (X, σ, μ) содержит все петли и не имеет k-вершинного подграфа, который содержит только петли, то*

$$\mu_2(G) \geqslant \frac{1}{k-1}\mu_2(X^2).$$

Если X — единичный интервал и μ — мера Лебега, то это утверждение в случае $k = 3$ имеет наглядную форму: пусть G — измеримое множество в единичном квадрате, симметричное относительно диагонали; если каждый прямоугольник, стороны которого параллельны сторонам квадрата, а одна из вершин лежит на диагонали, имеет еще одну вершину в G, то $\mu_2(G) \geqslant {}^1/_2$ (см. рис. 1).

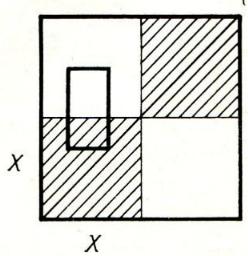

Рис. 1

П р и м е р 4. Обобщенная проблема Турана. (Предыдущая проблема для неориентированных однородных g-графов.) Эта проблема еще не разрешена. Например, в случае $g = 3$, $k = 4$ кажется, что оптимальный граф имеет следующую конструкцию. Вершины графа разделяются на такие классы A, B, C, что их размеры «почти равны». Оптимальный граф G содержит все ребра, лежащие одном классе, и все ребра, имеющие две вершины в A и одну в B, или две вершины в B и одну в C, или две вершины в B и одну в C. Легко видеть, что в этом случае c равнялось бы 4/9. Пусть $c_{g,k}$ — наилучшая константа в (11) для обобщенной проблемы Турана. Из примера 3 мы уже знаем, что $c_{2,k} = 1/(k-1)$. В работе [3] доказано, что минимальное число ребер не меньше $\binom{n}{g} \Big/ \binom{k}{g}$. Из этого легко видеть, что

$$c_{g,k} \geqslant \binom{k}{g}^{-1}. \qquad (12)$$

В работе [4] доказан более сильный результат: минимальное число ребер не меньше $n^g k^{1-g} (g-1)^{g-1} g^{-g}$. Отсюда следует, что

$$c_{g,k} \geqslant \frac{(g-1)^{g-1}}{g^g} \cdot \frac{g!}{k^{g-1}}. \qquad (13)$$

Оценка (13) лучше (12), если $k \gg g$. Эти оценки еще далеки от самой точной. Например, в случае $g = 3$, $k = 4$ мы имеем из (12) $c_{3,4} \geqslant 1/4$, но на самом деле, видимо, $c_{3,4} = 4/9$. Обзор литературы, посвященной этой проблеме, можно найти в [5].

Нам потребуется одно обобщение теоремы 2. Пусть $T = T_1 \cup \ldots \cup T_u$ $(T_i \cap T_j = \varnothing,\ i \neq j)$ — разбиение множества T вершин, и $\mathcal{G}(t_1, \ldots, t_u)$ $(t_i = |T_i|)$ — некоторый класс t-вершинных $(t = |T|)$ ориентированных g-графов. Класс $\mathcal{G}(t_1, \ldots, t_u)$ называется *симметричным*, если из $(T, E) \in \mathcal{G}(t_1, \ldots, t_u)$ следует $(T, E') \in \mathcal{G}(t_1, \ldots, t_u)$, где E' получается из E с помощью произвольной перестановки вершин в одном множестве T_i $(1 \leqslant i \leqslant u)$. Определение наследственности не требует изменения.

Предположим, что $a, b \in T_i$ $(a \neq b)$ и граф $G = (T, E) \in \mathcal{G}(t_1, \ldots, t_u)$ имеет следующее свойство: $(x_{i_1}, \ldots, a, \ldots, x_{i_g}) \in E$ тогда и только тогда, когда $(x_{i_1}, \ldots, b, \ldots, x_{i_g}) \in E$. Для таких G граф $G^* = (T \setminus \{b\}, E^*)$ определяется следующим образом: E^* состоит из последовательностей $(x'_{i_1}, \ldots, x'_{i_g})$, где $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_g}) \in E$ и $x'_{i_j} = x_{i_j}$, если $x_{i_j} \neq b$, и $x'_{i_j} = a$, если $x_{i_j} = b$. Для каждого графа G^* построим t-вершинный граф $\hat{G^*} = (T, \hat{E^*})$, где $\hat{E^*} = E^* \cup \{$все последовательности элементов из T, содержащие b по крайней мере один раз$\}$. Класс $\hat{\mathcal{G}^{*i}}(t_1, \ldots, t_u)$ состоит из всех таких графов $\hat{G^*}$. Класс $\mathcal{G}(t_1, \ldots, t_u)$ называется *допустимым*, если он симметричен, наследствен и

$$\hat{\mathcal{G}^{*i}}(t_1, \ldots, t_u) \subset \mathcal{G}(t_1, \ldots, t_u) \quad (1 \leqslant i \leqslant u).$$

Непрерывная функция $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_u)$ $(\alpha_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, u)$ называется *однородной*, если для любого неотрицательного числа c

$$f(c\alpha_1, \ldots, c\alpha_u) = c^g f(\alpha_1, \ldots, \alpha_u).$$

Разобьем некоторым образом вершины ориентированного g-графа G на подмножества $A_1, \ldots, A_u$:

$$\bigcup_{i=1}^{u} A_i = X, \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j.$$

Мы пишем $\mathcal{G}(t_1, \ldots, t_u) \in D(f)$, если для любого конечного ориентированного g-графа G, который не имеет t'-вершинного $\left(t' = \sum_{i=1}^{u} \min(|A_i|, t_i)\right)$

подграфа $G_{T'}$, являющегося подграфом и некоторого графа из $\mathcal{G}(t_1, \ldots, t_u)$ с $T'_i \subset A_i$, $|T'_i| = \min(|A_i|, t_i)$, $\bigcup_{i=1}^{u} T'_i = T'$, выполняется неравенство

$$N(G) \geqslant f(|A_1|, \ldots, |A_u|).$$

Теорема 3. *Пусть* (X, σ, μ) — *пространство с конечной мерой,* $X = \bigcup_{i=1}^{u} X_i$ $(X_i \cap X_j = \varnothing,\ i \neq j)$ — *разбиение множества* X *и* $E \subset X^g$ — *измеримое множество в произведении* $(X, \sigma, \mu)^g = (X^g, \sigma_g, \mu_g)$. *Предположим, что класс* $\mathcal{G}(t_1, \ldots, t_u)$ *допустим,* f *однородна,* $\mathcal{G}(t_1, \ldots, t_u) \in D(f)$ *и граф* $G = (X, E)$ *не содержит* t'*-вершинного* $\left(t' = \sum_{i=1}^{u} \min(|A_i|, t_i)\right)$ *подграфа* $G_{T'}$, *являющегося подграфом и некоторого графа из* $\mathcal{G}(t_1, \ldots, t_u)$ *с* $T'_i \subset A_i$, $|T'_i| = \min(|A_i|, t_i)$, $\bigcup_{i=i}^{u} T'_i = T_i$. *Тогда*

$$\mu_g(E) \geqslant f(\mu(X_1), \ldots, \mu(X_u)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству теоремы 2.

П р и м е р 5. **Лемма 1.** *Если неориентированный однородный (без петель) 2-граф* $G = (X_1 \cup X_2, E)$ $(X_1 \cap X_2 = \varnothing,\ |X_1| = n_1,\ |X_2| = n_2)$ *не содержит пустого треугольника с точно одной вершиной из* X_1, *то*

$$N(G) \geqslant g(n_1, n_2),$$

где $g(n_1, n_2) = n_1 n_2 - \binom{n_1+1}{2}$, *если* $n_1 \leqslant n_2$, *и* $g(n_1, n_2) = \binom{n_2}{2}$, *если* $n_1 \geqslant n_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем индукцией по (n_1, n_2). Легко видеть, что в случаях $n_1 = 0$ и $n_2 = 0$ лемма справедлива. Пусть $n_1 \geqslant 1$ и $n_2 \geqslant 1$. Выберем элементы x_1 из X_1 и x_2 из X_2 так, чтобы $(x_1, x_2) \notin E$. (Если такой пары нет, то $N(G) \geqslant n_1 n_2 \geqslant g(n_1, n_2)$.) В G существует по крайней мере $n_2 - 1$ ребер, содержащих x_1 или x_2, так как треугольники (x_1, x_2, y), $y \in X_2 \setminus \{x_2\}$, непустые. По индукции, граф $G_{X_1 \cup X_2 \setminus \{x_1, x_2\}}$ содержит по крайней мере $g(n_1 - 1, n_2 - 1)$ ребер. Эти два множества ребер не пересекаются, следовательно,

$$N(G) \geqslant g(n_1 - 1, n_2 - 1) + n_2 - 1 = (n_1 - 1)(n_2 - 1) - \binom{n_1}{2} + n_2 - 1 =$$
$$= n_1 n_2 - \binom{n_1+1}{2},$$

если $n_1 \leqslant n_2$, и

$$N(G) \geqslant \binom{n_2 - 1}{2} + n_2 - 1 = \binom{n_2}{2},$$

если $n_1 \geqslant n_2$. Лемма доказана.

Пусть $\mathcal{G}(1, 2) = \{$3-вершинные графы, не имеющие противоположно ориентированных ребер или имеющие не более 2 петель$\}$ (как $\mathcal{G}_3$ в примере 1). Класс $\mathcal{G}(1, 2)$ допусти́м. Предположим, что ориентированный 2-граф $G = (X_1 \cup X_2, E)$ $(X_1 \cap X_2 \neq \varnothing)$ не имеет подграфа $G_T \in \mathcal{G}(1, 2)$ с $|T \cap X_1| = 1$.

Возьмем разбиение $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, где E_3 — множество петель, а E_1, E_2 — такие множества, что соотношения $(x, y) \in E_1$ и $(y, x) \in E_2$ не могут выполняться одновременно. Пусть множество E_1' содержит все неориентированные пары (x, y), где $(x, y) \in E_1$. Легко видеть, что граф $G_1 = (X_1 \cup X_2, E_1')$ удовлетворяет условиям леммы, и поэтому

$$|E_1'| = |E_1| \geqslant g(n_1, n_2),$$

где $n_1 = |X_1|$, $n_2 = |X_2|$. Подобным образом $|E_2| \geqslant g(n_1, n_2)$. С другой стороны, граф G содержит все петли, т. е. $|E_3| = n_1 + n_2$. Следовательно,

$$N(G) = |E| = |E_1| + |E_2| + |E_3| \geqslant$$
$$\geqslant \begin{cases} 2n_1n_2 - (n_1+1)n_1 + n_1 + n_2 \geqslant 2n_1n_2 - n_1^2, & \text{если } n_1 \leqslant n_2, \\ n_2(n_2-1) + n_1 + n_2 \geqslant n_2^2, & \text{если } n_1 \geqslant n_2, \end{cases}$$

и $\mathcal{G}(1, 2) \in D(f(n_1, n_2))$, где $f(n_1, n_2) = 2n_1n_2 - n_1^2$ $(n_1 \leqslant n_2)$ и $f(n_1, n_2) = n_2^2$ $(n_1 \geqslant n_2)$. Так как функция f однородна, то в силу теоремы 3 справедлива

Теорема 4. *Пусть* $(X_1 \cup X_2, \sigma, \mu)$ $(X_1 \cap X_2 = \varnothing, |X_1| \geqslant 1, |X_2| \geqslant 2)$ — *пространство с конечной мерой и* $E \subset (X_1 \cup X_2)^2 = X^2$ — *измеримое множество, обладающее свойствами* $(x, x) \in E$ *и* $(x, y) \in E \Rightarrow (y, x) \in E$ $(x, y \in X)$. *Пусть множество* E' *состоит из всех тех неупорядоченных пар* (x, y), *для которых* $(x, y) \in E$. *Если неориентированный граф* $G = (X, E')$ *не содержит пустого треугольника с точно одной вершиной из* X_1, *то*

$$\mu_2(E) \geqslant \begin{cases} 2\mu(X_1)\mu(X_2) - \mu(X_1^2), & \textit{если} \quad \mu(X_1) \leqslant \mu(X_2), \\ \mu(X_2^2), & \textit{если} \quad \mu(X_1) \geqslant \mu(X_2). \end{cases}$$

Пример 6. **Лемма 2.** *Если неориентированный граф (без петель)* $G = (X_1 \cup X_2, E)$ $(X_1 \cap X_2 = \varnothing, |X_1| = n_1, |X_2| = n_2)$ *не содержит пустого треугольника с меньше чем 2 вершинами из* X_1, *то*

$$N(G) \geqslant h(n_1, n_2), \tag{14}$$

где $h(n_1, n_2) = n_1\left[\frac{n_2 - n_1}{2}\right] + \binom{[(n_2 - n_1)/2]}{2} + \binom{](n_2 + n_1)/2[}{2}$, *если* $n_2 \geqslant n_1$, *и* $h(n_1, n_2) = \binom{n_2}{2}$, *если* $n_1 \geqslant n_2$; *здесь* $[a]$ — *целая часть* a, $]a[= -[-a]$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Как нетрудно проверить, существует такой допустимый класс $\mathcal{G}(1,3)$, что если ориентированный 2-граф $G = (X_1 \cup X_2, E) \in \mathcal{G}(1,3)$, то в G нет треугольника, который не содержит пары противоположно ориентированных ребер с меньше чем 2 вершинами из X_1, и G имеет все петли в X_2. Однако, согласно (14),

$$2h(n_1, n_2) + n_2 \geqslant \begin{cases} (n_2^2 - n_1^2)/2 + n_1n_2, & \text{если} \quad n_2 \geqslant n_1, \\ n_2^2, & \text{если} \quad n_2 \leqslant n_1. \end{cases}$$

Следовательно, $\mathcal{G}(1,3) \in D(f(n_1, n_2))$, и для непрерывных графов $G = (X_1 \cup X_2, E) \in \mathcal{G}(1,3)$

$$\mu_2(E) \geqslant \begin{cases} (\mu(X_2^2) - \mu(X_1^2))/2 + \mu(X_1)\mu(X_2), & \text{если} \quad \mu(X_2) \geqslant \mu(X_1), \\ \mu(X_2^2), & \text{если} \quad \mu(X_1) \geqslant \mu(X_2). \end{cases} \tag{15}$$

Пример 7. **Лемма 3.** *Если неориентированный граф (без петель) $G(X_1 \cup X_2, E)$ $(X_1 \cap X_2 = \varnothing,\ |X_1| = n_1,\ |X_2| = n_2)$ не содержит пустого треугольника с хотя бы одной вершиной из X_2, то*

$$N(G) \geqslant k(n_1, n_2), \tag{16}$$

где $k(n_1, n_2) = \binom{[(n_1+n_2)/2]}{2} + \binom{](n_1+n_2)/2[}{2}$, *если* $n_1 \leqslant n_2$, *и* $k(n_1, n_2) = n_1 n_2 - n_2$, *если* $n_1 \geqslant n_2$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Как нетрудно показать, существует такой допустимый класс $\mathcal{G}(2, 3)$, что если ориентированный 2-граф $G = (X_1 \cup X_2, E) \in \mathcal{G}(2, 3)$, то в G нет треугольника, который не содержит пары противоположно ориентированных ребер с хотя бы одной вершиной из X_2, и G имеет все петли в X_2. Однако согласно (16)

$$2k(n_1, n_2) + n_2 = f(n_1, n_2) \geqslant \begin{cases} 3(n_1+n_2)^2/8; & \text{если} \quad 2 \leqslant n_1 \leqslant n_2, \\ 3n_1 n_2/2, & \text{если} \quad 3 \leqslant n_2 \leqslant n_1. \end{cases}$$

Следовательно, $\mathcal{G}(2, 3) \in D(f(n_1, n_2))$, и для непрерывных графов $G = (X_1 \cup X_2, E) \in \mathcal{G}(2, 3)$ $(X_1 \cap X_2 = \varnothing,\ |X_1| \geqslant 2,\ |X_2| \geqslant 3)$

$$\mu_2(E) \geqslant \begin{cases} 3(\mu(X_1) + \mu(X_2))^2/8, & \text{если} \quad \mu(X_1) \leqslant \mu(X_2), \\ 3\mu(X_1)\mu(X_2)/2, & \text{если} \quad \mu(X_1) \geqslant \mu(X_2). \end{cases} \tag{17}$$

Общие пространства

Пусть X — аддитивная коммутативная группа и $\rho(x, y)$ — *инвариантная метрика* в X, т. е. действительная функция, удовлетворяющая условиям

$$\rho(x, y) \geqslant 0, \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \ (x, y \in X), \tag{18}$$

$$\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad (x, y \in X), \tag{19}$$

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z) \quad (x, y, z \in X), \tag{20}$$

$$\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y) \quad (x, y, z \in X). \tag{21}$$

Лемма 4. *Если X — аддитивная группа с инвариантной метрикой, $a_1, a_2, a_3 \in X$, то существует такая пара a_i, a_j $(i \neq j)$, что*

$$\rho(a_i + a_j, 0) \geqslant \frac{\rho(a_1 + a_1, 0)}{3}. \tag{22}$$

Доказательство. Согласно (20) и (21)

$$\rho(a_1 + a_2, 0) + \rho(0, a_2 + a_3) \geqslant \rho(a_1 + a_2, a_2 + a_3) = \rho(0, a_3 - a_1). \tag{23}$$

Аналогично

$$\rho(a_1 + a_3, 0) + \rho(0, a_3 - a_1) \geqslant \rho(a_1 + a_3, a_3 - a_1) = \rho(2a_1, 0). \tag{24}$$

Из (23), (24) и (19) вытекает, что

$$\rho(a_1 + a_2, 0) + \rho(a_2 + a_3, 0) + \rho(a_1 + a_3, 0) \geqslant \rho(2a_1, 0).$$

Оценка (22) является простым следствием этого неравенства. Лемма доказана.

Предположим теперь, что X — аддитивная коммутативная группа с инвариантной метрикой ρ и (X, σ, μ) — пространство с мерой над X. Обозначим X_1 (соответственно X_2) множество элементов $a \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(a, 0) < x$ $(\rho(a, 0) \geqslant x)$. Граф $G = (X_1 \cup X_2, E)$ определяется так: $(a, b) \in E$, если $\rho(a + b, 0) \geqslant {}^1/_3 \min\limits_{a \in X_2} \rho(a + a, 0) = x'/3$.

Из леммы 4 вытекает, что в G не имеется пустого треугольника с хотя бы одной вершиной из X_2. С другой стороны, $\rho(a + a, 0) \geqslant x' \geqslant x'/3$, если $a \in X_2$; таким образом, G имеет все петли в X_2. Следовательно, согласно примеру 7 и оценке (17), справедлива

Теорема 5. *Пусть X — коммутативная группа с инвариантной метрикой ρ и (X, σ, μ) — пространство с мерой. Тогда в произведении $(X, \sigma, \mu)^2 = (X^2, \sigma_2, \mu_2)$*

$$\mu_2(\rho(a + b, 0) \geqslant x'/3) \geqslant \begin{cases} 3\mu(X^2)/8, & \text{если} \quad \mu(X_1) \leqslant \mu(X_2), \\ 3\mu(X_1)\mu(X_2)/2, & \text{если} \quad \mu(X_1) \geqslant \mu(X_2), \end{cases} \tag{25}$$

где X_1, X_2 и x' имеют тот же смысл, что и выше.

Пример 8. Пусть X — множество действительных функций $f(t)$, определенных в некотором интервале T. Относительно сложения X является коммутативной группой. Метрика $\rho(f(t), x(t))$ определяется равенством

$$\rho(f(t), g(t)) = \sup_{t \in T} |f(t) - g(t)|.$$

Очевидно, $\rho(f(t) + f(t), 0) = 2\rho(f(t), 0)$, таким образом, мы имеем $x' = 2x$.

Пусть $\xi(t)$ — случайный процесс $(t \in T, \xi \in X)$, тогда (25) принимает следующий вид:

$$\mathbf{P}(\sup|\xi_1(t) + \xi_2(t)| \geqslant x) \geqslant \begin{cases} 3/8, & \text{если} \quad p \geqslant 1/2, \\ {}^3/_2\, p(1 - p), & \text{если} \quad p \leqslant 1/2, \end{cases} \tag{26}$$

где ξ_1, ξ_2 — независимые реализации процесса ξ и $p = \mathbf{P}(\sup|\xi_1(t)| \geqslant 3x/2)$.

Евклидово пространство

В этом параграфе X — d-мерное евклидово пространство с евклидовой метрикой, $\mu = \mathbf{P}$ — вероятностная мера.

Лемма 5. *Если $a_1, \ldots, a_k$ — векторы с длинами $|a_i| \geqslant 1$ $(i = 1, \ldots, k)$, то для любого целого g $(2 \leqslant g \leqslant k)$ существует подмножество*

$a_{i_1}, \ldots, a_{i_g}$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\Big|\sum_{j=1}^{g} a_{i_j}\Big| \geqslant \sqrt{\frac{g(k-g)}{k-1}}.$$

Доказательство. Рассмотрим тождество

$$A = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_g\leqslant k} \Big(\sum_{j=1}^{g} a_{i_j}\Big)^2 = \binom{k-1}{g-1}\sum_{i=1}^{k} a_i^2 + \binom{k-2}{g-2} 2 \sum_{i\neq j}^{k} a_i a_j, \qquad (27)$$

где $a_i a_j$ обозначает скалярное произведение и $a_i^2 = a_i a_i$.

Преобразуем (27):

$$A = \binom{k-2}{g-2}\Big(\sum_{i=1}^{k} a_i\Big)^2 + \Big[\binom{k-1}{g-1} - \binom{k-2}{g-2}\Big]\sum_{i=1}^{k} a_i^2. \qquad (28)$$

Так как $a_i^2 \geqslant 1$ и $\big(\sum_{i=1}^{k} a_i\big)^2 \geqslant 0$, то из (28) вытекает оценка

$$A \geqslant k\Big[\binom{k-1}{g-1} - \binom{k-2}{g-2}\Big].$$

Однако A состоит из $\binom{n}{k}$ слагаемых вида $\Big(\sum_{j=1}^{g} a_{i_j}\Big)^2$, следовательно, по крайней мере одно из этих слагаемых не меньше

$$k\Big[\binom{k-1}{g-1} - \binom{k-2}{g-2}\Big]\binom{k}{g}^{-1} = \frac{g(k-g)}{k-1}.$$

Утверждение леммы доказано.

В случае $g = 2$ мы определяем граф $G = (X', E)$ следующим образом: $a \in X'$ тогда и только тогда, когда $|a| \geqslant x\sqrt{(k-1)/2(k-2)}$, и $(a, b) \in E$ $(a, b \in X')$ тогда и только тогда, когда $|a + b| \geqslant x$. Из леммы 5 вытекает, что G не имеет пустого k-вершинного подграфа; кроме того, G содержит все петли. Таким образом, из теоремы 2 и примера 3 вытекает

Теорема 6. *Пусть ξ и η — независимые одинаково распределенные случайные векторы в d-мерном евклидовом пространстве. Тогда при любом $x > 0$*

$$\mathbf{P}(|\xi + \eta| \geqslant x) \geqslant \frac{1}{k-1}\mathbf{P}^2\Big(|\xi| \geqslant \sqrt{\frac{k-1}{2(k-2)}}\cdot x\Big). \qquad (29)$$

При $k = 3$ оценка (29) совпадает с (1). Если $k > 3$, то константа $1/(k-1)$ меньше константы $^1/_2$, фигурирующей в (1), однако возможны случаи, когда (29) лучше (1).

Исследуем теперь случай $g = k - 1$. Положим, как раньше, $X' = \{a \in X\colon |a| \geqslant x\}$. Граф $G = (X', E)$ определяется следующим образом: $(a_1, \ldots, a_g) \in E$ тогда и только тогда, когда $|a_1 + \ldots + a_g| \geqslant x$ или $a_i = a_j$ для некоторых $i \neq j$. Лемма 5 утверждает, что в G не имеется пустого $(g+1)$-вершинного g-подграфа. Используя теорему 2 и пример 4, получаем следующее утверждение:

Теорема 7. *Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_g$ — *независимые одинаково распределенные случайные векторы в d-мерном евклидовом пространстве. Тогда*

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{g} \xi_i\right| \geqslant x\right) \geqslant c_{g,\,g+1}\, \mathbf{P}^g\left(|\xi_1| \geqslant x\right) - \mathbf{P}\left(\xi_i = \xi_j \text{ для некоторых } i \neq j\right). \quad (30)$$

Отметим что $\mathbf{P}\,(\xi_i = \xi_j\ (i \neq j)) = 0$, если $\mathbf{P}\,(\xi_i = x) = 0$ для всех x.

Оценка (29) не зависит от d. Но для малых d мы можем ожидать более сильного результата.

Лемма 6 [6]. *Если* $a_1, \ldots, a_{d+2}$ — *d-мерные векторы с длинами* $|a_i| \geqslant 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, *то имеется такая пара* a_i, a_j $(i \neq j)$, *что*

$$|a_i + a_j| \geqslant \sqrt{2}.$$

Доказательство (Т. Селе). Мы докажем, что имеется такая пара a_i, a_j $(i \neq j)$, что скалярное произведение $a_i a_j \geqslant 0$. Если $d = 1$, наше утверждение тривиально. Предположим, что лемма имеет место для $d - 1$, и докажем ее для d. Мы можем предположить, что $a_i\ a_{d+2} < 0$, $i = 1, \ldots, d + 1$. Разбиение $a_i = b_i + c_i$ $(1 \leqslant i \leqslant d + 1)$ определяется условиями $b_i \perp a_{d+2}$ и $c_i \parallel a_{d+2}$. Здесь $c_i a_{d+2} = a_i a_{d+2} < 0$, следовательно, $c_i = -\alpha_i a_{d+2}$, где $\alpha_i > 0$. Таким образом, $c_i c_j = \alpha_i \alpha_j\, a_{d+2}^2 = 0$. Однако векторы $b_1, \ldots, b_{d+1}$ лежат в $(d - 1)$-мерном подпространстве, и по предположению индукции имеется пара $b_i b_j \geqslant 0$ $(i \neq j)$. Для этой пары $a_i a_j = b_i b_j + c_i c_j > 0$. Утверждение доказано.

Из леммы 6, теоремы 2 и примера 3 вытекает

Теорема 8. *Пусть* ξ *и* η — *независимые одинаково распределенные случайные векторы в d-мерном евклидовом пространстве. Тогда*

$$\mathbf{P}\left(|\xi + \eta| \geqslant x\right) \geqslant \frac{1}{d+1}\, \mathbf{P}^2\left(|\xi| \geqslant \frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Теперь приведем пример оценки, которая зависит от значений $\mathbf{P}\,(|\xi| \geqslant x)$ в двух точках.

Лемма 7. *Если* $|a_1| \geqslant (\sqrt{2} + \sqrt{6})\ /2$, $|a_2| \geqslant 1$, $|a_3| \geqslant 1$, *то имеется такая пара* $i \neq j$, *что* $|a_i + a_j| \geqslant \sqrt{2}$.

Доказательство. Если угол между a_2 и a_3 не больше $90°$, то утверждение имеет место. Если этот угол больше $90°$, то угол между a_1 и a_2 или угол между a_1 и a_3 меньше $135°$. Легко видеть, что в этом случае $|a_1 + a_2| \geqslant \sqrt{2}$ или $|a_1 + a_3| \geqslant \sqrt{2}$. Лемма доказана.

Положим $X_1 = \{a : a \in X,\ \ 1/\sqrt{2} \leqslant |a| < (1 + \sqrt{3})/2\}$, $X_2 = \{a : a \in X,\ |a| \geqslant (1 + \sqrt{3})/2\}$. Пусть граф $G = (X_1 \cup X_2, E)$ содержит ребро (a, b), если $|a + b| \geqslant 1$. Из леммы 7 следует, что G не содержит пустого треугольника с хотя бы одной вершиной из X_2. С другой стороны, G содержит все петли. Теперь воспользуемся примером 7. Здесь мы имеем более сильные условия: G имеет все петли и в X_1. Таким образом, (17) имеет место с лучшими константами ($^1/_2$ и 2).

Теорема 9. *Пусть* ξ *и* η — *независимые одинаково распределенные случайные векторы в d-мерном пространстве. Тогда*

$$\mathbf{P}(|\xi+\eta|\geqslant x)\geqslant\begin{cases}(p_1+p_2)^2/2, & \textit{если } p_1\leqslant p_2,\\ 2p_1p_2, & \textit{если } p_1\geqslant p_2,\end{cases}$$

где $p_1 = \mathbf{P}(1/\sqrt{2} \leqslant |\xi| < (1+\sqrt{3})/2)$ *и* $p_2 = \mathbf{P}(|\xi| \geqslant (1+\sqrt{3})/2)$.

В 3-мерном пространстве мы улучшаем оценку (29), используя теоремы следующего вида: Если $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geqslant 4)$ — векторы в 3-мерном пространстве, то имеется такая пара $i \neq j$, что угол между a_i и a_j не больше e_k. Легко видеть, что в этом случае из условий $|a_i|, |a_j| \geqslant 1$ вытекает неравенство

$$|a_i+a_j|\geqslant\sqrt{2(1+\cos e_k)} = 2\cos(e_k/2).$$

Теорема 10. *Пусть* ξ *и* η — *независимые одинаково распределенные случайные векторы в 3-мерном пространстве. Тогда при* $k \geqslant 4$

$$\mathbf{P}(|\xi+\eta|\geqslant x)\geqslant\frac{1}{k-1}\mathbf{P}^2\left(|\xi|\geqslant x\cdot\frac{1}{2\cos(e_k/2)}\right),$$

где $e_4 = \arccos(-1/3)$ *по лемме* 5, $e_5 = \pi/2$ *по лемме* 6, *значение* e_6 *указано в* [8] *и* [10], e_7, e_8, e_9 — *в* [8], e_{10}, e_{11} — *в* [10] (задача решена Данцером), e_{12} — *в* [10] *и* e_{24} — *в* [9].

Случай 2-мерного пространства очень прост:

Теорема 11. *В 2-мерном пространстве*

$$\mathbf{P}(|\xi+\eta|\geqslant x)\geqslant\frac{1}{k-1}\mathbf{P}^2\left(|\xi|\geqslant x\,\frac{1}{2\cos(\pi/k)}\right).$$

Наконец, в случае 1-мерного пространства положим $X_1 = \{a : |a| < 1\}$, $X_2 = \{a : |a| \geqslant 1\}$. Мы можем воспользоваться примером 6 и формулой (15):

Теорема 12. *В 1-мерном пространстве*

$$\mathbf{P}(|\xi+\eta|\geqslant x)\geqslant\begin{cases}{}^1/_2-\mathbf{P}^2(|\xi|<x), & \textit{если } \mathbf{P}(|\xi|\geqslant x)\geqslant{}^1/_2,\\ \mathbf{P}^2(|\xi|\geqslant x), & \textit{если } \mathbf{P}(|\xi|\geqslant x)\leqslant{}^1/_2.\end{cases}\tag{31}$$

Легко видеть, что (31) дает наилучшую оценку в терминах $p = \mathbf{P}(|\xi| \geqslant x)$. Если $p \geqslant {}^1/_2$, то для распределения $\mathbf{P}(\xi = 1) = {}^1/_2$, $\mathbf{P}(\xi = -1) = p - {}^1/_2$, $\mathbf{P}(\xi = -{}^1/_3) = 1 - p$, мы имеем равенство в (31) при ${}^1/_3 < x < 1$; если $p \leqslant {}^1/_2$, то для распределения $\mathbf{P}(\xi = 1) = p$, $\mathbf{P}(\xi = -{}^1/_3) = 1 - p$ в (31) получается равенство при ${}^2/_3 < x < 1$.

Симметричные распределения

Пусть X — коммутативная группа с инвариантной метрикой. Если $A \subset X$, то множество $-A$ определяется естественным образом. Пространство $(X, \sigma, \mathbf{P})$ называется *симметричным*, если $\mathbf{P}(-A) = \mathbf{P}(A)$ $(A \subset X)$. Для симметричных пространств имеются (см. [7]) оценки, которые лучше полученных нами. Кроме того, доказательства этих оценок более просты и не требуют комбинаторных методов. Мы наметим доказательства таких оценок нашими методами.

Предположим, что метрика ρ имеет еще одно свойство:

$$\rho(a+a,\ 0)=2\rho(a,\ 0). \tag{32}$$

Если $\rho(a,\ 0)\geqslant x$, то

$$\rho(a+b,\ 0)\geqslant x \quad \text{или} \quad \rho(b-a,\ 0)\geqslant x, \tag{33}$$

каков бы ни был элемент $b\in X$. Это утверждение вытекает из неравенства

$$\rho(a+b,\ 0)+\rho(b-a,\ 0)\geqslant\rho(a+b,\ b-a)=\rho(2a,\ 0)= \\ =2\rho(a,\ 0)\geqslant 2x,$$

где мы использовали (19), (20), (21) и (32). Множества X_1, X_2 и граф $G=(X,\ E)$ определяются соотношениями $X_1=\{a:\rho(a,\ 0)\geqslant 1\}$, $X_2=\{a:\rho(a,\ 0)<1\}$, $E=\{(a,\ b):\rho(a+b,\ 0)\geqslant x\}$. Предположим, что $|X_1|=2n_1$, $|X_2|=2n_2$ — конечные числа. Если $\rho(a,0)\geqslant x$, $\rho(b,0)<x$, то согласно (33) между a, $-a$, b и $-b$ мы имеем по крайней мере 2 неориентированных ребра, что дает $4n_1n_2$ ориентированных ребер. Если $\rho(a,\ 0)\geqslant 0$, $\rho(b,\ 0)\geqslant 0$, то, как раньше, мы имеем по крайней мере 2 неориентированных ребра, соединяющих a, $-a$, b и $-b$. Это дает $2n_1^2$ ребер. Таким образом, $N(G)\geqslant 2n_1^2+4n_1n_2$.

Легко обобщить теоремы 2 и 3 так, чтобы ими можно было воспользоваться здесь. Переходя к непрерывному случаю, имеем:

$$\mathbf{P}(|\xi+\eta|\geqslant x)\geqslant\frac{\mathbf{P}^2(|\xi|\geqslant x)}{2}+\mathbf{P}(|\xi|\geqslant x)\mathbf{P}(|\xi|<x)= \\ =\frac{1}{2}(1-\mathbf{P}^2(|\xi|<x)). \tag{34}$$

Эта оценка лучше, чем (31) или (1), но мы уже показали на примерах, что для несимметричного случая улучшить оценки (1) и (31) нельзя.

Упомянем еще один случай. Пусть для $\mathbf{P}(|\xi+\eta|\geqslant x)$ мы хотим получить оценку с помощью $\mathbf{P}(|\xi|\geqslant x/\sqrt{3})$ в 2-мерном пространстве. В этом случае уже требуются комбинаторные методы и для симметричных распределений. Можно использовать тот факт, что для векторов a_1, $-a_1$, a_2, $-a_2$, a_3, $-a_3$, $|a_i|\geqslant 1/\sqrt{3}$, существует такая пара $i\neq j$, что $|a_i+a_j|\geqslant 1$ и $|-a_i-a_j|\geqslant 1$ или $|a_i-a_j|\geqslant 1$ и $|a_j-a_i|\geqslant 1$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность за полезные советы профессору П. Турану, а также М. Кантеру, Д. Саасу, Г. Тушнади и Г. Фейеш Тот.

Замечания. 1. Б. С. Стечкин в своей дипломной работе (МГУ) обобщил теорему 1 на пространства Банаха.

2. В работе [11] М. Шимонович дает общую теорему, касающуюся проблем лемм 1—3.

Математический институт
Академии наук Венгрии

Поступила в редакцию
14.2.75

ЛИТЕРАТУРА

[1] **G. O. H. Katona**, Графы, векторы и неравенства в теории вероятностей (на венгерском языке), Mat. Lapok, **20**, 1—2 (1969), 123—127.

[2] **P. Turàn**, Об одной экстремальной задаче в теории графов (на венгерском языке), Mat. Fiz. Lapok, 48, 3 (1941), 436—452.

[3] **G. Katona, T. Nemetz, M. Simonovits**, Об одной задаче Турана из теории графов (на венгерском языке), Mat. Lapok, 15, 1—3 (1964), 228—238.
[4] **J. Spencer**, Turán's theorem for k-graphs, Discrete Math, 2, 2 (1972), 183—186.
[5] **V. Chvátal**, Hypergraphs and Ramseyian theorems, Ph. D. Thesis, Univ. of Waterloo, 1970.
[6] **H. Davenport, G. Hajós**, Задача 35, Mat. Lapok, 3, 1 (1952), 94—95. Решили: T. Szele, J. Aczèl, O. Blum, A. Császár, T. Kövàri, I. Vincze.
[7] **В. Феллер**, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, М., изд-во «Мир», 1967.
[8] **K. Schütte, B. L. Van der Waerden**, Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkt mit Mindesabstand Eins Platz?, Math. Ann., **123**, 1 (1951), 96—**124**.
[9] **R. M. Robinson**, Arrangement of 24 points on a sphere, Math. Ann., **144**, 1 (1961), 17—48.
[10] **L. Fejes Toth**, Regular Figures, Oxford—London—N. Y.—Paris, 1964.
[11] **M. Simonovits**, Extremal graph problems with conditions, Combinatorial theory and its applications, Balatonfüred (Hungary), 1969, Bolyai János Math. Soc., 1971, 999—1012.

INEQUALITIES FOR THE DISTRIBUTION OF THE LENGTH OF RANDOM VECTOR SUMS

G. O. H. KATONA (HUNGARY)

(*Summary*)

Starting from a combinatorial proof of the inequality

$$\mathbf{P}(|\xi+\eta|\geqslant x)\geqslant\frac{1}{2}\mathbf{P}^2(|\xi|\geqslant x),$$

where ξ and η are independent random vectors in a d-dimensional Euclidean space, continuous analogues of the combinatorial model are constructed, which enable to deduce inequalities similar to the above.