KANDIDÁTUSI ÉRTEKEZÉS TÉZISEI

Sperner tipusu tételek

Irta:
Katona Gyula

Az értekezés opponensei:

T. SÓS VERA
a matematikai tudományok kandidátusa

HAJNAL ANDRÁS
a matematikai tudományok doktora

Budapest
1972

Egy halmaz összes részhalmazai tartalmazás szerint egy parciálisan rendezett halmazt alkotnak. A dolgozat célja e parciálisan rendezett halmaz szerkezetének vizsgálata. Az erre vonatkozó klasszikus Sperner tétel [1] a következőket állitja.

Ha X egy n elemü véges halmaz, $\mathcal{A}$ az ő különböző részhalmazainak egy olyan rendszere, hogy a benne szereplő részhalmazok nem tartalmazzák egymást, akkor

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]} ,$$

ahol $|\mathcal{A}|$ a rendszerben szereplő részhalmazok száma.

A fenti tétel egy érdekes általánositása Erdőstől [3] származik, amely szerint,

ha X egy n elemü véges halmaz, $\mathcal{A}$ az ő különböző részhalmazainak egy olyan rendszere, hogy nincs a rendszerben $h+1$ páronként egymást tartalmazó halmaz, akkor

$|\mathcal{A}| \leq$ (h legnagyobb n-edrendü binomiális együttható összege).

E tételnek egy az eredetinél egyszerübb bizonyitása szerepel a dolgozatban.

Bizonyos alkalmazásoknál a Sperner tétel állitására volt szükség gyengébb feltevések mellett. Ezt biztositja a következő tétel, amelyet Kleitman [4] és a szerző [5] egymástól függetlenül és egyidőben vettek észre.

<u>5.1 Tétel. Legyenek</u> X_1, X_2 <u>diszjunkt,</u> n_1 <u>illetve</u> n_2 <u>elemü halmazok</u> $(n = n_1 + n_2)$. <u>Ha</u> $\mathcal{A}$ <u>az</u> $X = X_1 \cup X_2$ <u>részhalmazainak egy olyan rendszere, hogy a rendszerben nincs két egymást tartalmazó olyan halmaz, melyeknek</u> X_1 <u>-be vagy</u> X_2 <u>-be eső része egyezik, akkor</u>

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Sperner eredeti tételét számelméleti célokra készitette. Könnyen átfogalmazható ugyanis a tétel a számelmélet nyelvére. Vegyünk ugyanis egy r négyzetmentes számot, melynek n primtényezője van. Ha ezeket a primtényezőket tekintjük az alaphalmaz elemének, akkor egy részhalmaz elemeinek szorzata az r szám egy osztóját adja.

Igy az, hogy egyik részhalmaz része egy másikénak, azt jelenti, hogy a nekik megfelelő osztók egymás osztói. Vagyis legfeljebb $\binom{n}{[\frac{n}{2}]}$ különböző osztót választhatunk ki ugy, hogy azok ne legyenek egymásnak osztói. Természetesen merül fel a kérdés, mi a helyzet nemnégyzetmentes szám esetén. Ebben az esetben a kitevőkből alkotott egészkoordinátáju vektorok lesznek a parciálisan rendezett halmaz elemei. (Egy n elemü halmaz részhalmazai ilymódon az n-dimenziós egységkocka csucsainak felelnek meg.) Az is könnyen adódik, hogyan kell megválasztanunk a rendezést ($\leq$, ha koordinátánként $\leq$). A fenti eredményeket (Sperner-, Erdős-, 5.1 tétel) különböző szerzők általánositották ebben az irányban ([9] , [10]).

A dolgozat - bár alapvető célja változatlan - a 6 §-tól áttér a részhalmazok parciálisan rendezett halmazáról egy általánosabb fogalomra, az u.n. szimmetrikus lánchalmazok fogalmára. Ezt egyrészt indokolja az, hogy tételeink általánosabbá válnak (Rota például azt sejti, hogy egy véges test feletti vektortér alterei tartalmazás szerint szimmetrikus lánchalmazt alkotnak), másrészt azonban, ha csupán a részhalmazok parciálisan rendezett halmaza érdekelne bennünket, akkor is érdemes lenne bevezetni ezt az általánosabb nyelvet, mert a bizonyitások igy könnyebben el-, a tételek pedig könnyebben kimondhatókká válnának.

Egy G parciálisan rendezett halmazban akkor mondjuk, hogy g __fedi__ h-t $(g,h \in G)$, ha $g > h$, de nincs olyan $f \in G$, melyre $g > f > h$ fennállna. Az $r(g)$ $(g \in G)$ függvényt __rangfüggvénynek__ nevezzük, ha $r(g) \geq 0$ egész, de felveszi a 0 értéket is, ezenkivül ha g fedi h-t, akkor $r(g) = r(h) + 1$ teljesül.

G egy $\{g_1, \ldots, g_h\}$ részhalmazát __láncnak__ nevezzük, ha $g_1 < \ldots < g_h$ és g_i fedi g_{i-1}-et $(1 < i \leq h)$. A lánc szimmetrikus, ha $r(g_1) + r(g_h) = n$, ahol n a rangfüggvény maximális értéke. Végül egy G parciálisan rendezett halmazt __szimmetrikus lánchalmaz__nak nevezünk, ha van rangfüggvénye és felbontható diszjunkt szimmetrikus láncok uniójává. Könnyen látható, hogy egy halmaz részhalmazai, vagy egy szám osztói szimmetrikus lánchalmazokat alkotnak.

Megjegyzendő még, hogy két diszjunkt halmaz részhalmazai parciálisan rendezett halmazainak direkt összege ($G+H$-ban $(g_1,h_1) \geq (g_2,h_2)$ akkor és csak akkor, ha $g_1 \geq g_2$ és $h_1 \geq h_2$ ahol $g_1, g_2 \in G$, $h_1, h_2 \in H$) az egyesitett halmaz részhalmazainak parciálisan rendezett halmazával izomorf.

Mivel további tételeinket szimmetrikus lánchalmazokra fogjuk bizonyitani, hasznos a következő tétel, amely elemeiben [9] -ben szerepel már:

6.1. Tétel. Ha G és H szimmetrikus lánchalmazok, akkor $G+H$ is az.

Könnyü átfogalmazni a szimmetrikus lánchalmazok nyelvére a Sperner-, Erdős- és az 5.1. tételt (lásd a 6.3 és 6.4 tételt). Az utóbbinak az alakja nem teljesen triviális:

7.1. tétel. Legyenek G és H szimmetrikus lánchalmazok r ill. s rangfüggvényekkel ($\max_{g\in G} r(g) + \max_{h\in H} s(h) = n$). $G+H$ elemei közül kiválasztva különbözőket ugy, hogy ne legyen közöttük kettő, melyeknek egyik komponense egyenlő, a másik meg rendezési relációban van egymással, ezek száma akkor maximális, ha az összes olyat választjuk ki, melyre $r(g) + s(h) = \left[\frac{n}{2}\right]$.

Végül lássuk az Erdős-tétel ilyen irányu élesitését mindjárt a legáltalánosabb formában [11] :

7.2. tétel. Legyenek G és H adottak, mint 7.1-ben. Kiválasztva különböző elemek egy $(g_1,h_1),\dots,(g_m,h_m)$ halmazát $G+H$ -ból ugy, hogy ne legyen közöttük $h+1$ különböző, melyekre teljesülne valamilyen w -re $(1\le w\le h+1)$

$$g_{i_1} = \ldots = g_{i_w}, \qquad g_{i_w} < \ldots < g_{i_{h+1}}$$

$$h_{i_1} \leq \ldots \leq h_{i_w}, \qquad h_{i_w} = \ldots = h_{i_{h+1}},$$

akkor $m \leq$ mint az összes $\left[\frac{n-h+1}{2}\right]$, $\left[\frac{n-h+3}{2}\right], \ldots, \left[\frac{n+h-1}{2}\right]$ rangu elemek száma.

A 9.§ Sperner problémájának azt az általánositását tárgyalja, hogy hány részhalmaz választható ki egy n elemü halmazból ugy, hogy ne legyen kettő, melyek k -nál kisebb különbséggel tartalmazzák egymást. Az általános tárgyalást itt is egy uj fogalom teszi lehetővé [30] . mod k szimmetrikus lánchalmaznak nevezzük a G parciálisan rendezett halmazt, ha rangfüggvénye van, és ha G felbontható olyan diszjunkt láncok uniójává, amelyek vagy k hosszuságuak vagy k -nál rövidebbek, de szimmetrikusak. Itt is igaz a

9.2. tétel: Ha G és H mod k szimmetrikus lánchalmazok, akkor $G+H$ is az.

A felvetett kérdésnek rögtön egy 5.1 tétel tipusu élesitett megoldását adjuk:

9.4. tétel. Legyenek G és H adottak, mint előbb. $G+H$ elemei közül kiválasztva különbözőket ugy, hogy ne legyen közöttük kettő

(g_1, h_1), (g_2, h_2) , melyekre

$$g_1 = g_2, \qquad h_1 \leq h_2, \qquad s(h_2) - s(h_1) < k$$

vagy

$$h_1 = h_2, \qquad g_1 \leq g_2, \qquad r(g_2) - r(g_1) < k$$

teljesül, akkor ezek száma akkor maximális, ha az összes olyat választjuk ki, melyek rangja = $= r(g) + s(h) \equiv \left[\frac{n}{2}\right] \pmod{k}$.

A 9.5. tétel pedig az Erdős-tipusu általánositást adja, mely szerint ha

$$g_{i_1} < \ldots < g_{i_{h+1}}, \quad r(g_{i_{h+1}}) - r(g_{i_1}) < k$$

alaku lánc létezését zárjuk ki, akkor legfeljebb annyi elem választható ki, mint amennyinek a rangja $\equiv$ $\equiv \left[\frac{n-h+1}{2}\right], \ldots, \left[\frac{n+h-1}{2}\right]$ valamelyikével $\pmod{k}$.

A 10.§ adja meg a Sperner tétel eddig ismert legélesebb (abban az értelemben, hogy a Sperner tétel állitását a leggyengébb feltételek mellett biztositja) alakját. A következő tétel feltételei ugyan nem egyszerüek, de az alkalmazásoknál fontos, hogy 5.1. feltételeinél gyengébbek [14] :

10.1.H. tétel. Legyenek X_1, X_2 és X_3 diszjunkt, n_1, n_2 ill. n_3 elemü halmazok $(n = n_1 + n_2 + n_3)$. Tegyük fel, hogy $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ az $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$

részhalmazainak olyan rendszere, melyben nincs két különböző A_i és A_j $(i \neq j)$, melyekre

$$A_i \cap X_1 \supseteq A_j \cap X_1$$

$$A_i \cap X_2 \supseteq A_j \cap X_2$$

$$A_i \cap X_3 \supseteq A_j \cap X_3$$

relációknak csak egyikében áll valódi tartalmazás, és nincs négy olyan páronként különböző A_i, A_j, A_k, A_ℓ, melyekre fennállna

$$A_i \cap X_u = A_j \cap X_u, \qquad A_k \cap X_u = A_\ell \cap X_u$$

$$A_i \cap X_v \,;\; A_k \cap X_v \supsetneqq A_j \cap X_v, \; A_\ell \cap X_v$$

$$A_i \cap X_w \,;\; A_\ell \cap X_w \supsetneqq A_j \cap X_v, \; A_k \cap X_w,$$

ahol a jobb- és baloldalon lévő párok is valamilyen rendezési relációban vannak és u, v, w az $1, 2, 3$ számok egy permutációja, akkor

$$m \leq \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]} .$$

Az állitás természetesen szimmetrikus láncHalmazok esetére is kimondható (10.1. tétel).

A 11.§ a Sperner-tipusu tételek egy bizonyos alkalmazásával foglalkozik. Ez az alkalmazás jelentette a vezérfonalat az általánositások és élesitések legmegfelelőbb formáinak kiválasztása során.

Legyenek $a_1, \dots, a_n$ d-dimenziós vektorok, legalább egységnyi abszolutértékkel, $\varepsilon_i = 0$ vagy 1 $(1 \le i \le n)$. Az alapvető kérdés az, legfeljebb hány $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i$ összeg eshet egy egységnyi átmérőjü gömbbe a lehetséges 2^n összeg közül. $d = 1$ esetben a Sperner-tétel segitségével könnyen megadható a válasz [3] , legfeljebb $\binom{n}{[\frac{n}{2}]}$. $d = 2$ esetben az 5.1. tétel segitségével bizonyitható ugyanez. $d = 3$ esetben már nem jön ki az eddigi eredményekből az állitás, csak akkor, ha a vektorok 6 adott centrálszimmetrikus térnyolcadban helyezkednek el. Még rosszabb a helyzet, ha 1 átmérőjü gömb helyett h átmérőjü gömbre tesszük fel a kérdést.

$d = 1$ -re még Erdősnek [3] sikerült a kérdést megválaszolnia: ha h egész, a maximális szám a legnagyobb n -edrendü binomiális együttható összege. $d = 2$ -re a 8.1. tétel segitségével $h = \sqrt{2}$ esetében megadható a válasz [13] : a két legnagyobb binomiális együttható összege.

A fenti $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i$ alaku egy gömbbe eső összegek száma szoros kapcsolatban van a valószinüségszámitásban használatos koncentrációfüggvénnyel. Az eredményekkel jó becslések adhatók [15] a koncentrációfüggvényre. Az uj eredmények valószinüségszámitási alkalmazásaival azonban a dolgozat nem foglalkozik.

A dolgozat további három paragrafusa nem a Sperner-tipusu tételekkel foglalkozik, hanem a részhalmazok parciálisan rendezett halmazának egyéb tulajdonságait vizsgálja.

A következő tétel kimondásához szükségünk van a következő egyszerü lemmára:

12.1. Lemma. Ha m és k természetes számok, m-et egyértelmüen irhatjuk fel a következő alakban:

$$m = \binom{a_k(m,k)}{k} + \binom{a_{k-1}(m,k)}{k-1} + \dots + \binom{a_{t(m,k)}(m,k)}{t(m,k)},$$

ahol $t(m,k) \geq 1$, $a_k > \dots > a_{t(m,k)}$ természetes számok és $a_i(m,k) \geq i$ $(i = t(m,k), t(m,k)+1, \dots, k)$.

12.1. tétel. Legyenek n, m és k adott egészek, melyekre teljesül

$$n \geq 1, \quad 1 \leq k \leq n \quad \text{és} \quad 1 \leq m \leq \binom{n}{k}.$$

Ha X egy n elemü halmaz és

$$\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}, \quad |A_i| = k \qquad (i = 1, \dots, m)$$

X <u>részhalmazainak egy rendszere, akkor legalább</u>

$$\binom{a_k(m,k)}{k-1}+\binom{a_{k-1}(m,k)}{k-2}+\dots+\binom{a_{t(m,k)}(m,k)}{t(m,k)-1}$$

<u>olyan</u> $k-1$ <u>elemü részhalmaza van</u> X <u>-nek, amely legalább egy</u> A_i <u>-nak is</u> $(1 \le i \le m)$ <u>eleme.</u>

A fenti tételnek először Kruskal [22] adott bizonyitást, a szerző [6] ennek ismerete nélkül 3 évvel később adott rá egy egyszerübb bizonyitást. A tétel jelentősége abban rejlik, hogy elősegiti olyan teljes indukciós bizonyitások készitését, ahol a részhalmazok elemszámára vonatkozólag megy az indukció.

A 13.§-ban megoldjuk az előző tétel segitségével Erdősnek azt a problémáját, hogy milyen m -re található az $\mathcal{A}=\{A_1,\dots,A_m\}$ $|A_i|=k$, $A_i\subset X$, $|X|=n$ $(1\le i\le m)$ rendszerhez egy reprezentánsrendszer

$$\mathcal{B}=\{B_1,\dots,B_k\} \quad (B_i)=k-1, \quad B_i\subset A_i \quad (1\le i\le m).$$

A válasz az, hogy

$$m\le\binom{2k-1}{k}+\binom{2(k-1)-1}{k-1}+\dots+\binom{1}{1}$$

esetén $\mathcal{B}$ mindig létezik, mig ellenkező esetben nem szükségképpen.

A 14.§-ban olyan kérdést vizsgálunk [24] , amelyben a tartalmazás mellett szerepet játszik a halmazok közös része is. Pontosabban ennek elemszáma van alulról korlátozva.

<u>14.1. tétel. Legyenek</u> n, q, k <u>és</u> ℓ <u>természetes számok, melyek kielégitik az</u> $1 \le q \le k$, $1 \le \ell \le k \le n$ <u>és</u> $q + \ell \ge k$ <u>feltételeket, továbbá legyen</u> $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ <u>egy olyan részhalmazrendszer, amelyre</u> $A_i \subset X$ $(|X| = n)$, $(A_i) = k$ <u>és</u> $|A_i \cap A_j| \ge \ell$ <u>teljesül minden</u> $i \ne j$ <u>párra</u> $(1 \le i, j \le m)$. <u>Ekkor azon</u> q <u>elemü részhalmazok száma, melyek legalább egy</u> A_i <u>-nek részhalmazai, legalább</u>

$$\frac{\binom{2k-\ell}{q}}{\binom{2k-\ell}{k}} m .$$

Irodalom

[1] SPERNER, E.: Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge, Math. Z. 27(1928)544-548.

[3] P. ERDÖS, On a lemma of Littlewood and Offord, Bull. of the Amer.Math.Soc. 51(1946)898-902.

[4] KLEITMAN, D.: On a lemma of Littlewood and Offord and the distribution of certain sums, Math. Z. 90(1965)251-259.

[5] KATONA, G.: On a conjecture of Erdős and a stronger form of Sperner's theorem, Studia Sci.Math. Hung. 1(1966)59-63.

[6] KATONA, G.: A theorem of finite sets, Graph Theory, Proc. of the Colloq. held at Tihany, 1966 September, Akadémiai Kiadó, Budapest 1968.

[9] DE BRUIJN, N.G., VAN TENGBERGEN, E. és KRUYSWIJK, D.: On the set of divisors of a number, Nieuw Archief voor Wiskunde, 2, 23(1951)191-193.

[10] SCHÖNHEIM, I.: A generalization of results of P. Erdős and G. Katona concerning Sperner's theorem (benyujtva a J. of Combinatorial Theory-hoz).

[11] KATONA, G.: A generalization of some generalizations of Sperner theorem, J. of Combinatorial Theory (megjelenés alatt).

[12] KATONA, G.: How many sums can lie in a circle of diameter 2 ? Combinatorial Theory and its Appl. Balatonfüred (Hungary), 1969, Bolyai János Mathematical Society, Budapest, 1969.

[14] KATONA, G.: A 3-part Sperner theorem (benyujtva a Studia Sci.Math. Hung.-hoz).

[15] KOLMOGOROV, A.: Sur les propriétés des fonctions de concentrations de M.P. Lévy, Ann. Inst. H. Poincaré 16, 1(1958)27-34.

[17] KATONA, G.: Gráfok, vektorok, valószinüségszámitási egyenlőtlenségek, Matematikai Lapok, 20(1969) 123-127.

[22] KRUSKAL, F.B.: The number of simplices in a complex, Math. Opt. Techniques, Edited by R. Bellman, 1963, 251-278.

[24] KATONA, G.: Intersection theorems for systems of finite sets, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 15(1964) 329-337.

[26] KATONA, G.: Two applications of Sperner type theorems.

[29] KATONA, G.: On separating systems of a finite set, J. of Combinatorial Theory 1(1966)174-194.

[30] KATONA, G.: Families of subsets having no subset containing an other one with small difference (benyujtva a Nieuw Arch. Wiskunde-hez).