KÜLÖNLENYOMAT

MATEMATIKAI LAPOK

XX. ÉVFOLYAM 1–2. SZÁMÁBÓL

Katona Gyula

Gráfok, vektorok és valószínűségszámítási egyenlőtlenségek

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT BUDAPEST, 1969

GRÁFOK, VEKTOROK ÉS VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI EGYENLŐTLENSÉGEK

KATONA GYULA

Turán Pál nemrég gráfelméleti-kombinatorikai tételek érdekes geometriai és potenciálelméleti alkalmazásait mutatta be [1]. Ebben a cikkben egy hasonló típusú példát szeretnénk ismertetni:

A. Tétel. *Legyenek* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *d-dimenziós* $(d \geqq 1)$ *vektorok, melyekre* $|a_i| \geqq 1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ *teljesül. Ekkor azon* a_i, a_j *párok* $(i \neq j)$ *száma, melyekre* $|a_i + a_j| \geqq 1$ *fennáll, legalább*

$$E(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{n}{2}-1\right), & \textit{ha } n \textit{ páros,} \\ \left(\dfrac{n-1}{2}\right)^2, & \textit{ha } n \textit{ páratlan.} \end{cases}$$

Az egyenlőtlenség pontos, hiszen ha az egyik tengelyen pozitív, illetve negatív irányban $\frac{n}{2}, \frac{n}{2}$ $\left(\text{páratlan } n \text{ esetén } \frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$ egységnyi vektort veszünk, ezekre a fenti párok száma éppen a tételben meghatározott minimum lesz.

Bizonyítás. 1. *A két-dimenziós euklideszi térben adott bármely három vektor között van kettő melyeknek egymás által bezárt szöge legfeljebb* 120° A vektorok a teljes szöget 3 szögre osztják, ezek között tehát a legkisebb legfeljebb 120°.

2. *A háromdimenziós euklideszi térben adott bármely három vektor között van kettő, melyeknek egymás által bezárt szöge legfeljebb* 120°. Jelöljük a három vektort a_1, a_2, a_3-mal. Vetítsük a_3-at az a_1 és a_2 által kifeszített S síkra (ha nem feszítenek ki síkot, akkor a három vektor egy síkban van, ezt az esetet már láttuk). Legyen a vetület a_3'. a_1, a_2, a_3' már egy síkban vannak, alkalmazható rájuk az 1 pont eredménye, van közöttük két, 120°-nál nem nagyobb szöget bezáró vektor. Ha ez a_1 és a_2, készen vagyunk. Tegyük fel tehát, hogy pl. a_1 és a_3' ilyenek. Azon vektorok, amelyeknek a_1-gyel bezárt szöge 120°-nál nagyobb, egy K végtelen körkúp belsejében helyezkednek el, melynek tengelye a_1 egyenese, az alkotók tengellyel bezárt szöge 60°, és az a_1-gyel ellentétes féltérben helyezkedik el. Mivel a_3' nincs a K kúp belsejében, így a_3 sincs. Ugyanis K bármely belső pontjának vetülete S-re szintén K-beli, mert S áthalad a kúp tengelyén. Így a_3 és a_1 egymás által bezárt szöge legfeljebb 120°.

3. *Ha adott a* 3*-dimenziós euklideszi térben* 3 *vektor,* a_1, a_2, a_3, *melyekre* $|a_i| \geqq 1$ $(i=1, 2, 3)$, *akkor mindig van közöttük két különböző, melyekre* $|a_i + a_j| \geqq 1$ $(i \neq j)$. Az előző pont alapján van a 3 vektor között kettő (pl. a_1 és a_2) melyeknek α szöge legfeljebb 120°. Így

$$|a_1 + a_2|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 + 2|a_1|\,|a_2| \cos \alpha$$

alapján

$$|a_1+a_2|^2 \geqq |a_1|^2+|a_2|^2+2|a_1|\,|a_2|\cos 120^\circ =$$
$$=(|a_1|-|a_2|)^2+|a_1|\,|a_2| \geqq 1.$$

4. *Ha adott a d-dimenziós euklideszi térben 3 vektor, a_1, a_2, a_3, melyekre* $|a\,| \geqq 1$ $(i=1, 2, 3)$, *akkor mindig van közöttük két különböző, melyekre* $|a_i+a_j| \geqq 1$. A 3 vektor ugyanis egy legfeljebb 3 dimenziós alteret feszít ki. Ebben az altérben viszont az állítás a 3 pont alapján már igaz.

5. Bár a tétel bizonyításához nincs rá szükség, érdemes megjegyezni, hogy *a 4 állítás euklideszi tér helyett tetszőleges Hilbert térre is igaz.* Nyilvánvaló ugyanis, hogy a Hilbert tér 3 eleme — a_1, a_2, a_3 — egy legfeljebb 3 dimenziós alteret feszít ki, található tehát 3 ortonormált elem a térben (b_1, b_2, b_3), melyek lineáris kombinációiként kifejezhető A tetszőleges eleme: $a=\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\lambda_3 b_3$. Megfeleltetve a-nak a 3-dimenziós euklideszi tér $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ elemét, egy távolságtartó leképezést kapunk, s mivel az állítást euklideszi tér esetére már a 3. pontban igazoltuk, igaznak kell lennie a Hilbert térben is.

6. Bizonyítsuk most már a tételt. Készítsünk egy G gráfot, melynek csúcsai az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemek, és két csúcs (a_i és a_j, $i \neq j$) akkor és csak akkor legyen összekötve, ha $|a_i+a_j| \geqq 1$. A 4., illetve 5. pont szerint a G gráfban nincs üres hármas, azaz, bárhogy kiválasztva 3 csúcsot, valamelyik kettő éllel össze van kötve. Turán Pál ismert gráfelméleti tétele [2] alapján azonban a gráfban legalább $E(n)$ élnek kell ehhez lenni, tehát legalább $E(n)$ azon párok száma, melyekre $|a_i+a_j| \geqq 1$.

A következőkben a fenti tétel és Hilbert térbeli változatának néhány, kaleidoszkópszerű alkalmazását mutatjuk be. Ezekkel a gráfelméletnek egyéb területekkel való meglepő kapcsolatát szeretnénk hangsúlyozni.

B. Tétel. *Legyenek $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ az $[a, b]$ intervallumban négyzetesen integrálható függvények, melyekre* $\int_a^b f_i^2(x)dx \geqq 1$. *Ekkor legalább $E(n)$ $f_i(x)$, $f_j(x)$ $(i \neq j)$ párra teljesül* $\int_a^b (f_i(x)+f_j(x))^2 dx \geqq 1$.

C. Tétel. *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ nulla várható értékű és D szórású (nem feltétlenül független) valószínűségi változók. Ekkor legalább $E(n)$ ξ_i, ξ_j $(i \neq j)$ párra teljesül* $D(\xi_i+\xi_j) \geqq D$.

Fenti tételek az A Tétel Hilbert térbeli változatának egyszerű speciális esetei.

Fogalmazzuk most át az A Tételt a valószínűségszámítás nyelvére. Ha adottak az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ d-dimenziós vektorok ($|a_i| \geqq 1$ $i=1, 2, \ldots, n$), és egymástól függetlenül kiválasztunk közülük kettőt, legalább mekkora a valószínűsége annak, hogy a két vektor összegének abszolút értéke legalább 1 legyen? Az összes lehetséges esetek száma n^2, a kedvező esetek száma legalább $2E(n)+n$, hiszen ha ugyanazt a vektort választjuk kétszer (ami itt megengedett), akkor az összeg abszolútértéke 1-nél nagyobb, és minden párt kétszer számoltunk. Azonban

$$2E(n)+n=\begin{cases} \dfrac{n^2}{2}, & \text{ha } n \text{ páros,} \\[2ex] \dfrac{n^2+1}{2} & \text{ha } n \text{ páratlan,} \end{cases}$$

azaz $2E(n)+n \geqq \frac{n^2}{2}$, és

$$P(|a_i+a_j| \geqq 1) \geqq \frac{1}{2}.$$

Vizsgáljuk meg, milyen egyenlőtlenség jön ki, ha nem tesszük fel az a_i vektorokról az $|a_i| \geqq 1$ tulajdonságot, és $P(|a_i+a_j| \geqq x)$-re keresünk hasonló alakú becslést. Tegyük fel, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorok közül $m(x)$ darabra teljesül az $|a_i| \geqq x$ feltétel. Ekkor, (1)-hez hasonlóan

$$(2) \qquad P(|a_i+a_j| \geqq x) \geqq \frac{2E(m(x))+m(x)}{n^2} \geqq \frac{m^2(x)}{2n^2} = \frac{1}{2} P(|a_i| \geqq x)^2.$$

Önkéntelenül adódik a gondolat, átvihető-e ez az egyenlőtlenség tetszőleges vektor valószínűségi változók esetére.

D. Tétel. *Legyenek tehát ξ és η független. egyforma eloszlású valószínűségi változók, folytonos és szigorúan monoton eloszlásfüggvénnyel, melyek a d-dimenziós térből veszik fel értékeiket. Ekkor teljesül a*

$$P(|\xi+\eta| \geqq x) \geqq \frac{P(|\xi| \geqq x)^2}{2}$$

egyenlőtlenség. (Az eloszlás függvényre vonatkozó feltevéseket csak azért tettük fel, hogy a bizonyítás egyszerűbben elmondható legyen, a tétel egyébként is helyes.)

Bizonyítás. A bizonyítást diszkrét, egyforma eloszlású valószínűségi változókkal való közelítéssel fogjuk végezni. A közelítést úgy hajtjuk végre, hogy ξ, illetve η lehetséges értékeit véges sok osztályba soroljuk, mely osztályok valószínűségei egyenlők. Az osztályokat 1—1 elemükkel helyettesítve már alkalmazhatjuk (2)-őt, s csupán a határátmenet helyességének igazolása marad hátra.

Az osztályokba sorolást koordinátánként végezzük el. Legyen ξ első koordinátája ξ_1 és legyen K egy természetes szám. Az első lépésben osszuk K osztályba ξ értékeit: $\xi=x$ legyen a k-adik osztályban, ha első koordinátájára, x_1-re

$$\frac{k-1}{K} \leqq P(\xi_1 < x_1) < \frac{k}{K}$$

teljesül ($k=K$ esetén a jobboldalon is $\leqq$ jel értendő). Ezzel ξ értékeit valóban egyenlő valószínűségű osztályokra bontottuk fel, ha $P(\xi_1 < x_1)$ folytonos függvény. Utóbbi azonban egyszerű következménye az eloszlásfüggvény folytonosságának.

Tekintsük a k-adik osztályt, de ismételjük meg benne az eljárást a második koordináta szerint:

$$\frac{k-1}{K} \leqq P(\xi_2 < x_2 | \ \xi \text{ eleme a } k\text{-adik osztálynak}) < \frac{k}{K}.$$

Így már K^2 osztályhoz jutottunk. Az eljárást hasonlóképpen folytatva K^d osztályt kapunk, melyeknek valószínűségei egyformák, hiszen minden lépésnél egyenlő valószínűségű halmazokat bontottunk K egyenlő részre.

Ha tehát most minden osztályból kiválasztunk egy tetszőleges elemet, és ahhoz $\frac{1}{K^d}$ valószínűséget rendelünk, akkor erre a ξ^K, és a hasonlóan képzett η^K valószínűségi változókra már alkalmazható (2):

$$P(|\xi^K+\eta^K| \geqq x) \geqq \frac{1}{2} P(|\xi^K| \geqq x)^2. \tag{3}$$

Igazolnunk kell még, hogy ξ^K d-dimenziós eloszlásfüggvénye ξ d-dimenziós eloszlásfüggvényéhez tart pontonként, ha $K \to \infty$, azaz

$$\lim_{K \to \infty} [P(\xi_1^K < x_1, \ldots, \xi_d^K < x_d) - P(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_d < x_d)] = 0. \tag{4}$$

Könnyen látható, hogy ehhez elég igazolni a következőket:

$$\lim_{K \to \infty} P(\xi_1^K < x_1, \ldots, \xi_d^K < x_d, \xi_1 \lessdot x_1, \ldots, \xi_d \lessdot x_d) =$$
$$= \lim_{K \to \infty} P(\xi_1^K \lessdot x_1, \ldots, \xi_d^K \lessdot x_d, \xi_1 < x_1, \ldots, \xi_d < x_d) = 0, \tag{5}$$

A zárójelben álló események csak olyan osztályokban következhetnek be, amelyekben van egy pont, amelynek i-edik koordinátája valamilyen i-re ($i=1, 2, \ldots, d$) x_i. Vagyis azokat az osztályokat kell tekintenünk, melyeken átmennek az $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ pontból a tengelyekkel párhuzamosan húzott $d-1$-dimenziós hipersíkok. Egy ilyen hipersík legfeljebb K^{d-1} osztályt metszhet (teljes indukcióval könnyen belátható). A hipersíkok száma d, egy osztály valószínűsége $\frac{1}{K^d}$, így a (4)-ben szereplő valószínűségek $d\frac{K^{d-1}}{K^d} = \frac{d}{K}$-val becsülhetők felülről, ami $K \to \infty$ esetén 0-hoz tart, vagyis (5)-öt és (4)-et igazoltuk.

A valószínűségszámításból jól ismert, hogy (4) fennállása esetén

$$P(|\xi^K| \geqq x) \to P(|\xi| \geqq x)$$

is teljesül, ha d-dimenziós eloszlásfüggvénye folytonos. Ez esetben ugyancsak teljesül.

$$P(|\xi^K+\eta^K| \geqq x) \to P(|\xi+\eta| \geqq x).$$

Ezeket a konvergenciákat felhasználva (3)-ból már következik a tétel állítása.

Hasonló tétel bizonyítható olyan sztochasztikus folyamatokra, melyek egy $[a, b]$ intervallumban vannak értelmezve, és realizációik egy valószínűséggel négyzetesen integrálhatók itt. Ha $\xi(t)$ és $\eta(t)$ két független realizáció, akkor

$$P\left(\int_a^b (\xi(t)+\eta(t))^2 \, dt \geqq x\right) \geqq \frac{1}{2} P\left(\int_a^b \xi^2(t) \, dt \geqq x\right)^2$$

IRODALOM

[1] *Turán Pál:* Gráfok, geometria és generalizált potenciálok. Előadás a Bolyai János Matematikai Társulat rendezésében 1968. nov. 22-én.

[2] *Turán Pál:* Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról, Mat. Fiz. Lapok XLVIII, 1941., p. 436—452.

ГРАФЫ, ВЕКТОРЫ И НЕРАВЕНСТВА В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Д. КАТОНА

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ d-мерные векторы, где $|a_i| \geqq 1 (i=1, 2, \ldots, r)$. Доказано, что неравенство $|a_i+a_j| \geqq 1$ $(i \neq j)$ имеет место по крайней мере для $\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)$ пар, если n чётно $\left[\text{и } \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \text{ пар, если } n \text{ нечётно}\right]$. Доказательство онирается на теорему Турана [2]. Утверждение имеет место и в случае гильбертового пространства. Даны приложения например $P(|\xi+\eta| \geqq x) \geqq \frac{1}{2} P(|\xi| \geqq x)^2$, где ξ и η одинаково распределенны векторные случайные величины.

GRAPHS, VECTORS AND INEQUALITIES IN PROBABILITY THEORY

G. KATONA

Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be d-dimensional vectors with the property $|a_i| \geqq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. It is proved that the inequality $|a_i+a_j| \geqq 1$ $(i \neq j)$ holds for at least $\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)$ pairs if n is even and $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ pairs if n is odd. The proof is based on Turán's graph theorem [2]. The statement is valid for Hilbert space, too. Among others the following application is given: $P(|\xi+\eta| \geqq x) \geqq \frac{1}{2} P(|\xi| \geqq x)^2$, where ξ and η are independent uniquely distributed random vector-variables.