

Gráfok előírt fokszámsorozattal

Miklós István

Rényi Intézet

2009. november 16.

Nemi betegségek epidemiológiája

Kérdőív magas rizikófaktorú csoportokban

- ◆ Lehet kérdezni, hogy hány parner
- ◆ Nem lehet kérdezni, hogy kivel (személyiségi jogok miatt)
- ◆ Milyen a “tipikus” gráf?

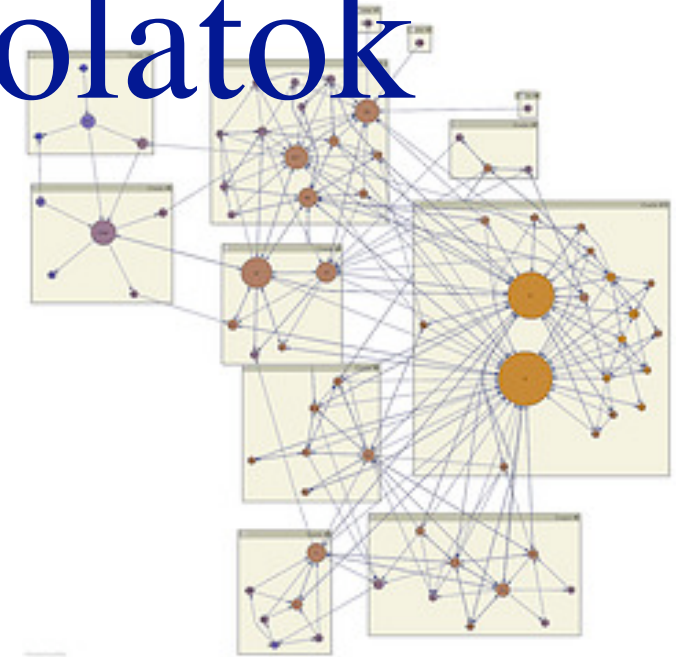
Vanuatu szigetvilág faunája

- ◆ Prezenca-abszencia mátrix
- ◆ Mintázatok, pl. kölcsönös elkerülés
- ◆ Sok vagy kevés? Milyen az eloszlása ezeknek a statisztikáknak?

0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0



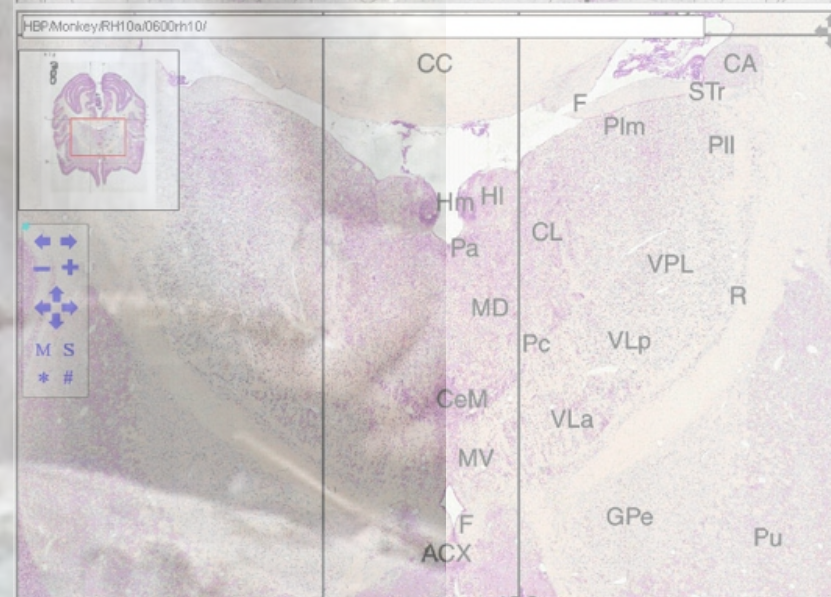
Makákó agyi kapcsolatok



◆ Kapcsoltság leírása irányított gráffal

◆ Mintázatok

◆ Véletlen, szükségszerű vagy speciális? Milyen az eloszlása ezeknek a statisztikáknak?



Gráfok adott fokszámsorozattal

- ◆ Létezik-e?
- ◆ Hogyan lehet konstruálni egyet?
- ◆ Hogyan lehet megkonstruálni az összeset?
- ◆ Hány adott fokszámsorozatú gráf van egy fokszámsorozatra?
- ◆ Hogyan lehet egy random gráfot generálni?

Havel-Hakimi

Tétel (Havel, 1955, Hakimi, 1962)

Adott

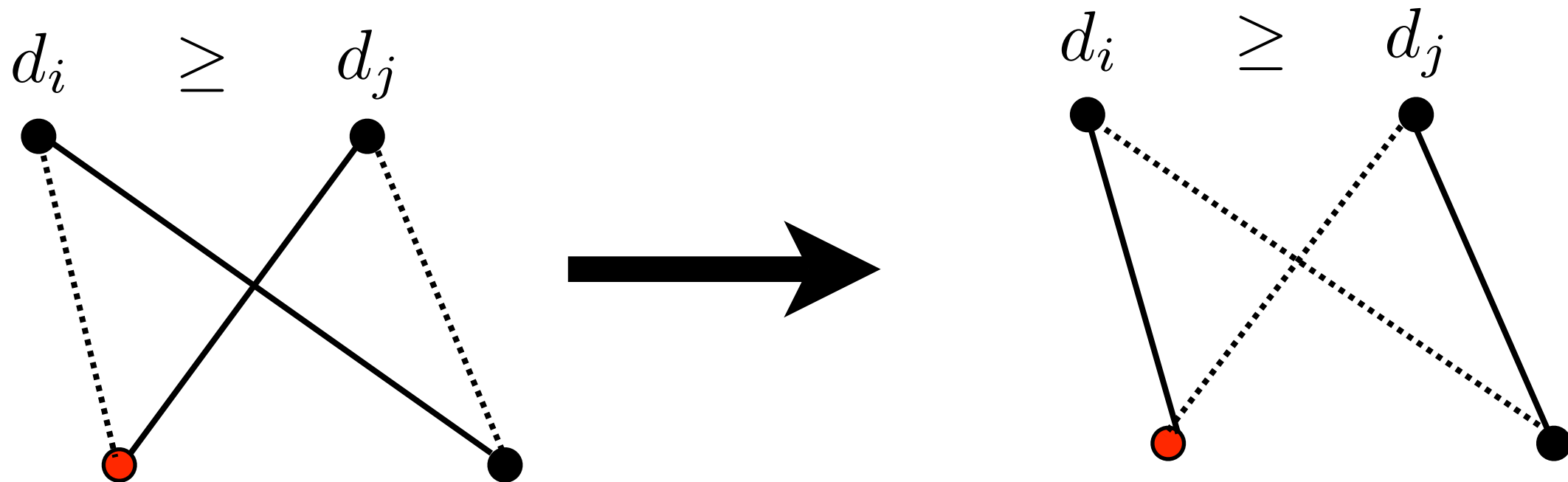
$$d_1 \geq d_2 \geq d_3 \dots \geq d_{n-1}, \quad d_n$$

fokszámsorozatra létezik azt realizáló gráf, akkor és csak akkor ha létezik

$$d_1 - 1, d_2 - 1, \dots, d_{d_n} - 1, d_{d_n+1}, \dots, d_{n-1}$$

fokszámsorozatot realizáló gráf

Havel-Hakimi



Folyomány: swapokkal bármelyik realizáció atalakítható bármelyik másikba

Irányított Havel-Hakimi

Tétel (Erdős, Miklós, Toroczkai, 2009)

Legyen adott egy

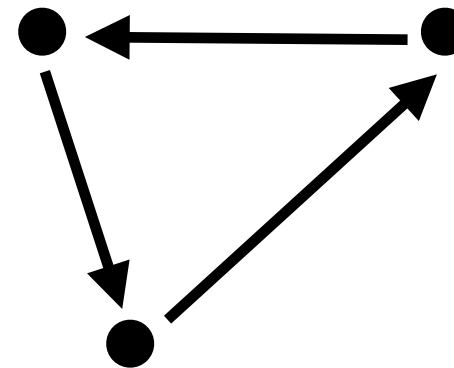
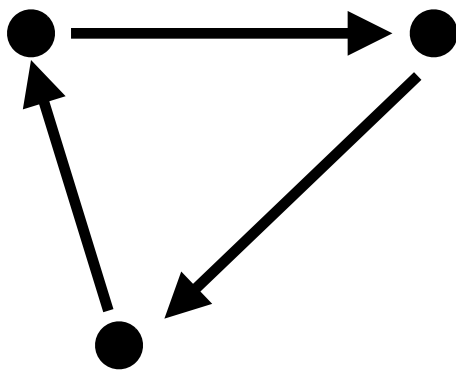
$$\{d_1^+, d_2^+, \dots, d_n^+\}, \quad \{d_1^-, d_2^-, \dots, d_n^-\}$$

fokszámsorozat, amely lexikografikus $n - 1$ -ig, valamint $d_n^- > 0$. Ekkor létezik irányított gráf, amely ezt a fokszámsorozatpárt realizálja akkor és csak akkor ha létezik irányított gráf, amely a

$$\{d_1^+ - 1, d_2^+ - 1, \dots, d_{d_n^-}^+ - 1, d_{d_n^-+1}^+, \dots, d_n^+\} \quad \{d_1^-, d_2^-, \dots, d_{n-1}^-, 0\}$$

fokszámsorozatpárt realizálja.

Irányított Havel-Hakimi

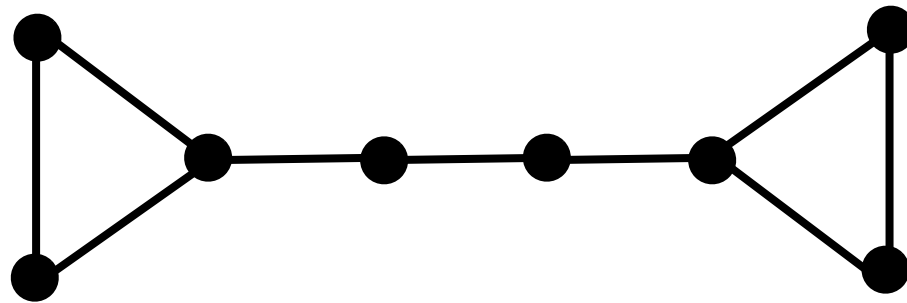


Swapokkal a realizációk nem mindig átalakíthatóak egymásba!

Ugyanakkor a mi eredményünk folyamánya, hogy dupla és tripla swapokkal minden realizáció átalakítható egymásba

Adott fokszámsorozatú összes gráf

A Havel-Hakimi konstrukció nem adja meg az összeset!



Összes gráf amely adott fokszámsorozatot realizál

Kim, Toroczkai, Erdős, Miklós, Székely (2009)

Polinom várakozási idejű algoritmus az összes realizáció megkonstruálására

Következmény: az összes realizáció számának a problémája önhasonló leszámolási probléma

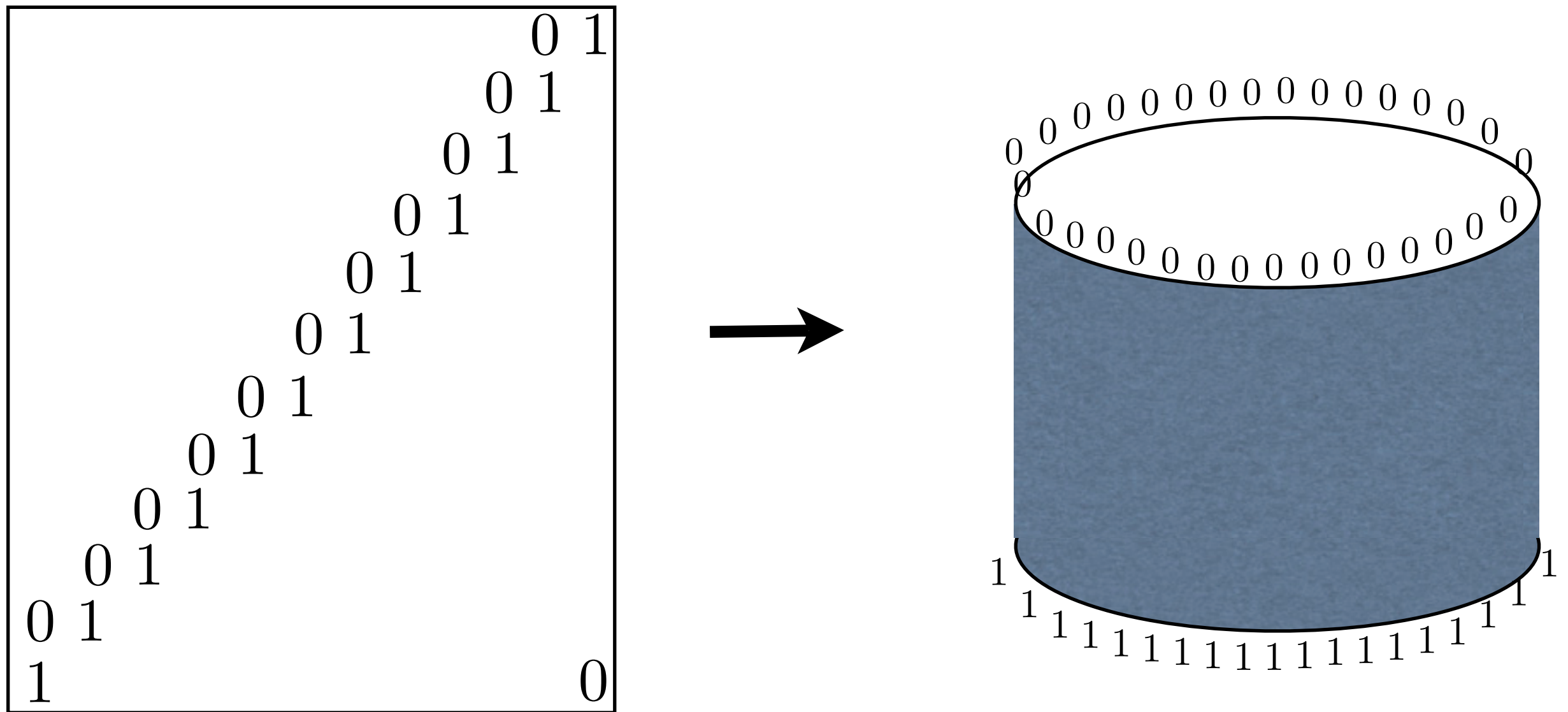
Adott fokszámsorozatú random gráf generálása

Kannan, Tetali, Vempala (1999) Páros reguláris gráfokra a swap Markov lánc gyorsan konvergál az egyenletes eloszláshoz

Cooper, Dyer, Greenhill (2007) Reguláris gráfokra a swap Markov lánc gyorsan kever

Miklós, Erdős, Soukup (2009, kézirat előkészületben)
Szemireguláris fokszámsorozat-párra az ezeket realizáló gráfokon sétáló swap Markov lánc gyorsan konvergál az egyenletes eloszláshoz

M-E-S központi trükk



Vagy van 'barátságos' élekből út a 0 gyűrűtől az 1 gyűrűig vagy van nem-barátságosokból szeparáló gyűrű

Bizonyítások gyors Markov lánc konvergenciára

Kombinatorikus: Multicommodity flow. Pl. swap Markov lánc reguláris gráfokon

Probabilisztikus: Coupling. Pl. poset linearizáció, permutációk

Geometriai: Konvex test az állapottér. Pl. poset linearizáció, permutációk

M-E-S: Multicommodity flow, geometriai ötlettel.

Nyílt kérdések

- Swap Markov lánc keveredése tetszőleges gráfokra
- Alsó becslés a Markov lánc konvergenciasebességére
- Igaz-e, hogy a realizációk száma $\#P$ -teljes probléma?
- Mikor létezik páros gráf adott fokszámsorozatra (ha az osztályok nincsenek megadva)?

Köszönöm a figyelmet!