

Markov-láncok és Markov-folyamatok

Tárgyalni fogom a Markov-láncok és Markov-folyamatok elméletét, amely a valószínűségi számítás egyik fontos része. Kissé informálisan a Markov-folyamatokat úgy jellemezhetjük, mint olyan sztochasztikus folyamatokat, amelyek jövőbeli viselkedéséről egy adott időpontig összegyűjtött információt a folyamat viselkedése a megfigyelt időintervallum végpontjában teljes mértékben tartalmazza. Ez azt jelenti, hogy annak feltételes valószínűsége, hogy valamely a folyamatnak csak a jövőbeli viselkedésétől függő esemény bekövetkezik, feltéve, hogy a Markov-folyamat a jelen időpontban egy adott értéket vesz fel, megegyezik ugyanennek az eseménynek a feltételes valószínűségével, feltéve a folyamat teljes múltbeli viselkedését. Megfogalmazom ezt az állítást pontosabban is. A pontos definícióban megjelenik a a feltételes valószínűség meglehetősen bonyolult, a Radon–Nykodim deriváltak létezésén alapuló általános fogalma. Viszont abban az esetben, amikor a Markov-folyamat csak véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok értéket vesz fel, elegendő a feltételes valószínűség egyszerű, a bevezető valószínűségi számítás előadásban is ismertett fogalmának az ismerete és használata. Az ilyen egyszerűbb Markov-folyamatokat Markov-láncoknak nevezik az irodalomban.

A következő eljárást fogom követni. Ismertetem a Markov-folyamat definícióját az általános esetben, de részletesen csak a Markov-láncok elméletét fogom tárgyalni, ahol sok érdekes és tanulságos kérdés megjelenik, viszont nincs szükség arra, hogy nehéz mértékelméleti problémákkal foglalkozzunk. Először megadom a Markov-folyamat általános definícióját. Egy Markov-folyamat alkalmas tulajdonságokkal rendelkező, speciális sztochasztikus folyamat, amely egy paramétertől függ, amelyet időnek fogok nevezni. Külön tárgyalom azt az esetet, amelyben ez a paraméter tartomány (idő) a nem negatív valós számok halmaza, az ilyen Markov-folyamatot folytonos idejű Markov-folyamatnak hívják, és azt az esetet, amikor a paraméter tartomány a pozitív egész számok halmaza. Az ilyen Markov-folyamatokat diszkrét idejű Markov-folyamatnak hívják.

Folytonos idejű Markov-folyamat definíciója. *Legyen adva egy $X(t)$, $t \geq 0$, sztochasztikus folyamat valamely (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn, amely értékeit valamely (E, \mathcal{E}) mérhető téren veszi fel. Azt mondjuk, hogy $X(t)$ (E, \mathcal{E}) -térbeli értékű folytonos idejű Markov-folyamat, ha minden $0 \leq s \leq t < \infty$ számpárra és \mathcal{E} -mérhető $A \in \mathcal{E}$ halmazra teljesül a*

$$P(X_t \in A | \mathcal{B}(X_s)) = P(X_t \in A | \mathcal{B}(X_u, u \leq s))$$

azonosság, ahol $\mathcal{B}(X_s)$ az X_s valószínűségi változó, $\mathcal{B}(X_u, u \leq s)$ pedig az összes X_u , $u \leq s$, valószínűségi változó által generált σ -algebrát jelöli.

Kissé általánosabban, legyen adva egy (E, \mathcal{E}) térbeli értékeket felvevő $X(t)$, $t \geq 0$, sztochasztikus folyamat, valamint σ -algebrák növekvő \mathcal{F}_t , $t \geq 0$, családja egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn, azaz legyen $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, ha $s \leq t$, és legyen X_t \mathcal{F}_t -mérhető valószínűségi változó, $t \geq 0$. Teljesüljön ezenkívül a $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ reláció minden $t \geq 0$ számra. Az (X_t, \mathcal{F}_t) , $t \geq 0$, rendszer folytonos idejű Markov-folyamat, ha

$$P(X_t \in A | \mathcal{B}(X_s)) = P(X_t \in A | \mathcal{F}_s) \quad \text{minden } 0 \leq s \leq t < \infty \text{ számra,} \\ \text{és } A \in \mathcal{E} \text{ halmazra.}$$

Diszkrét idejű Markov-folyamat definíciója. Legyen adva egy X_n , $n = 0, 1, \dots$, sztochasztikus folyamat valamely (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn, amely értékeit valamely (E, \mathcal{E}) mérhető téren veszi fel. Azt mondjuk, hogy X_n (E, \mathcal{E}) -térbeli értékű diszkrét idejű Markov-folyamat, ha minden $0 \leq m \leq n < \infty$ számra és \mathcal{E} -mérhető $A \in \mathcal{E}$ halmazra teljesül a

$$P(X_n \in A | \mathcal{B}(X_m)) = P(X_n \in A | \mathcal{B}(X_k, 0 \leq k \leq m))$$

azonosság, ahol $\mathcal{B}(X_m)$ az X_m valószínűségi változó, $\mathcal{B}(X_k, 0 \leq k \leq m)$ pedig az összes X_k , $0 \leq k \leq m$, valószínűségi változó által generált σ -algebrát jelöli.

Kissé általánosabban tekintsünk egy (E, \mathcal{E}) térbeli értékeket felvevő X_n , $n = 0, 1, \dots$, sztochasztikus folyamatot, és ezenkívül σ -algebrák növekvő \mathcal{F}_n , $n = 0, 1, \dots$, családját egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn, azaz legyen $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n$, ha $m \leq n$, és legyen X_n \mathcal{F}_n -mérhető valószínűségi változó, $n = 1, 2, \dots$. Teljesüljön ezenkívül a $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{A}$ reláció minden $n = 0, 1, \dots$ számra. Az (X_n, \mathcal{F}_n) , $n = 1, 2, \dots$, rendszer diszkrét idejű Markov-folyamat, ha

$$P(X_n \in A | \mathcal{B}(X_m)) = P(X_n \in A | \mathcal{F}_m) \quad \text{minden } 0 \leq m \leq n < \infty \text{ számra,}$$

és $A \in \mathcal{E}$ halmazra.

1. megjegyzés: Az $\mathcal{F}_t = \mathcal{B}(X_u, u \leq t)$ illetve $\mathcal{F}_n = \mathcal{B}(X_k, k \leq n)$ választással tekinthetjük a Markov-folyamatok időben folytonos illetve diszkrét definícióit az általános definíció speciális eseteinek.

2. megjegyzés: A Markov-folyamatok definíciójában szereplő $P(X_t \in A | \mathcal{B}(X_s))$ illetve $P(X_n \in A | \mathcal{B}(X_m))$ feltételes valószínűségek megadhatóak, mint az $X_s = x$ illetve $X_m = x$ feltételek valamint az s és t illetve m és n időpontok és $A \in \mathcal{E}$ halmazok függvényei. A $P(X_t \in A | X_s = x) = P_{s,t}(x, A)$ illetve $P(X_n \in A | X_m = x) = P_{m,n}(x, A)$, $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$, $s \leq t$ illetve $m \leq n$ mennyiségeket átmenet valószínűségnek hívják. Ezek szemléletes tartalma a következő: A $P_{s,t}(x, A)$, illetve $P_{m,n}(x, A)$ átmenet valószínűség megadja annak valószínűségét, hogy a Markov-folyamat a t illetve n időpontban az A halmaz valamely pontjába jut, feltéve, hogy az az $s < t$ illetve $m < n$ időpontban az x pontban tartózkodott. A Markov tulajdonság azt jelenti, hogy ha tudom milyen módon jutott a Markov-folyamat az x pontba az s illetve m időpontban, akkor ez a plusz ismeret nem befolyásolja a fenti feltételes valószínűség értékét.

3. megjegyzés: A továbbiakban a Markov-folyamatokat azok $P_{s,t}(x, A)$, $0 \leq s < t$, $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$, (a folytonos idejű) illetve $P_{m,n}(x, A)$, $0 \leq m \leq n$, $m, n = 0, 1, 2, \dots$, $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$, átmenet valószínűség függvényekkel adjuk meg (a diszkrét idejű esetben). Az átmenet valószínűségek teljesítik a következő tulajdonságokat.

- a) Rögzített $x \in E$ pontra $P_{s,t}(x, \cdot)$, illetve $P_{m,n}(x, \cdot)$ valószínűségi mérték az (E, \mathcal{E}) téren.

- b) Rögzített $A \in \mathcal{A}$ halmazra $P_{s,t}(\cdot, A)$ illetve $P_{m,n}(\cdot, A)$ mérhető függvény az (E, \mathcal{E}) téren.
- c) $P_{s,s}(x, A) = 1$, ha $x \in A$ és $P_{s,s}(x, A) = 0$, ha $x \notin A$. Hasonlóan, $P_{m,m}(x, A) = 1$, ha $x \in A$ és $P_{m,m}(x, A) = 0$, ha $x \notin A$.

A következő d) pontban egy olyan tulajdonságot fogalmazok meg, amely azt fejezi ki, hogy egy X_t Markov folyamat átmenet valószínűségeit a $P_{s,t}(x, A)$ átmenet valószínűség függvények adják meg. E tulajdonság megfogalmazásában μ_s jelöli az X_s valószínűségi változó eloszlását.

- d) $P_{s,t}(x, A) = P(X_t(\omega) \in A | X_s(\omega) = x)$, azaz

$$P(X_t(\omega) \in A, X_s \in B) = \int_B P_{s,t}(x, A) \mu_s(dx),$$

minden $A \in \mathcal{E}$ és $B \in \mathcal{E}$ halmazra, ahol μ_s az X_s valószínűségi változó eloszlása. Hasonlóan $P_{m,n}(x, A) = P(X_n(\omega) \in A | X_m(\omega) = x)$.

Folytonos idejű Markov folyamatok esetén felteszünk még egy plusz feltevést, amely azt fejezi ki, hogy a Markov folyamat kis idő alatt keveset változik.

- e) A Markov folyamat értékeit egy teljes szeparábilis metrikus térben veszi fel, (ahol van topológia), és $\lim_{t \rightarrow s+0} P_{s,t}(x, A) = 1$ minden az x pontot tartalmazó nyílt A halmazra.

Ezek a tulajdonságok természeteseek. Be lehet látni, hogy minden szép tulajdonságú téren definiált Markov-folyamatra (például ez a helyzet, ha (E, \mathcal{E}) teljes szeparábilis metrikus tér a szokásos Borel σ -algebrával) meg lehet adni a feltételes átmenetvalószínűségeket úgy, hogy teljesítsék a fenti tulajdonságokat. Ennek a ténynek a bizonyítását, amely a reguláris feltételes eloszlás létezésének a bizonyításán alapul nem tárgyalom.

Általában úgynevezett stacionárius Markov-folyamatokkal foglalkoznak az irodalomban. Ha nem hangsúlyozzák külön az ellenkezőjét, akkor Markov-folyamaton stacionárius Markov-folyamatot értenek. Mi is így fogunk tenni a továbbiakban. A stacionárius Markov-folyamatok definíciója a következő:

Stacionárius Markov-folyamat definíciója. Egy X_t , $t \geq 0$, (vagy (X_t, \mathcal{F}_t) általánosított) folytonos idejű Markov-folyamatot folytonos idejű stacionárius Markov-folyamatnak nevezünk, ha a folyamat átmenetvalószínűségei teljesítik a $P_{s,t}(x, A) = P_{t-s}(x, A)$ azonosságot, minden $0 \leq s \leq t$ számpárra, azaz a $P_{s,t}(x, A)$ átmenetvalószínűség csak az s és t időpont között eltelt időtől függ.

Egy X_n , $n = 0, 1, \dots$, (vagy (X_n, \mathcal{F}_n) általánosított) diszkrét idejű Markov-folyamatot diszkrét idejű stacionárius Markov-folyamatnak nevezünk, ha az átmenetvalószínűségei teljesítik a $P_{m,n}(x, A) = P_{n-m}(x, A)$ azonosságot minden $0 \leq m \leq n$ számpárra, azaz a $P_{m,n}(x, A)$ átmenetvalószínűség csak az m és n időpont között eltelt időtől függ.

Stacionárius Markov-folyamatok átmenetvalószínűségeinek definíciója. Egy értékeit valamely (E, \mathcal{E}) mérhető téren felvevő X_t , $t \geq 0$, folytonos idejű stacionárius

Markov-folyamat átmenetvalószínűségén a

$$P(t, x, A) = P(X_{u+t} \in A | X_u = x) = P_{u, u+t}(x, A), \quad t \geq 0, \quad x \in E, \quad A \in \mathcal{A},$$

feltételes valószínűségek rendszerét értjük, amely a stacionárius tulajdonság miatt nem függ az $u \geq 0$ paramétertől.

Hasonlóképpen egy értékeit valamely (E, \mathcal{E}) mérhető téren felvevő $X_n, n = 0, 1, \dots$, diszkrét idejű stacionárius Markov-folyamat átmenetvalószínűségén a

$$P(n, x, A) = P(X_{n+m} \in A | X_n = x) = P_{m, n+m}(x, A), \quad n = 0, 1, \dots, \quad x \in E, \quad A \in \mathcal{A},$$

feltételes valószínűségek rendszerét értjük, amely a stacionárius tulajdonság miatt nem függ az $m = 1, 2, \dots$ paramétertől.

Megjegyzés: A stacionárius Markov-folyamatokra az előbb bevezetett $P(t, x, A)$ és $P(n, x, A)$, $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, átmenetvalószínűségek teljesítik a következő Chapman–Kolmogorov egyenletnek (vagy azonosságnak) nevezett azonosságokat:

$$P(s + t, x, A) = \int P(t, y, A)P(s, x, dy) \quad \text{ha } s \geq 0 \text{ és } t \geq 0. \quad (1)$$

és

$$P(m + n, x, A) = \int P(n, y, A)P(m, x, dy) \quad \text{minden } m = 0, 1, \dots$$

és $n = 0, 1, \dots$ számra. (2)

Ezenkívül a $P(t, x, A)$ illetve $P(n, x, A)$ átmenetvalószínűségek teljesítik az alábbi tulajdonságokat: Minden rögzített t illetve n időpontra és $x \in E$ pontra $P(t, x, \cdot)$ illetve $P(n, x, \cdot)$ valószínűségi mérték. Minden t illetve n időpontra és $A \in \mathcal{E}$ halmazra $P(t, \cdot, A)$ illetve $P(n, \cdot, A)$ mérhető függvények az (E, \mathcal{E}) téren. Továbbá mind a folytonos mind a diszkrét idejű Markov-folyamatok esetén teljesül a $P(0, x, A) = 1$, ha $x \in A$ és $P(0, x, A) = 0$, ha $x \notin A$ reláció. A felsorolt tulajdonságok jellemzik is a stacionárius Markov-folyamatokat, azaz minden (értékeit szép topológiai tulajdonságokkal rendelkező téren, (például teljes szeparábilis metrikus téren) felvevő stacionárius Markov-folyamathoz meg lehet adni a feltételes eloszlásokat a fenti tulajdonságokkal rendelkező átmenetvalószínűségekkel.

Valójában érvényes a Chapman–Kolmogorov egyenlet következő általánosabb alakja is nem feltétlenül stacionárius Markov folyamatokra:

$$P_{s,t}(x, A) = \int P_{u,t}(y, A)P_{s,u}(x, dy) \quad \text{ha } 0 \leq s \leq u \leq t. \quad (1')$$

és

$$P_{m,n}(x, A) = \int P_{l,n}(y, A)P_{m,l}(x, dy) \quad \text{minden } 0 \leq m \leq l \leq n, \text{ egész számhármásra.} \quad (2')$$

A fent megfogalmazott, az irodalomban Chapman–Kolmogorov egyenletnek nevezett (1) illetve (2) azonosságok (és azok (1') illetve (2') általánosításai) nagyon természetes állítások. A Chapman–Kolmogorov egyenlet tekinthető a Markov-folyamatok elméletében a legfontosabb azonosságnak. Ennek precíz bizonyításához szükség van arra, hogy általános (Radon–Nykodim deriváltak segítségével definiált) feltételes valószínűségekkel számoljunk, illetve fel kell használni azt a tényt, hogy az átmenetvalószínűségek teljesítik a (2) képlet után megfogalmazott tulajdonságokat. Mivel az ilyen technikai részletek tárgyalását minimálisra kívánom szorítani, ezért ezt a számolást csak a kiegészítésben ismertetem. A számunkra legfontosabb esetben, amikor Markov-láncokat tekintünk, elvégzem ezt a lényegesen egyszerűbb számolást az előadás fő részében.

Megjegyzés. Legyen adva $P_{s,t}(x, A)$, $0 \leq s < t < \infty$, $x \in E$ és $A \in \mathcal{E}$ az a)–d) tulajdonságot valamint az (1') Chapman–Kolmogorov egyenletet teljesítő átmenet valószínűségek egy rendszere valamint egy μ_0 valószínűségi mérték az (E, \mathcal{E}) téren. Ekkor létezik olyan X_t , $t \geq 0$, értékeit az (E, \mathcal{E}) téren felvevő Markov folyamat, amelyre $P(X_0 \in A) = \mu_0(A)$ minden $A \in \mathcal{E}$ halmazra, és $P(X_t \in A | X_s = x) = P_{s,t}(x, A)$ minden $0 \leq s < t < \infty$ időpontokra, $x \in E$ pontra és $A \in \mathcal{E}$ halmazra. Hasonló állítás érvényes időben diszkrét Markov folyamatokra is.

Ilyen X_t Markov folyamatokat definiálhatunk azon az (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn, ahol Ω a számegyenesen definiált függvények tere, \mathcal{A} az $\{x(\cdot): x(t_1) \in A_1, x(t_2) \in A_2, \dots, x(t_k) \in A_k\}$ alakú halmazok által generált σ -algebra, $X_t(\omega) = x(t)$, ha $\omega = x(\cdot)$, a P valószínűségi mértéket pedig a következő formula definiálja. Legyen $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \infty$, $A_j \in \mathcal{E}$, $0 \leq j \leq k$. Ekkor

$$\begin{aligned} & P(\{x(\cdot): x(t_0) \in A_0, x(t_1) \in A_1, \dots, x(t_k) \in A_k\}) \\ &= \int_{A_0} \mu_0(dx_0) \left(\int_{A_1} P_{t_0, t_1}(x_0, dx_1) \left(\int_{A_2} P_{t_1, t_2}(x_1, dx_2) \dots \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left(\int_{A_{k-1}} P_{t_{k-2}, t_{k-1}}(x_{k-2}, dx_{k-1}) \left(\int_{A_k} P_{t_{k-1}, t_k}(x_{k-1}, dx_k) \right) \right) \dots \right) \right). \end{aligned}$$

Egy nem triviális mértékelméleti eredmény alapján (Tulcea–Ioniescu tétel) ilyen módon egy valószínűségi mértéket definiálunk. A Chapman–Kolmogorov egyenlet teljesülését azért kellett megkövetelni, mert ez biztosítja, hogy a definiált véges dimenziós eloszlások konzisztensek. (Például $P(X_{t_1} \in A, X_{t_3} \in B) = P(X_{t_1} \in A, X_{t_2} \in E, X_{t_3} \in B)$.) A részletek bizonyításától eltekintek.

Legyen adva egy diszkrét idejű Markov-folyamat, amely értékeit valamely (E, \mathcal{E}) téren veszi fel. A (2) reláció szerint a Markov-folyamat $P(x, A)$ átmenetvalószínűségei teljesítik a

$$P(n+1, x, A) = \int P(1, y, A) P(n, x, dy) \quad \text{minden } n = 0, 1, \dots \text{ számra.} \quad (3)$$

azonosságot. Ez azt jelenti, hogy ha megadjuk a $P(1, x, A)$ átmenetvalószínűségeket, akkor n szerinti indukcióval ki tudjuk számolni a $P(n, x, A)$ átmenetvalószínűségeket minden $n = 0, 1, \dots$ számra.

Összefoglalásként megfogalmazom a következő állítást.

A Markov-folyamatok tulajdonságairól szóló állítások összefoglalása. *Legyen adva egy (X_t, \mathcal{F}_t) , $t \geq 0$, folytonos vagy egy (X_n, \mathcal{F}_n) , $n = 0, 1, 2, \dots$, diszkrét idejű Markov-folyamat. (Feltesszük, hogy ez a Markov-folyamat egy szép topológiai tulajdonságokkal rendelkező téren veszi fel az értékeit.) Ekkor ennek a Markov-folyamatnak léteznek olyan $P_{s,t}(x, A)$ illetve $P_{m,n}(x, A)$ átmenetvalószínűségei, amelyek teljesítik a 3. megjegyzésben megfogalmazott a), b), c) és d) tulajdonságokat valamint az (1') illetve (2') formulában megfogalmazott Chapman–Kolmogorov egyenletet is.*

Igaz a fenti állítás következő itt nem bizonyított megfordítása is. Legyen adva $P_{s,t}(x, A)$, $0 \leq s \leq t$, vagy $P_{m,n}(x, A)$, $0 \leq m \leq n$, függvényeknek egy olyan rendszere, amely teljesíti a 3. megjegyzésben megfogalmazott a), b), c) és d) tulajdonságokat, (folytonos idő estén az e) tulajdonságot is) és az (1') illetve (2') formulában megfogalmazott Chapman–Kolmogorov egyenletet. Ez úgy értendő, hogy adva van egy (E, \mathcal{E}) tér, ahol \mathcal{E} egy az E téren definiált σ -algebra, és a $P_{s,t}(x, A)$ illetve $P_{m,n}(x, A)$ függvények minden $x \in E$ pontra $A \in \mathcal{E}$ halmazra és $0 \leq s \leq t$ valós, illetve $0 \leq m \leq n$ egész számokra definiálva vannak. Ekkor létezik olyan X_t , $t \geq 0$, folytonos, illetve olyan X_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, diszkrét idejű, értékeit az (E, \mathcal{E}) térben felvevő Markov-folyamat, amelynek a $P_{s,t}(x, A)$ illetve a $P_{m,n}(x, A)$ függvények az átmenetvalószínűségei. Sőt, a 0 időpontbeli X_0 valószínűségi változó eloszlását tetszőleges módon előírhatjuk.

A következő definícióban bizonyos az irodalomban elterjedt szóhasználatot vezetek be.

Markov-láncok definíciója. *Ha egy (folytonos vagy diszkrét idejű Markov-folyamat egy (E, \mathcal{E}) mérhető téren veszi fel az értékeit, akkor ezt az (E, \mathcal{E}) teret a Markov-folyamat állapotterének hívjuk. Egy olyan Markov folyamatot, amelynek állapottere egy véges vagy megszámlálható számosságú halmaz (a diszkrét topológiával) Markov-láncnak nevezzük. Ha E_1, E_2, \dots jelöli a Markov lánc változói által felvett értékeket akkor képletben kifejezve egy diszkrét idejű stacionárius Markov lánc olyan sztochasztikus folyamat, amely teljesíti a*

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = E_{j_{n+1}} | X_n = E_{j_n}, \dots, X_0 = E_{j_0}) &= P(X_{n+1} = E_{j_{n+1}} | X_n = E_{j_n}) \\ &= P(X_1 = E_{j_{n+1}} | X_0 = E_{j_n}) \end{aligned}$$

azonosságot.

A továbbiakban (stacionárius) Markov-láncokkal fogunk foglalkozni, azokon belül is elsősorban diszkrét idejű Markov-láncokkal. A következő jelölést fogom használni. Jelölje az állapotokat E_1, E_2, \dots , és legyen $P(n, j, k) = P(X_{n+m} = E_k | X_m = E_j)$, $m = 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$ azaz $P(n, j, k)$ annak feltételes valószínűsége, hogy a Markov-lánc az $n + m$ időpontban az E_k állapotba jut, feltéve, hogy az m időpontban az E_j állapotban volt. Használjuk továbbá a $P(j, k) = P(1, j, k)$ jelölést, azaz az 1-lépéses $P(1, j, k)$ átmenetvalószínűségeket hagyjuk el az 1 koordinátát. Felírom a Chapman–Kolmogorov egyenletet Markov-láncokra a fent bevezetett jelöléssel.

$$P(n + m, j, k) = \sum_l P(n, j, l) P(m, l, k) \quad (4)$$

ahol az összegzés végigfut az összes olyan l indexen, amelyre az E_l állapot létezik. Jelöléseink szerint vagy létezik egy olyan N pozitív egész szám, hogy E_1, \dots, E_N az összes lehetséges állapotok halmaza, és ekkor $1 \leq l \leq N$ az összegzés a (4) formulában, vagy megszámlálható sok E_1, E_2, \dots a lehetséges állapotok halmaza, és ekkor az összegezés $1 \leq l < \infty$ indexelésre történik.

Lemma. *Egy diszkrét idejű stacionárius Markov-lánc teljesíti a (4) formulában megfogalmazott Chapman–Kolmogorov egyenletet.*

A lemma bizonyítása.

$$\begin{aligned}
P(n+m, j, k) &= P(X_{n+m} = E_k | X_0 = E_j) \\
&= \sum_l P(X_{n+m} = E_k, X_n = E_l | X_0 = E_j) \\
&= \sum_l P(X_{n+m} = E_k, | X_n = E_l, X_0 = E_j) P(X_n = E_l | X_0 = E_j) \\
&= \sum_l P(X_{n+m} = E_k, | X_n = E_l) P(X_n = E_l | X_0 = E_j) \\
&= \sum_l P(m, l, k) P(n, j, l).
\end{aligned}$$

(E számolásban felhasználtuk a Markov tulajdonságból következő

$$P(X_{n+m} = E_k | X_n = E_l, X_0 = E_j) = P(X_{n+m} = E_k | X_n = E_l)$$

azonosságot.)

Feladat: Bizonyítsuk be a Chapman–Kolmogorov egyenletet diszkrét idejű nem feltétlenül stacionárius Markov-lánckokra. Részletesebben megfogalmazva legyenek egy E_1, E_2, \dots állapotokkal rendelkező diszkrét idejű X_0, X_1, \dots Markov-lánc átmenetvalószínűségei $P_{m,n}(j, k) = P(X_n = E_k | X_m = E_j)$, $n \geq m \geq 0$, $j, k = 0, 1, \dots$. Minden $m \leq r \leq n$ időpontra igaz a következő azonosság:

$$P_{m,n}(j, k) = \sum_l P_{m,r}(j, l) P_{r,n}(l, k).$$

Bevezettük a (stacionárius) Markov láncok fogalmát, és definiáltuk Markov láncok $P(n, j, k) = P(X_{n+m} = E_k | X_m = E_j)$ átmenetvalószínűségeit. Láttuk, hogy ezek teljesítik a (4) formulában megfogalmazott Chapman–Kolmogorov azonosságot. Jegyezzük meg, hogy a Chapman–Kolmogorov azonosság alapján elegendő a $P(1, j, k)$ egy lépéses átmenetvalószínűségeket megadni, mert ezek segítségével a $P(n, j, k)$ mennyiségeket is kiszámolhatjuk tetszőleges $n = 1, 2, \dots$ számokra. A $P(1, j, k)$ átmenet valószínűségek teljesítik az alábbi relációkat:

$$\sum_k P(1, j, k) = 1 \quad \text{minden } j \text{ indexre,} \tag{5}$$

$$\text{és } P(1, j, k) \geq 0 \text{ minden } j, k \text{ indexre,}$$

mert az E_j állapotból 1 valószínűséggel az E_k állapotok valamelyikébe jutunk.

Legyen adva egy $\mu(j)$ számsorozat, amelyre $\mu(j) \geq 0$ minden j -re, és $\sum_j \mu(j) = 1$, továbbá egy az (5) formulát teljesítő $P(1, j, k)$ számrendszer. Ekkor létezik olyan X_0, X_1, \dots (stacionárius) Markov-lánc, amelyre $P(X_0 = E_j) = \mu(j)$, és $P(X_{n+1} = E_k | X_n = E_j) = P(1, j, k)$, minden $n = 0, 1, 2, \dots$ számra és E_j, E_k állapotra. Valóban, legyen

$$P(X_0 = E_{j_0}, X_1 = E_{j_1}, \dots, X_n = E_{j_n}) = \mu_0(j_0) \prod_{l=0}^{n-1} P(1, j_l, j_{l+1}).$$

Létezik ilyen véges dimenziós eloszlásokkal rendelkező sztochasztikus folyamat, és ez a kívánt tulajdonságokkal rendelkező Markov lánc.

Ha adva van egy (véges sok), N állapotot felvevő Markov-lánc, akkor ennek 1-lépéses átmenetvalószínűségeinek rendszerén a $P(j, k)$, $1 \leq j, k \leq N$, 1 lépéses átmenetvalószínűségeinek összességét, n -lépéses átmenetvalószínűségeinek rendszerén, $n = 1, 2, \dots$, pedig a $P(n, j, k)$ valószínűségeinek összességét értjük. Természetes módon hozzárendelhetjük egy ilyen véges sok, N állapotot felvevő Markov-lánc átmenetvalószínűségeinek $P(j, k)$ rendszeréhez azt az $N \times N$ méretű négyzetes Π mátrixot, amelynek j -ik sorának és k -ik oszlopának a metszetében a $P(j, k)$ szám áll. Hasonlóan feleltessük meg egy ilyen mátrix n lépéses átmenet valószínűségei $P(n, j, k)$ rendszerének azt a Π_n mátrixot, amelynek j -ik sorának és l -ik oszlopának a metszetében a $P(n, j, k)$ szám áll. Érdemes bevezetni a sztochasztikus mátrix fogalmát, amely leírja az ily módon létrejövő mátrixokat.

Sztochasztikus mátrixok definíciója. Egy $N \times N$ méretű $(P(j, k))$, $1 \leq j, k \leq N$, mátrixot sztochasztikus mátrixnak nevezünk, ha $P(j, k) \geq 0$, $1 \leq j, k \leq N$, a mátrix minden elemére, és $\sum_{k=1}^N P(j, k) = 1$, $1 \leq j \leq N$, azaz a mátrix minden sorösszege eggyel egyenlő.

A következő egyszerű észrevétel nagyon hasznos véges állapotterű Markov-lánccok vizsgálatában.

Fontos észrevétel. Egy sztochasztikus mátrix és egy olyan $\mu(j)$, a $\sum \mu(j) = 1$, $\mu(j) \geq 0$ feltételeket teljesítő számsorozat, amely ugyanazon a halmazon van definiálva mint a sztochasztikus mátrix elemei meghatároznak egy véges állapotterű Markov-lánccot, amelynek a 0 pontbeli eloszlását a $\mu(j)$ számsorozat, az 1-lépéses átmenetvalószínűségeit pedig a sztochasztikus mátrix adja meg. Megfordítva, minden véges állapotterű Markov lánc átmenetmátrixainak rendszere egy sztochasztikus mátrix.

Továbbá, a Markov-lánccokról szóló (4) formulában megfogalmazott Chapman–Kolmogorov azonosságából következik, hogy ha egy mátrix 1-lépéses átmenetvalószínűségeit egy Π , az n -lépéses átmenetvalószínűségeit pedig egy Π_n sztochasztikus mátrix adja meg, akkor $\Pi_n = \Pi^n$, ahol Π^n a Π mátrix n -ik hatványát jelöli a szokásos mátrix szorzás értelmében.

A 'Fontos észrevétel' lehetővé teszi, hogy mátrix elméleti eredmények segítségével fontos eredményeket állapítsunk meg véges állapotterű Markov-láncok viselkedéséről. Ezt a módszert csak később fogom tárgyalni. A továbbiakban elsősorban a mind véges mind végtelen állapotterű (stacionárius) Markov-láncok viselkedéséről szóló alapvető eredmények ismertetésére fogok koncentrálni.

Mutatok néhány példát Markov-láncokra és folyamatokra.

Néhány érdekes Markov-folyamat és Markov-lánc definíciója.

1.) Tekintsünk egy véletlen bolyongást a d -dimenziós rácson, azaz a

$$Z = \{(j_1, \dots, j_d): -\infty < j_s < \infty, j_s \text{ egész szám}, 1 \leq s \leq d\}$$

halmazon. Ezt úgy definiáljuk, hogy ha a bolyongást végző részecske az n -ik időpontban a Z rács valamelyik pontjában tartózkodik, akkor a múltbeli viselkedéstől függetlenül egyforma, azaz $\frac{1}{2d}$ valószínűséggel átugrik valamelyik szomszédos rácpontba. Azaz, ha S_n -nel jelöljük a részecske tartózkodási helyét az n időpntban, akkor az $S_n - S_{n-1}$ valószínűségi változók, $n = 1, 2, \dots$, függetlenek, és $P(S_n - S_{n-1} = e_j) = P(S_n - S_{n-1} = -e_j) = \frac{1}{2d}$ minden $n = 1, 2, \dots$, $1 \leq j \leq d$ számra, ahol e_j jelöli azt a vektort, amelynek j -ik koordinátája 1, és az összes többi koordinátája nulla. A definíció teljessége érdekében még definiálnunk kell az S_0 mennyiséget is. Legyen $P(S_0 = x) = 1$, ahol $x \in Z$ a d -dimenziós tér valamely rögzített rácpontja.

2.) *Véletlen bolyongás a nem negatív egész számokon, a 0-val, mint elnyelő fallal.* Az előző példához hasonló modell a $d = 1$ esetben, amely bolyongást valamely $x \geq 0$ pontban indítunk el, azzal a különbséggel, hogy amennyiben a bolyongás elér a nullába, akkor örökre ottmarad. Ez képletekben azt jelenti, hogy az átmenetvalószínűségek a $P(j, j + 1) = P(j, j - 1) = \frac{1}{2}$, ha $j \geq 1$, és $P(0, 0) = 1$ képletekkel adhatóak meg.

3.) *Véletlen bolyongás a nem negatív egész számokon, a 0-val, mint visszaverő fallal.* Az előző példához hasonló modell azzal a különbséggel, hogy amennyiben a bolyongás elér a nullába, akkor onnan visszaverődik. Ez képletekben azt jelenti, hogy az átmenetvalószínűségek a $P(j, j + 1) = P(j, j - 1) = \frac{1}{2}$, ha $j \geq 1$, és $P(0, 1) = 1$ képletekkel adhatóak meg.

4.) *Véletlen bolyongás a modulo n csoporton.* Legyen a Markov-lánc állapottere az $\{1, \dots, n\}$ halmaz, valamely $n \geq 2$ pozitív egész számmal. Legyenek a Markov-lánc átmenetvalószínűségei $P(i, i + 1) = P(i, i - 1) = \frac{1}{2}$, ahol az összeadás és kivonás modulo n értendő.

5.) *A diffúzió Ehrenfest modellje.* Ez véges állapotterű Markov-lánc. E Markov-lánc függ egy N paramétertől, amely pozitív egész szám. Ha ez a paraméter N , akkor a modellben $N + 1$ állapot van, E_0, E_1, \dots, E_N , és az átmenetvalószínűségek $P(k, k - 1) = \frac{k}{N}$, $P(k, k + 1) = \frac{N - k}{N}$, ha $1 \leq k \leq N$, és $P(0, 1) = 1$, $P(N, N - 1) =$

0. E képletek szemléletes tartalma a következő: Legyen N részecske, amelyek mindegyike két urna valamelyikében van, és jelölje E_k azt az eseményt, hogy az első urnában k részecske, a második urnában $N - k$ részecske van. Minden egyes időpontban, kiválasztunk véletlenül egy részecskét, mindegyik részecskét egyforma valószínűséggel, és azt áthelyezzük a másik urnába. Ekkor, ha az első urnában k golyó van, akkor $P(k, k - 1) = \frac{k}{N}$ annak a valószínűsége, hogy az áthelyezendő részecskét az első urnából választottuk, ezért az első urnában levő részecskék száma eggyel csökken, és $P(k, k + 1) = \frac{N-k}{N}$, annak a valószínűsége, hogy az áthelyezendő részecskét a második urnából választottuk, ezért az első urnában levő részecskék száma eggyel nő.

- 6.) *Modell egy szerkezet élettartamára.* Legyen adva egy Markov-lánc a végtelen E_1, E_2, \dots állapottéren, amelynek átmenetvalószínűségeit valamely $p_1, p_2, \dots, 0 \leq p_k \leq 1$, és $q_k = 1 - p_k, k = 1, 2, \dots$, számsorozat segítségével határozzuk meg a következő módon: $P(k, k+1) = p_k, P(k, 1) = q_k, k = 1, 2, \dots$. E modell szemléletes tartalma a következő: Legyen adva egy szerkezet, amelyet minden időpontban, ha nem romlik el, akkor tovább használunk, és életkora egy egységgel nő. Ha elromlik, akkor kicseréljük egy új szerkezetre, amelynek életkora 1. Ha a szerkezet az első k időpontban nem romlott el, akkor az p_k valószínűséggel a $k + 1$ időpontban is jó marad. Jelölje X_n azt a valószínűségi változót, amely megadja azt, hogy mennyi az n időpontban használt szerkezet életkora.

A következő példa az 1. példában szereplő bolyongás természetes általánosítása.

- 7.) Legyen X_1, X_2, \dots , független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, amelyek értékeiket valamely E lineáris térben (például az R^k k -dimenziós Euklideszi térben) vesszük fel. Tegyük fel, hogy az X_1, X_2, \dots , valószínűségi változók értékei egy megszámlálható $T \subset E, T = \{t_1, t_2, \dots\}$, halmazban vannak, azaz $P(X_1 \in T) = 1$. Definiáljuk az $S_n = \sum_{j=1}^n X_j, n = 1, 2, \dots$, részletösszegeket, és jelölje $S \subset E$ a T halmaz által generált (additív) csoportot, azaz legyenek az S halmaz elemei azok az $s \in E$ pontok, amelyek előállíthatóak $s = \sum_{j=1}^k p_j t_j, k = 1, 2, \dots, t_j \in T, 1 \leq j \leq k$, alakban, ahol p_1, p_2, \dots egész számok. Ekkor S_1, S_2, \dots , Markov-lánc az S állapottéren, és átmenetvalószínűségeit a $P(S_{n+1} = \bar{s} | S_n = s) = P(X_1 = \bar{s} - s), s, \bar{s} \in S$, képlet adja meg. Ugyancsak Markov-láncot alkotnak ugyanezen a téren és ugyanezekkel az átmenetvalószínűségekkel az $\bar{S}_n = S_n + t_j, n = 1, 2, \dots$, sorozatok is, ahol $t_j \in T$ tetszőleges szám.

Valóban,

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = s_{n+1} | S_n = s_n, \dots, S_1 = s_1) &= \frac{P(S_{n+1} = s_{n+1}, S_n = s_n, \dots, S_1 = s_1)}{P(S_n = s_n, \dots, S_1 = s_1)} \\ &= \frac{P(X_{n+1} = s_{n+1} - s_n, X_n = s_n - s_{n-1}, \dots, X_1 = s_1)}{P(X_n = s_n - s_{n-1}, \dots, X_1 = s_1)} \end{aligned}$$

$$= P(X_{n+1} = s_{n+1} - s_n) = P(X_1 = s_{n+1} - s_n).$$

Érvényes a 7.) példa alábbi természetes általánosítása tetszőleges (nem feltétlenül megszámlálható sok értéket felvevő) valószínűségi változók részletösszegeire. Az általánosítás bizonyítása annyiban nehezebb, hogy abban általános értelemben vett feltételes valószínűségekkel kell számolni.

- 8.) Legyenek X_1, X_2, \dots , független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyek értékeiket valamely (E, \mathcal{E}) lineáris térben veszik fel. Ekkor az $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$, $j = 1, 2, \dots$, részletösszegek (stacionárius) Markov-folyamatot alkotnak az (E, \mathcal{E}) téren, amelynek 1 lépéses átmenetvalószínűségeit a $P(1, x, A) = P(S_{n+1} \in A | S_n = x) = P(X_1 \in A - x)$ képlet adja meg.

Nem kötelező feladat. Bizonyítsuk be, hogy a 8. példa állítása valóban igaz.

Külön feladatban megfogalmazom azt a feltételes eloszlásokról szóló állítást, amely az előző feladat megoldásának a lényege.

Feladat: Legyenek X_1, \dots, X_k, Y független valószínűségi változók, amelyek értékeiket valamely (E, \mathcal{E}) téren veszik fel, $f(x_1, \dots, x_{k+1})$ egy k -változós mérhető (korlátos) függvény az (E, \mathcal{E}) téren. Ekkor

$$E(f(X_1, \dots, X_k, Y) | X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = Ef(x_1, \dots, x_k, Y).$$

Vegyük észre, hogy az előző feladat eredményéből, (amely egyébként tekinthető a Fubini tétel egy verziójának) következik a 8. példa állítása. Valóban, ezt felhasználva meg lehet mutatni, hogy

$$\begin{aligned} &P(S_{n+1} \in A | S_1 = x_1, S_2 = x_2, \dots, S_n = x_n) \\ &= P(X_1 + \dots + X_n + Y \in A | X_1 = x_1, X_2 = x_2 - x_1, \dots, X_n = x_n - x_{n-1}) \\ &= P(x_1 + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) + Y \in A) = P(X_1 \in A - x_n) \end{aligned}$$

ahol, (X_1, \dots, X_n, Y) független egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyek értékeiket valamely (E, \mathcal{E}) lineáris térben veszik fel.

- 9.) Végül mutatok példát valószínűségi változók egy olyan sorozatára, amely nem alkot Markov-láncot. Legyen adva egy urna és benne mondjuk 5 piros és 3 fehér golyó. Kihúzzunk az urnából egy golyót véletlenszerűen, majd dobjuk vissza azt az urnába egy ugyanolyan színű golyóval együtt. Folytassuk ezt a procedurát a végtelenségig, és definiáljuk az X_1, X_2, \dots valószínűségi változókat úgy, hogy $X_n = 1$, ha a n -ik húzásakor kihúzott golyó színe piros, és $X_n = 0$, ha az n -ik húzásakor kihúzott golyó színe fehér. Ekkor nyilvánvalóan $P(X_n = 1 | X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_{n-1} = 1) > P(X_n = 1 | X_{n-1} = 1)$, mert ha minden eddigi húzás eredménye piros színű golyó volt, akkor az urnában levő piros golyók számát növeltük, ezért nagyobb annak a valószínűsége, hogy a következő húzásban is piros golyót húzzunk.

Kiegészítés.

Megfogalmazok és bebizonyítok egy lemmát, amelynek fő mondanivalója az a (B) azonosság, amely szerint egy stacionárius Markov-folyamat teljesíti a Chapman–Kolmogorov egyenletet. Valójában ez egy általánosabb változata a Chapman–Kolmogorov egyenletnek, amely nem feltétlenül stacionárius Markov folyamatokra is érvényes.

Stacionárius Markov-folyamatok esetében $P_{s,t}(x, A) = P_{t-s}(x, A)$, $P_{u,t}(y, A) = P_{t-u}(y, A)$, $P_{s,u}(x, dy) = P_{u-s}(x, dy)$, és a (B) reláció megegyezik a Chapman–Kolmogorov egyenlettel.

Lemma. *Legyen (X_t, \mathcal{F}_t) , $t \geq 0$, Markov-folyamat valamely (E, \mathcal{E}) mérhető téren valamely $P_{s,t}(x, A)$ a 3. megjegyzésben szereplő a), b), c) és d) tulajdonságot teljesítő átmenetvalószínűségekkel. Legyen $f(y)$, korlátos, mérhető függvény az (E, \mathcal{E}) téren. Ekkor*

$$E(f(X_u)|X_s = x) = \int f(y)P_{s,u}(x, dy) \quad \text{ha } u \geq s \quad (\text{A})$$

és

$$P_{s,t}(x, A) = \int P_{u,t}(y, A)P_{s,u}(x, dy) \quad \text{ha } s \leq u \leq t \quad (\text{B})$$

Bizonyítás: Ha az f függvény egy A halmaz indikátor függvénye, akkor könnyen látható, hogy az (A) formula érvényes. Mivel a kifejezés mindkét oldala lineáris funkcionál az (E, \mathcal{E}) téren definiált korlátos és mérhető függvények terén, ezért az azonosság érvényes halmazok indikátor függvényeinek lineáris kombinációira is. Ezután ilyen függvényekkel végrehajtott közelítések segítségével kapjuk, hogy az (A) reláció tetszőleges f függvényre érvényes. Az (A) formula szemléletesen azt mondja ki, hogy feltételes várható értéket úgy számolhatunk ki feltételes eloszlásfüggvények segítségével, mint várható értéket eloszlásfüggvények segítségével.

A (B) formula bizonyításában felhasználhatjuk, hogy a Markov tulajdonság és a feltételes várható érték tulajdonságai miatt

$$\begin{aligned} P_{s,t}(x, A) &= P(X_t \in A | X_s = x) = E(I_{\{X_t(\omega) \in A\}} | X_s(\omega) = x) \\ &= E(E(I_{\{X_t(\omega) \in A\}} | X_s(\omega), X_u(\omega)) | X_s(\omega) = x) \\ &= E(E(I_{\{X_t(\omega) \in A\}} | X_u(\omega)) | X_s(\omega) = x) = E(P_{u,t}(X_u(\omega), A) | X_s(\omega) = x), \end{aligned}$$

ahol I_A egy A halmaz indikátorfüggvényét jelöli. A fenti számolásban kihasználtuk a Markov tulajdonságot, amely szerint

$$E(I_{\{X_t \in A\}} | X_s, X_u) = E(I_{\{X_t \in A\}} | X_u) = P_{u,t}(X_u(\omega), A),$$

ha $u \geq s$.

Vezessük be az $f(y) = P(X_t \in A | X_u = y) = P_{u,t}(A, y)$ függvényt. Az előző azonosság és az A) reláció alapján

$$P_{s,t}(x, A) = E(E(f(X_u)|X_s = x)) = \int P_{u,t}(A, y)P_{s,u}(dy, x),$$

amint állítottuk.

Kimondom e tétel diszkrét idejű megfelelőjét, amelyet hasonlóan bizonyíthatunk.

Lemma. Legyen (X_n, \mathcal{F}_n) , $n = 0, 1, \dots$, Markov-folyamat valamely a (E, \mathcal{E}) mérhető téren valamely $P_{m,n}(x, A)$ a 3. megjegyzésben szereplő a), b), c) és d) tulajdonságot teljesítő átmenetvalószínűségekkel. Legyen $f(y)$, korlátos, mérhető függvény az (E, \mathcal{E}) téren. Ekkor

$$E(f(X_n)|X_m = x) = \int f(y)P_{m,n}(x, dy) \quad \text{ha } n \geq m \quad (\text{A}')$$

és

$$P_{m,n}(x, A) = \int P_{k,n}(y, A)P_{m,k}(x, dy) \quad \text{ha } m \leq k \leq n. \quad (\text{B}')$$

Feladat: Ha (X_0, X_1, \dots) olyan a természetes számokkal indexelt sztochasztikus folyamat egy megszámlálható számosságú (E, \mathcal{E}) állapot téren, amely teljesíti az

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = E_{j_{n+1}}|X_n = E_{j_n}, \dots, X_0 = E_{j_0}) &= P(X_{n+1} = E_{j_{n+1}}|X_n = E_{j_n}) \\ &= P(X_1 = E_{j_{n+1}}|X_0 = E_{j_n}) \end{aligned}$$

azonosságot, akkor (X_0, X_1, \dots) (stacionárius) Markov-lánc, amelynek egy lépéses átmenetvalószínűségeit

a $P(j, k) = P(X_1 = E_j|X_0 = E_k)$ képlet adja meg.

(A feladat tartalma mindössze annyi, hogy a feltételes valószínűségekre a Markov-folyamatok definíciójában kirótt feltétel az adott esetben ezt az azonosságot jelenti.)

Bizonyítás nélkül közlöm a következő eredményt.

Tétel. Legyen adva egy a 3. megjegyzésben felsorolt a), b) és c) tulajdonságokat teljesítő $P_{s,t}(x, A)$ illetve $P_{m,n}(x, A)$ függvény amely teljesíti az (e) illetve (e') tulajdonságot is. Legyen továbbá adva valamely P_0 valószínűségi mérték az (E, \mathcal{E}) téren. Ekkor létezik olyan időben folytonos Markov-folyamat, amelyre $P(X_0 \in A) = P_0(A)$ és $P(X_t \in A|X_s = x) = P_{s,t}(x, A)$, $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$, $m \leq n$ választással. Létezik olyan időben diszkrét Markov-folyamat, amelyre $P(X_0 \in A) = P_0(A)$, és $P(X_n \in A|X_m = x) = P_{s,t}(x, A)$ minden $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$, $0 \leq m \leq n$ választással.