A Valószínűségszámítás I. előadássorozat első témája.

A valószínűségszámítás néhány fontos problémája és a problémák vizsgálata érdekében kidolgozott modellje.

Tekintsünk néhány példát, amelyek megmutatják, hogy milyen kérdésekkel foglalkozik a valószínűségszámítás.

Tapasztalatból tudjuk, hogy évente körülbelül ugyanannyi fiú és lány születik. Ugyanakkor, az, hogy az egyes újszülöttek fiúk lesznek-e vagy lányok a véletlentől függ. Természetes feltenni, hogy minden újszülött egymástól függetlenül lesz $\frac{1}{2}$ valószínűséggel fiú vagy lány. Az, hogy ilyen körülmények között minden évben körülbelül ugyanannyi fiú és lány születik, tehát nem az a helyzet, hogy egyik évben a születendő fiúk a másik évben a születendő lányok száma sokkal nagyobb, a valószínűségszámítás egy nagyon fontos eredményének a *nagy számok törvényének* a következménye. Ez a törvény azt mondja, hogy ha sok egymástól független kisérletet végzünk, amelyek eredménye valamely véletlen szám, akkor a mért eredmények átlaga nagyon kevéssé ingadozik a kisérletek eredményének várható értéke körül. Ezt az állítást később pontosabban is meg fogom fogalmazni.

Szeretnénk pontosabb eredményeket kapni arról, hogy mekkora az eredmények átlagának az ingadozása a várható érték körül. A probléma jobb megértése érdekében tekintsük a következő elképzelt játékot.

Valaki a következő játékot ajánlja fel nekünk. Feldob egy (szerinte) szabályos pénzdarabot 10 000 alkalommal. Fejdobás esetén mi fizetünk neki 1 forintot, írásdobás esetén ő fizet nekünk 1 forintot. Elhisszük-e, hogy a pénzdarab valóban szabályos volt a következő esetekben?

a) Ha mind a 10 000 dobás fej volt.

b) Ha 9000 fej és 1000 írásdobás történt.

c) Ha a fejdobások száma 6000 és az írásdobások száma 4000 volt.

d) Ha 5200 fejdobás és 4800 írásdobás történt.

e) Ha 5050 volt a fej és 4950 írásdobások száma.

Természetesen elvileg előfordulhat, hogy egy szabályos pénzdarab, amelyet 10 000 alkalommal feldobunk minden egyes esetben a fej oldalra esik. De ennek a valószínűsége rendkívül kicsi, $2^{-10\ 000}$. Nagyon hihetetlennek tűnhet, hogy egy ilyen kis valószínűségű esemény bekövetkezik. Ugyancsak rendkívül kicsi annak a valószínűsége, hogy a fejdobások száma nagyobb mint 9000. A nagy számok törvénye szerint nagy x számra annak valószínűsége, hogy a fejdobások száma nagyobb mint $5000 + x$ rendkívül kicsi nagy x számok esetén. De felmerül a kérdés, hogy mely x számok tekinthetők nagynak. Ahhoz, hogy ezt a kérdést meg tudjuk válaszolni, jó lenne ismerni egy olyan eredményt, amely jó közelítést ad annak a valószínűségére, hogy a fejdobások száma nagyobb mint $5000 + x$ egy szabályos pénzdobás feldobása esetén. Ismeretes ilyen eredmény. Látni fogjuk, hogy a valószínűségszámítás talán legfontosabb eredménye, a *centrális határeloszlástétel*, (amely természetesen része lesz a tanyagnak) egy ilyen becslést ad. Meg fogom mutatni ezen eredmény segítségével, hogy egy szabályos pénzdarab esetén az a) — d) esetek bekövetkezésének a valószínűsége rendkívül kicsi (még a d) eset bekövetkeztének a valószínűsége is kisebb, mint 0.001), míg az e) eset viszonylag nagy valószínűséggel bekövetkezhet.

A centrális határeloszlástétel más fontos problémák vizsgálatában is segítséget nyújt. Mutatok egy ilyen példát. Tegyük fel, hogy 100 lámpa összélettartamára vagyunk kiváncsiak. Olyan lámpákat használunk, amelyek mindegyikének várható élettartama 100 óra, de valódi élettartamuk egy ekörüli érték valamilyen véletlen ingadozással. Ha egy lámpa kiég, akkor kicseréljük a következő lámpára, amelynek várható élettartama szintén 100 óra, de valódi élettartama e várható érték körül ingadozik. Az összes lámpa együttes élettartama ekkor 10 00 óra plusz valamilyen véletlen ingadozás. Az előbb említett centrális határeloszlástétel egy nagyon érdekes eredményt mond ki ennek az ingadozásnak az eloszlásáról. Ennek az eloszlásnak jellegzetes, haranggörbének nevezett alakja van, amely alig függ a lámpák élettartalmának viselkedésétől. Ez magyarázza meg azt is, hogy miért jelenik meg teljesen különböző problémák megoldásában ez a haranggörbe. A jelenség pontosabb leírását és magyarázatát csak később, a centrális határeloszlástétel tárgyalása során fogom ismertetni.

Ugyanis a centrális határeloszlástétel pontos megfogalmazása érdekében előbb be kell vezetni néhány fontos valószínűségszámítási fogalmat. Tisztázni kell például azt, hogy mit jelent a lámpa élettartamának a várható értéke. Ez heurisztikus szinten érthető, de ahhoz, hogy számolni is tudjunk a vele e fogalom pontosabb kidolgozása és megértése szükséges. Ugyancsak meg kell értenünk azt, hogy amikor a lámpa élettartamának az ingadozását tekintjük, akkor hogyan érdemes mérni ennek nagyságát. E problémák tisztázása fontos részét képezik a későbbi előadásoknak.

Végül még egy problémát említek, amely megmutatja, hogy miért hasznos a centrális határeloszlástétel eredményének néhány általánosítását vizsgálni. Az ebben a példában megjelenő általánosítás, a többváltozós centrális határeloszlástétel a következő félév anyaga lesz.

El akarjuk dönteni, hogy egy dobókocka szabályos-e. Ennek érdekében a dobókockát feldobjuk sokszor, és feljegyezzük hány darab 1, 2, . . . , 6-os dobás volt. Akkor tekintjük a dobókockát szabályosnak, ha mind a 6 lehetséges dobáseredmény kevéssé tér el az összes dobások számának az 1/6-ától. De mi számít kis eltérésnek. Például, ha a dobókockát 6000-szer dobjuk fel, és 960 1-es 1030 2-es 1020 3-as 970 4-es 1030 5-ös és 990 6-os dobás történt, akkor tekinthetjük e a dobókockát szabályosnak? A kérdés megválaszolásához olyan a centrális határeloszlástételhez hasonló eredményre van szükségünk, amely méri a a várható értéktől való ingadozások lehetséges értékének a valószínűségét. A lényeges különbség az előző (pénzdobásos) problémához képest az, hogy most nem véletlen számok, hanem véletlen vektorok (az 1-es, 2-es, . . . , 6-os dobásszámok együttesének) vizsgálata szükséges. Ilyen eredmény is létezik. Ezt hívják többváltozós centrális határeloszlástételnek. De mivel ennek ismertetéséhez több új fogalom bevezetése és tárgyalása is szükséges, ez a következő félév anyaga lesz.

Néhány megjegyzés a valószínűségszámítás történetéről.

A valószínűségszámítás megalkotásában különböző szerencsejátékok vizsgálata is nagyon fontos szerepet játszott. Az ilyen kérdések alaposabb vizsgálata nagyon hasznosnak bizonyult, több értékes gondolat hátterében szerencsejátékokkal kapcsolatos meggondolások rejlenek. Érdemes megjegyezni, hogy az első ilyen híres probléma de Méré lovagtól származik, aki Pascalnak tette fel két szerencsejátékkal kapcsolatos kérdését. Ezek egyikét de Méré lovag is meg tudta válaszolni, de a másikat nem. Pascal megoldotta ezt a feladatot, amelyet levélben elküldött a Toulouseban élő Fermatnak. Fermat is megoldotta ezt a problémát. Fermat megoldási módszere különbözött, de ugyanazt az eredményt kapta. Ezután írta Pascal sokat idézett mondatát: Ugyanaz az igazság Párizsban és Toulouseban. Leírom de Méré lovag kérdéseit, és egy kiegészítésben a rájuk adható választ is. De e feladatok megoldása a gyakorlatok anyaga.

De Méré lovag problémája:

a.) Ha egy kockát 4-szer feldobunk, akkor mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy hatos dobás lesz? Ha két kockát 24-szer feldobunk, mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy dupla hatos lesz?

(De Méré lovag arra csodálkozott rá, hogy az első valószínűség $\frac{1}{2}$-nél kicsit kisebb, a második valószínűség pedig $\frac{1}{2}$-nél kicsit nagyobb.)

b.) Két játékos egy igazságos játékot játszik, amelynek mindegyik fordulójában az egyes játékosok $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyernek, illetve veszítenek. Megállapodnak, hogy az a játékos nyeri el a tétet, aki először ér el hat nyerést. De a játékot félbe kell szakítaniuk akkor, amikor az egyiküknek három a másikuknak pedig öt nyerése volt. Hogyan kell igazságosan osztozkodniuk?

A fenti kérdéseket már a XVII. században megtárgyalta Pascal és Fermat. Sokan innentől számítják a valószínűségszámítás elméletének létrejöttét. Ezután is több nagy matematikus foglalkozott ezzel a témával. Közülük külön említést érdemel Pierre–Simon Laplace (1749–1827), aki egyik fő művét az *A valószínűség analitikus elmélete* című könyvet (Théorie Analitique des Probabilités) ennek a témának szentelte. Ebben a könyvben jelent meg a centrális határeloszlástételnek az a rendkívül fontos, az irodalomban Moivre–Laplace formulának nevezett speciális esete, amely például lehetővé teszi a bevezetésben megfogalmazott szabályos pénzdobás viselkedésével kapcsolatos problémák vizsgálatát. A Moivre–Laplace formula a következő kérdésre ad (nagy n és k paraméterek esetén) jó közelítő választ. Ha elvégzünk egymástól függetlenül n kisérletet, és mindegyik kisérlet p valószínűséggel sikerül, akkor mi annak a valószínűsége, hogy pontosan k sikeres kisérlet történt? Ezenkívül Laplace megírta könyvének a művelt nagyközönség számára készített változatát is *Filozófiai esszé a valószínűségről* (Essai Philosophique sur les Probabilités) címen. Mégis a mai modern valószínűségszámítás megalkotását jóval későbbre datálják. Ez Andrei Nyikolaevics Kolmogorov (1903–1987) nevéhez fűződik, aki az 1930-as években írt *Grundbegriffe der Wahrsheinlichkeitstheorie* (A valószínűségszámítás alapfogalmai) című művében vezette be a valószínűségszámítás ma használt modelljét. Továbbá bebizonyított néhány olyan alapvető eredményt is, amelyek lehetővé tették e modell használatát. Annak, hogy a valószínűségszámítás elméletét ilyen későn alkották meg két fő oka volt. Egyrészt filozófiai szinten nehéz volt megfogalmazni és elfogadtatni a véletlen alkalmas fogalmát. A másik ok matematikai jellegű. A valószínűségszámítás elméletének szigorú megalapozása felhasználja a XX. századi matematika egy mély elméletének, a mértékelméletnek az eredményeit is.

Bár a hallgatóság ezt az elméletet nem tanulta, ez nem zárja ki az előadás megértését. A mértékelmélet ugyanis arra szolgál, hogy egyrészt matematikailag szigorúan igazolja azoknak a módszereknek a jogosságát, amelyeket a józan ész diktál, másrészt megmutassa, hogy mindazok a kérdések, amelyeket valószínűségszámítási problémának tekintünk tárgyalható a kidolgozott elmélet keretein belül. Ismertetni fogom Kolmogorov modelljét, de azokat a mély elméleti eredményeket, amelyek ennek alapjául szolgálnak, (és amelyek ismeretére nincs szükségünk konkrét feladatok megoldásában) bizonyítás nélkül fogom közölni. Ezelőtt azonban egy kis kitérőt teszek. Felidézem a kombinatorika néhány olyan eredményét, amelyek a valószínűségszámításban is fontos szerepet játszanak. Áttekintem, hogy hányféleképp lehet egy n elemű halmazból k elemet kiválasztani, illetve néhány ezzel kapcsolatos kérdést tárgyalok.

Egy kombinatorikai kérdés vizsgálata.

A következő kérdéssel foglalkozunk. Hányféleképp lehet egy n elemű halmazból k elemet, $k \leq n$, kiválasztani? Vegyük először is észre, hogy valójában egy négy kérdésből álló kérdéscsoportról van szó. A pontos kérdésfeltevéskor ugyanis meg kell mondani, hogy számít-e a kiválasztás sorrendje. Azaz ha egymás után kiválasztunk k elemet n elemből, és két olyan választássorozatot tekintünk, amelyekben ugyanazt a k elemet választjuk ki, de más sorrendben, akkor ezt a k elem két különböző kiválasztásának tekintjük-e vagy sem. Ugyancsak tisztázni kell azt, hogy ha egy elemet kiválasztottunk választhatjuk-e ugyanazt az elemet mégegyszer vagy sem. Ezt a kérdést úgy is meg szokták fogalmazni, hogy visszatevéssel választunk-e vagy visszatevés nélkül. Az alábbiakban példával megvilágítva mind a négy lehetőséget tárgyalom. Az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy az n elemű halmaz, amelyből választunk megegyezik az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazzal.

Probléma A) Hányféleképp lehet kiválasztani n elem közül k elemet, ha minden elemet csak egyszer (visszatevés nélkül) választhatunk, és nem számít a sorrend?

Probléma B) Hányféleképp lehet kiválasztani n elem közül k elemet, ha minden elemet csak egyszer (visszatevés nélkül) választhatunk, és számít a sorrend?

E két feladat és a köztük levő különbség megértése érdekében tekintsük a következő kérdést: Hányféle eredménye lehet egy lottóhúzásnak? Ha azt kérdezzük, hány különböző eredmény jelenhet meg a másnapi újságban, akkor a válasz az öt hosszúságú, 1 és 90 közötti számokat felvevő, szigorúan monoton növekvő számsorozatok száma. Ha valaki elmegy a lottóhúzásra, és feljegyzi magának az egymás után kihúzott számokat, akkor egy öt hosszúságú értékeit 1 és 90 között felvevő számsorozatot jegyez fel magának, amelynek értékei nem feltétlenül monoton nőnek. Kérdezhetjük azt is hány különböző eredményt jegyezhet fel az ilyen megfigyelő. Az első esetben az A) a második esetben a B) probléma megoldását kérdezzük $n = 90$, $k = 5$ esetben.

A B) kérdésre a válasz $n(n-1)\cdots(n-k+1)$, mert az első elemet n a második elemet $n-1$, és így tovább a k-ik elemet $n-k+1$ féleképp választhatjuk.

Az A) kérdésre a válasz $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$, mert ha megkülönböztetjük a k elem két olyan kiválasztását, amelyekben ugyanazokat az elemeket választjuk, de más sorrendben, akkor $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ választás lehetséges. Másrészt ha két sorozatot nem különböztetünk meg akkor, ha ugyanazokat az elemeket tartalmazzák csak esetleg más sorrendben, akkor az előző összeszámlálásban minden lehetséges sorozatot $k!$ multiplicitással számoltunk.

Probléma C) Hányféleképp lehet kiválasztani n elem közül k elemet, ha minden elemet többször is (visszatevéssel) választhatjuk, és nem számít a sorrend?

Probléma D) Hányféleképp lehet kiválasztani n elem közül k elemet, ha minden elemet többször is (visszatevéssel) választhatjuk, és számít a sorrend?

Példa olyan feladatra, amelyben a C) és D) probléma jelenik meg: Megkérdezünk k embert, hogy mikor, azaz az év hányadik napján születtek. (Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy senki sem született a szökőnapon, azaz február 29-én.) Ha valaki egymás után feljegyzi, hogy a k megkérdezett személy az év melyik napján született, és arra vagyunk kiváncsiak, hány különböző feljegyzés lehetséges, akkor a D) kérdést kell megválaszolnunk. Ha feljegyezzük növekvő sorrendben azokat a napokat, amelyeken a megkérdezett emberek valamelyikének születésnapja van, és minden napot annyiszor jegyzünk fel, ahányszor valamelyik megkérdezett ezt, mint születésnapot megadta, akkor a lehetséges számsorozatok számának megadása a C) kérdéshez vezet.

A D) kérdésre a válasz egyszerű; n^k választás lehetséges, mert k alkalommal n elem valamelyikét választhatjuk.

A C) kérdés megválaszolása nehezebb. Az A) feladat megoldásában használt módszer ebben az esetben nem alkalmazható. (Gondoljuk meg például, hogy hány különböző három hosszúságú sorozat adható meg, ha megmondjuk, hogy melyik számjegy hányszor jelenhet meg. Egy csupa 1-esből álló sorozat csak egyféleképp adható meg, úgy mint 1,1,1. Egy két 1-esből és egy 2-esből álló sorozat három különböző módon adható meg: 1,1,2, 1,2,1, 2,1,1. Egy egy 1-es egy 2-es és egy 3-asból álló sorozat hat különböző módon adható meg: 1,2,3, 1,3,2, 2,1,3, 2,3,1, 3,1,2, 3,2,1. Azaz, különböző tipusú sorozatok sorbarendezéseinek a száma különböző.) A C) feladat megoldása más gondolatok alkalmazását igényli.

A C) kérdésre a válasz $\binom{n+k-1}{k}$. Ennek megértése érdekében vegyük észre, hogy a kérdés ekvivelens a következő problémával. Hány k hosszúságú monoton (nem feltétlenül szigorúan monoton) sorozat van, amelynek elemei az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz elemei? Ezen ekvivalencia megértésének érdekében érdemes az n elemű halmazt az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak választani. Ebben az esetben egy lehetséges halmaz kiválasztása megegyezik egy olyan (nem feltétlenül szigorúan) növekvő k hosszúságú számsorozat megadásával, amelynek elemei 1 és n közötti egész értékeket vesznek fel.

Az ilyen sorozatok összeszámolása érdekében alkalmazzuk a következő gondolatmenetet. Minden egyes ilyen tulajdonságú sorozatnak feleltessük meg a következő sorozatot. Az első számhoz adjunk 0-t a másodikhoz 1-et, a harmadikhoz 2-t, ..., a k-ikhoz $k-1$-et. Ilyen módon egy szigorúan növekvő k hosszúságú sorozatot kapunk, amelynek elemei az $1, 2, \dots, n+k-1$ számok valamelyikét veszik fel. Sőt, ilyen módon kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést adunk a k hosszúságú (nem feltétlenül szigorúan) növekvő értékeit az $\{1, \dots, n\}$ halmazban felvevő, illetve a k hosszúságú, (szigorúan) növekvő és értékeit az $\{1, 2, \dots, n+k-1\}$ halmazban felvevő sorozatok között. Ezért a keresett tulajdonságú sorozatok száma megegyezik a k hosszúságú szigorúan növekvő, értékeit az $\{1, 2, \dots, n+k-1\}$ halmazban felvevő sorozatok számával. Az ilyen sorozatok száma $\binom{n+k-1}{k}$.

Megjegyzés: A C) kérdés feladat megoldásában felhasználtuk azt a tényt, hogy két halmaz, amelyek elemei között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető ugyanannyi elemből áll. Ez az észrevétel érvényes végtelen halmazokra is. Sőt, végtelen halmazok esetén ezen tulajdonság segítségével definiálják azt, hogy két halmaznak mikor ugyanakkora a számossága. Ez a tény megjelenik a megszámlálható számosságú halmazok definiciójában is, amelynek megértésére a későbbiekben szükségünk lesz.

Feladat:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k},$$
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Egy kiegészítésben tárgyalni fogok néhány a most tárgyalt kombinatorikai kérdésekkel kapcsolatos feladatot.

A valószínűségszámítás Kolmogorov-féle modellje.

Két természetes elvárásunk van a valószínűségszámítás egy jó modelljével szemben.

(i) Elvárjuk, hogy minden természetes véletlennel kapcsolatos feladat tárgyalható legyen benne.

(ii) Elvárjuk, hogy azok a hasznos gondolatok, érvek, amelyek lehetővé teszik konkrét feladatok megoldását, alkalmazhatóak legyenek benne.

Kolmogorov modellje mind a két kívánalmat kielégíti. E modell ismertetése fontos része lesz ennek az előadássorozatnak. Mielőtt ennek ismertetésére rátérnék tekintek néhány egyszerű feladatot, amelyek vizsgálata segít megérteni e modellt. Ezeket a feladatokat megoldjuk néhány természetes érv segítségével. Ezen feladatok most ismertetett heurisztikus megoldásában a józan eszünkre hagyatkozunk. De amikor megismerjük a valószínűségszámítás Kolmogorov-féle elméletét látni fogjuk, hogy az itt alkalmazott módszerek minden változtatás nélkül elmondhatóak abban az elméletben is. Érdemes külön megemlíteni, hogy érveléseinkben felsoroljuk egy véletlen kisérlet összes lehetséges kimenetelét, és a minket érdeklő eseményt, amelynek a valószínűségét ki kívánjuk számolni azonosítjuk a lehetséges kimenetelek egy részhalmazával. Ez a halmazelméleti hozzáállás a Kolmogorov-féle elméletnek egy nagyon fontos és hasznos gondolata.

1.) Egy pénzdarabot feldobunk kétszer. Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan egy fejdobás lesz? Mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy fejdobás lesz?

Megoldás: A dobások lehetséges kimenete, (F,F), (F,I), (I,F) és (I,I). Ezen lehetséges kimenetelek mindegyikének a valószínűsége $\frac{1}{4}$. Ezért annak a valószínűsége, hogy pontosan egy fejdobás, azaz az (F,I) vagy (I,F) dobássorozat következik be $\frac{1}{2}$. Annak a valószínűsége, hogy legalább egy fejdobás, azaz az (F,F), (F,I) vagy (I,F) dobássorozatok eredménye következik be, $\frac{3}{4}$.

2.) Feldobunk két szabályos dobókockát. Mi annak a valószínűsége, hogy a dobáseredmények összege pontosan 9 illetve pontosan 10? Hány különböző módon fordulhat elő, hogy a dobások összege 9 és hány különböző módon lehet a dobások összege 10?

Megoldás: A dobások összegének eredménye akkor 9, ha a $(3,6)$, $(4,5)$, $(5,4)$ vagy $(6,3)$ dobáspárok valamelyike következik be. Ezen dobássorozatok mindegyikének valószínűsége $\frac{1}{36}$, ezért $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ annak a valószínűsége, hogy az összeg pontosan 9. Hasonlóan, az összeg akkor 10, ha a $(4,6)$, $(5,5)$ vagy $(6,4)$ dobáspárok valamelyike jelenik meg, és ennek a valószínűsége $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$. Jegyezzük meg, hogy a fenti tárgyalásban az egyes kimenetelek felsorolásában nemcsak azt vettük figyelembe, hogy milyen dobáseredmények jelentek meg, hanem azt is, hogy melyik kockán jelentek meg ezek a dobáseredmények.

3.) Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk 25 golyót visszatevéssel. Mi a valószínűsége annak, hogy az első húzás eredménye piros? Annak, hogy az első húzás eredménye piros és a másodiké fehér? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye piros? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye piros és a tizenhatodik húzás eredménye fehér?

Megoldás: Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$, mert 50 golyóból húzzuk ki a 20 piros golyó valamelyikét, és minden golyót egyforma valószínűséggel húzunk ki. Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros, a második fehér, $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$, mert először 50 golyó közül választjuk ki a húsz piros golyó valamelyikét majd 50 golyó valamelyikéből a 30 fehér golyó valamelyikét, és minden húzás egyforma valószínű. Hasonlóan, annak valószínűsége, hogy az 5. húzásban piros golyót húzunk ki $\frac{2}{5}$, és annak valószínűsége, hogy az 5. húzás során piros és a 16. húzás során fehér golyót húzunk $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$.

Jegyezzük meg, hogy a következő feladat megoldása egy olyan érvet tartalmaz, amelyik ebben az esetben is alkalmazható, és megmutatja, hogy annak valószínűsége, hogy az 5. húzás piros és a 16. húzás fehér megegyezik annak valószínűségével, hogy az első húzás piros és a második húzás fehér. Érdemes ezeket az érveléseket mégegyszer végiggondolni azután, hogy megtárgyaltuk a valószínűségi mező pontos definicióját.

4.) Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk 25 golyót *visszatevés nélkül.* Mi annak a valószínűsége annak, hogy az első húzás eredménye piros? Annak, hogy az első húzás eredménye piros és a másodiké fehér? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye piros? Annak, hogy az ötödik húzás eredménye piros és a tizenhatodik húzás eredménye fehér?

Megoldás: Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$, mert 50 golyóból húzzuk ki a 20 piros golyó valamelyikét, és minden golyót egyforma valószínűséggel húzunk ki. Annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros, a második fehér, $\frac{2}{5} \cdot \frac{30}{49} = \frac{60}{245}$, mert először 50 golyó közül választjuk ki a húsz piros golyó valamelyikét, majd 49 golyó valamelyikéből a 30 fehér golyó valamelyikét, és minden húzás egyforma valószínű. Belátjuk, hogy annak valószínűsége, hogy az 5. húzásban piros golyót húzunk ki, megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első húzás piros, azaz $\frac{2}{5}$. Továbbá annak a valószínűsége, hogy az 5. húzás során piros és a 16. húzás során fehér golyót húzunk megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első húzás eredménye piros és a második húzás eredménye fehér. Ezért ez a valószínűség is $\frac{2}{5} \cdot \frac{30}{49} = \frac{60}{245}$.

Tekintsük ugyanis az összes 25 hosszúságú húzássorozatot. Ekkor annak valószínűsége, hogy az 5. húzás eredménye piros a 16. húzás eredménye fehér megegyezik az összes olyan 25 hosszúságú húzássorozat valószínűségének az összegével, amelyek 5. helyén piros és a 16. helyén fehér jegy áll. Hasonlóan számítható ki annak a valószínűsége, hogy az első húzás piros és a második húzás eredménye fehér, azzal a különbséggel, hogy az 5. hely helyett az első és a 16. hely helyett a második helyet kell tekinteni. Be fogjuk látni, hogy ugyanaz a képlet fejezi ki ezt a két különböző valószínűséget, ezért azok megegyeznek. Ezt az érvelést kissé általánosabban fogjuk kifejteni egy más alkalmazásokban is hasznos egyszerű lemma segítségével.

Annak érdekében, hogy a fent jelzett érvelést végrehajthassuk, vegyük először észre a következő tényt. Annak a valószínűsége, hogy egy előírt konkrét 25 hosszúságú sorozat jelenik meg csak attól függ, hogy ez a sorozat hány piros és hány fehér golyót tartalmaz, de nem függ a fehér és piros húzások sorrendjétől. Valóban, ha egy húzássorozat s piros és $25-s$ fehér golyót tartalmaz, akkor e sorozat megjelenésének a valószínűsége $P(s)=\frac{20\cdot19\cdots(20-s+1)\cdot30\cdot29\cdots(30-(25-s)+1)}{50\cdot49\cdots26}$. Ugyanis egy előírt húzássorozat valószínűsége $\prod\limits_{j=1}^{25}\frac{l(j)}{50-j+1}$, ahol $l(j)$ az a $j-1$-ik húzás után az urnában maradt piros golyók száma, ha a j-ik húzás piros, és a $j-1$-ik húzás után az urnában maradt fehér golyók száma, ha a j-ik húzás fehér. Ez a kifejezés megegyezik a megadott formulával, mert $\prod\limits_{j=1}^{25} l(j)=20\cdot19\cdots(20-s+1)\cdot30\cdot29\cdots(30-(25-s)+1)$. Ugyanis az azonosság két oldalán felírt szorzatokban ugyanazok a tényezők szerepelnek, csak más sorrendben.

A 4. feladatot a fenti tulajdonság és az alábbi lemma segítségével lehet megoldani. Ennek a lemmának további hasznos következményei is vannak.

Lemma bizonyos húzássorozatok valószínűségéről. *Válasszunk ki n piros vagy fehér golyót egymás után valamely véletlen sorrendben. Legyen ezen véletlen sorrend kiválasztása olyan, hogy egy előírt n hosszúságú k piros és $n-k$ fehér golyót tartalmazó sorozat megjelenésének a valószínűsége csak a k számtól függ. (Azaz két olyan sorozat megjelenésének a valószínűsége, amelyek ugyanannyi piros és fehér golyót tartalmaznak, csak más sorrendben egyenlő.) Rögzítsünk p különböző $1\le l_1<l_2<\cdots<l_p\le n$ időpontot és egy p hosszúságú $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p$ piros–fehér jelsorozatot, azaz legyen α_j a piros vagy fehér értékkel egyenlő minden $1\le j\le p$ indexre. Ekkor annak valószínűsége, hogy egy olyan véletlen sorozatot választunk, amelyik l_1-ik eleme α_1, l_2-ik eleme α_2, és általában az l_j-ik eleme α_j színű minden $1\le j\le p$ indexre megegyezik annak a valószínűségével, hogy egy $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ színekkel kezdődő sorozatot választunk, azaz egy olyan sorozatot, amelyiknek a j-ik eleme α_j színű, ha $1\le j\le p$. Sőt, egy ilyen sorozat kiválasztásának a valószínűsége csak attól függ, hogy az $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ sorozat hány piros jelet tartalmaz. Nevezetesen, jelölje r, $0\le r\le p$, a piros jelek számát az $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ sorozatban. Ekkor annak a valószínűsége, hogy az l_j időpontban kihúzott golyó színe α_j minden $1\le j\le p$ indexre megegyezik annak a valószínűségével, hogy egy olyan véletlen sorozatot választunk, amelynek az első r tagja piros és az utána következő $p-r$ tagja fehér színű.*

1. megjegyzés. A fenti lemma segítségével könnyen befejezhetjük a 4. feladat megoldását. Láttuk ugyanis, hogy a tekintett modellben teljesülnek a lemma feltételei. Ezért annak a valószínűsége, hogy az ötödik húzás eredménye piros megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első húzás piros. Annak a valószínűsége, hogy az ötödik húzás eredménye piros és a tizenhatodik húzás eredménye fehér egyenlő annak a valószínűségével, hogy az első húzás piros, a második pedig fehér. Ez utóbbi valószínűségeket pedig már kiszámoltuk.

2. megjegyzés. Létezik a fenti lemmának egy hasznos és természetes általánosítása úgynevezett felcserélhető valószínűségi változókról, amely hasonlóan, sőt kissé egyszerűbben bizonyítható. Ezt az állítást is meg fogom fogalmazni, de csak egy későbbi előadásban. Ezt az általánosabb eredményt érdemes néhány később bevezetendő fontos fogalom ismeretében megfogalmazni, és ez az oka a halasztásnak.

A lemma bizonyítása. Rögzítsük a lemma megfogalmazásában szereplő p és r számokat valamint az $1 \le l_1 < l_2 \cdots < l_p \le n$ és $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sorozatokat. Elég belátni, hogy tetszőleges $r \le s \le n - p + r$ számra a következő A) és B) esemény valószínűsége megegyezik:

A) esemény: Olyan (n hosszúságú) húzássorozatot választunk, amelyben az l_j-ik helyen levő elemnek a színe α_j, minden $1 \le j \le p$ indexre, továbbá a sorozat pontosan s darab piros golyót tartalmaz.

B) esemény: Olyan n hosszúságú húzássorozatot választunk, amelynek az első r eleme piros, az utána következő $p-r$ eleme fehér, és amely pontosan s darab piros golyót tartalmaz.

Ugyanis összegezve ezeket az azonosságokat minden $r \le s \le l - p + r$ indexre megkapjuk a kívánt állítást.

Viszont ezeket az azonosságokat könnyen ellenőrizhetjük. Valóban, jelölje $P(s)$ egy olyan (n hosszúságú) sorozat valószínűségét, amely pontosan s piros golyót tartalmaz. (Ezt a jelölést azért használhatjuk, mert a Lemma feltevése szerint egy ilyen sorozat megjelenésének a valószínűsége csak az s számtól függ.) Ekkor az A) esemény valószínűsége $\binom{n-p}{s-r}P(s)$. Ugyanis $\binom{n-p}{s-r}$ olyan sorozat van, amely teljesíti az A) esemény definiciójában szereplő feltételeket. (Ez azért igaz, mert p helyen, az $l_1, \dots, l_p$ indexű helyeken a kihúzott golyók színe előírt, és ezek között r darab piros színű golyó van. Ezért a maradék $n-p$ helyen pontosan $s-r$ piros golyó van.) Továbbá minden ilyen sorozat megjelenésének a valószínűsége $P(s)$. Hasonlóan a B) esemény valószínűsége is $\binom{n-p}{s-r}P(s)$.

Az előző példák, illetve azok megoldásai mutatják, hogy érdemes a valószínűségi feladatok egy halmazelméleti modelljét tekinteni, és azokat jobban megérteni. A formális definició megadása előtt tekintsünk néhány hasonló problémát, ahol azonban a részletek kidolgozása szükségessé teszi nehezebb matematikai kérdések tisztázását.

Első példa: Ledobunk a $[0,1]$ egységintervallumra egymástól függetlenül először egy x majd egy y pontot, azaz annak valószínűsége, hogy az x vagy y pont az egységintervallum valamely $[a,b] \subset [0,1]$ részintervallumába esik megegyezik ezen intervallum $|b-a|$ hosszával, annak valószínűsége pedig, hogy az egységnégyzet belsejében lévő az (x,y) pontpár által meghatározott pont egy az egységnégyzetben levő $[a,b] \times [c,d] \subset [0,1] \times [0,1]$ téglalapba esik megegyezik ennek a téglalapnak $(b-a)(c-d)$ területével. Azt várjuk, hogy annak valószínűsége, hogy az (x,y) pont egy az egységnégyzet belsejében lévő r sugarú körbe esik megegyezik ennek a körnek $r^2\pi$ területével. Általánosabban, azt várjuk, hogy annak valószínűsége, hogy az (x,y) pont egy az egységnégyzet belsejében lévő A halmazba esik egyenlő ennek a halmaznak a területével.

Helyes-e ez a természetes elképzelés? Alapjában véve helyes, de felmerül egy komoly elvi probléma. Nevezetesen a következő: Annak az állításnak, hogy a véletlen (x,y) pont akkora valószínűséggel esik egy A halmazba, mint amennyi ennek az A halmaznak a területe csak akkor van értelme, ha beszélhetünk az A halmaz területéről. Tudjuk-e értelmezni tetszőleges halmaz területét? Gondoljuk meg, hogy már egy kör területének a meghatározása sem egyszerű. Általánosabban, a kérdéskör (bizonyos mély elméleti eredmények felhasználásával) megmutatható, hogy komoly elvi okok miatt nem tudjuk minden halmaz területét definiálni. De azoknak a halmazoknak, amelyek konkrét feladatokban megjelennek mindig definiálható a területük. Annak igazolása viszont, hogy ez valóban így van komoly elméleti eredmények bizonyítását és felhasználását igényli. Ennek alaposabb vizsgálata nem ennek az előadásnak a témája.

Második példa: Feldobunk egy szabályos pénzdarabot végtelen sokszor egymás után egymástól függetlenül. Jelölje $k(n)$ a fejdobások számát az első n dobásban. Azt várjuk, hogy a $\frac{k(n)}{n}$ számoknak van $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k(n)}{n}$ határértékük, és ez a határérték az $\frac{1}{2}$ szám 1 valószínűséggel. Látni fogjuk, hogy ez az állítás igaz. Ezt az állítást hívják a nagy számok erős törvényének (ebben a speciális esetben). De ahhoz, hogy ezt az állítást bebizonyítsuk először azt kell tisztáznunk, hogy a megfogalmazott állításnak van értelme. Mint látni fogjuk, nem minden lehetséges eseménynek definiáljuk a valószínűségét. Meg kell mutatnunk, hogy annak az eseménynek, hogy a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k(n)}{n}$ határérték létezik, és ez a határérték $\frac{1}{2}$ valóban van valószínűsége. Annak érdekében, hogy ezt megtehessük, először meg kell fogalmaznunk a valószínűségszámítás pontos elméletét, és meg kell ismernünk annak néhány alapvető fogalmát.

Kolmogorov elméletének néhány fontos fogalma.

Először bevezetek néhány Kolmogorov elméletében fontos fogalmat. Később ezek szemléletes tartalmával is foglalkozni fogunk.

Valószínűségi mező definiciója. *Azt mondjuk, hogy egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ rendszer valószínűségi mező, ha Ω, amelyet biztos eseménynek is nevezünk, bizonyos általában ω-val jelölt elemekből (pontokból) áll, amelyeket elemi eseményeknek is neveznek. Ezenkívül kijelöltük az Ω halmaz bizonyos kitüntetett részhalmazait, amelyek úgynevezett σ-algebrát alkotnak, és a kijelölt halmazokból álló σ-algebrát $\mathcal{A}$-val jelöltük. Az $A\in\mathcal{A}$ halmazoknak (eseményeknek) van $P(A)$ valószínűségük, és ezek a valószínűségek nem-negatív egyre normált σ-additív halmazfüggvényt, úgynevezett valószínűségi mértéket alkotnak.*

Annak érdekében, hogy a fenti definiciót teljessé tegyük, tisztáznunk kell a σ-algebra illetve a nem-negatív egyre normált σ-additív halmazfüggvény fogalmát. Azután meg kell érteni, hogy például a korábban vizsgált feladatokat hogyan tárgyalhatjuk a fenti definiciót kielégítő modellek segítségével.

Algebra és σ-algebra definiciója. *Legyen adva egy Ω halmaz és az Ω halmaz bizonyos $A\subset\Omega$ részhalmazainak $\mathcal{A}$ rendszere. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ algebra, ha tetszőleges $A\in\mathcal{A}$ halmazra ennek komplementere, az $\Omega\setminus A$ halmaz is eleme a $\mathcal{A}$ halmazrendszernek, azaz $\Omega\setminus A\in\mathcal{A}$, és az $\emptyset$ üres halmaz is eleme az $\mathcal{A}$ algebrának, azaz $\emptyset\in\mathcal{A}$. Továbbá, ha $A\in\mathcal{A}$ és $B\in\mathcal{A}$ elemei az $\mathcal{A}$ halmazrendszernek, akkor e halmazok metszete illetve uniója is teljesíti az $A\cap B\in\mathcal{A}$ és $A\cup B\in\mathcal{A}$ feltételeket.*

Az $\mathcal{A}$ algebra akkor σ-algebra, ha ezenkívül a következő feltételeket is teljesíti: Ha $A_1, A_2, \dots,$ megszámlálhatóan végtelen sok halmaz, amelyek az $\mathcal{A}$ algebra elemei, azaz $A_n \in \mathcal{A}$ minden $n = 1, 2, \dots$ számra, akkor ezek metszete és uniója is benne van az $\mathcal{A}$ σ-algebrában, azaz $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, és $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Additív és σ-additív halmazfüggvény definiciója. *Legyen adva egy Ω halmaz részhalmazaiból álló $\mathcal{A}$ σ-algebra. Azt mondjuk, hogy egy $\mu(A)$, $A \in \mathcal{A}$, halmazfüggvény additív, ha bármely diszjunkt $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{A}$ halmazra $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Azt mondjuk, hogy ez a μ halmazfüggvény nemcsak additív, hanem σ-additív is, ha minden diszjunkt $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots,$ halmazsorozatra $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. Ez a σ-additív halmazfüggvény nem-negatív, ha minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra $\mu(A) \geq 0$, és egyre normált, ha $\mu(\Omega) = 1$.*

Megjegyzés: A jelölésrendszer az irodalomban nem egységes. Van ahol két A és B halmaz unióját és metszetét $A \cup B$ illetve $A \cap B$-vel és van ahol $A + B$ illetve AB-vel jelölik. Hasonlóan megszámlálható sok halmaz unióját illetve metszetét szokás bizonyos helyeken $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, illetve a $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ jelöléssel, másutt pedig a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ illetve $\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ jelöléssel megadni. Végül két halmaz különbségét szokás bizonyos helyeken $A \setminus B$-vel másutt $A - B$-vel jelölni.

Lássunk néhány példát arra, hogyan tudunk valószínűségi problémát a valószínűségi mező Kolmogorov féle definiciója alapján megfogalmazni.

a.) Adjuk meg egy szabályos pénz tíz egymásutáni (független) dobás eredményeinek egy modelljét.

A természetes hozzáállás a következő: Vegyük az összes lehetséges 10 hosszúságú fej-írás sorozatot. Ezek lesznek az $\omega = (F, \dots, I, \dots)$ elemi események. Az Ω biztos esemény az összes lehetséges előbb definiált ω elemi eseményekből álló halmaz. Az $\mathcal{A}$ σ-algebra az Ω összes lehetséges részhalmazából áll.) Ilyen módon valóban σ-algebrát definiáltunk. Definiálnunk kell még a $P(A)$ valószínűségeket minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra. Ezt a következőképp tesszük: Minden ω elemi eseményre $P(\{\omega\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$, mert egy szabályos pénzdarab feldobásakor minden dobássorozatnak ennyi a valószínűsége. Végül $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\{\omega\})$ minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra.

b.) Egy pénzdarabot, mely $\frac{1}{3}$ valószínűséggel esik a fej és $\frac{2}{3}$ valószínűséggel az írás oldalára feldobunk (egymástól függetlenül) 10-szer egymás után. Adjunk erre valószínűségi modellt.

Megoldás: Legyen ω egy elemi esemény egy 10 hosszúságú fej-írás sorozat. Tekintsük az összes ilyen sorozatból álló halmazt, ez legyen Ω, a biztos esemény. Legyenek a $\mathcal{A}$ σ-algebra elemei az Ω halmaz részhalmazai. (Az összes lehetséges részhalmazt tekintjük.) Definiálnunk kell még egy $A \in \mathcal{A}$ halmaz (esemény) $P(A)$ valószínűségét is. Ezt a következő módon tesszük: $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\{\omega\})$, és $P(\{\omega\}) =$

$\left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k}$, ha az ω elemi esemény olyan sorozat, amelyik k fej és $10-k$ írásjelből áll. (Ugyanis minden fej-dobás esetén $\frac{1}{3}$ és minden írás-dobás esetén $\frac{2}{3}$-dal, a fej, illetve írásdobás valószínűségével kell megszorozni a valószínűséget.)

c.) Egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó van. Kihúzunk 25 golyót

a.) visszatevéssel,

b.) visszatevés nélkül.

Adjunk erre valószínűségi modellt mind a két esetben.

Megoldás: Az előző feladat megoldásához hasonló konstrukciót adhatunk. Legyenek az ω elemi események a 25 hosszúságú P, F (piros, fehér) jelekből álló sorozatok, az Ω biztos esemény az összes ilyen sorozatból álló halmaz, $\mathcal{A}$ az Ω részhalmazaiból álló halmaz, $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\{\omega\})$, minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra, és definiálnunk kell még a $P(\{\omega\})$ valószínűségeket. Eddig a pontig az a.) és b.) esetet kielégítő konstrukció nem különbözött. A különbség az lesz, hogy a két esetben másképp fogjuk definiálni a $P(\{\omega\})$ valószínűségeket. Az a.) esetben, amikor visszatevéssel húzzuk ki a golyókat, egy olyan ω valószínűsége, amelyik k P és $25-k$ F jelet tartalmaz $\left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{25-k}$, mert minden piros húzásnak $\frac{20}{50}$ és minden fehér húzásnak $\frac{30}{50}$ a valószínűsége, (a húzás előtt az urnában levő piros illetve fehér golyók száma osztva az urnában levő golyók számával.) A b.) eseben, amikor visszatevés nélkül húzzuk a golyókat, egy olyan ω valószínűsége, amelyik k P és $25-k$ F jelet tartalmaz $\frac{25\cdot 24\cdots(25-k+1)\cdot 30\cdot 29\cdots(30-(25-k)+1)}{50\cdot 49\cdots 26}$. Ugyanis egy előírt húzássorozat valószínűsége $\prod\limits_{j=1}^{25} \frac{l(j)}{50-j+1}$, ahol $l(j)$ az a $j-1$-ik húzás után az urnában maradt piros golyók száma, ha a j-ik húzás piros, és a $j-1$-ik húzás után az urnában maradt fehér golyók száma, ha a j-ik húzás fehér. Gondoljuk meg, hogy ez a kifejezés megegyezik a megadott formulával, ha k fehér és $25-k$ piros húzás történt.

Házi feladat:

Egy szabályos dobókockát feldobunk 10-szer egymás után. Adjunk erre valószínűségi modellt.

Néhány a tárgyalt kombinatorikus kérdésekkel kapcsolatos eredmény

Annak a ténynek, hogy egy n elemű halmazból $\binom{n}{k}$ módon lehet k elemet kiválasztani visszatevés nélkül, ha nem számít a sorrend több érdekes következménye és átfogalmazása van. Továbbá megfogalmazhatóak ezen eredmények bizonyos érdekes általánosításai. Ilyen állításokat fogok tárgyalni feladatok, illetve azok megoldásának formájában. Először megfogalmazom a feladatokat, és utána leírom azok egy lehetséges megoldását. (Egyes feladatoknál lehetne más, esetleg érdekesebb megoldásokat is megadni.)

1.) Egy n elemű halmazt $\binom{n}{k}$-féle módon lehet két diszjunkt k és $n-k$ elemű halmaz uniójára bontani. (Ha n páros szám, $k=\frac{n}{2}$, akkor $k=n-k$, és amennyiben az (A_1, A_2) halmazpár egy a feladat feltételeit teljesítő felbontás, akkkor az (A_2, A_1) halmazpár is az. Felmerül a kérdés, hogy ebben a feladatban két ilyen felbontáspárt különbözőnek tekintünk-e. A válasz az, hogy igen.)

2.) Legyen adva egy n elemű halmaz és $r \geq 2$ pozitív egész szám, valamint $k_1, \dots, k_r$ nem negatív egész számok, amelyekre $k_1 + \cdots + k_r = n$. Ezt az n elemű halmazt $\frac{n!}{k_1! \cdots k_r!}$ féleképp lehet r darab diszjunkt k_1, k_2, … , k_r elemű halmaz uniójára bontani. (Ha adva van az n elemű halmaz két olyan $B_1, \dots, B_r$ és $\bar{B}_1, \dots, \bar{B}_r$ felbontása r diszjunkt részhalmazra, amelyek ugyanazokat a részhalmazokat tartalmazzák, de más sorrendben, akkor ezeket különbözőeknek tekintjük. Ilyen felbontáspárok létezhetnek, ha a $k_1, \dots, k_r$ számok nem mind különböznek.)

3.) Egy n elemű A halmaznak 2^n részhalmaza van. (Az üres halmazt és magát az A halmazt is a részhalmazok közé számítjuk.)

4.) Legyen adva r urna, és dobjunk be egymás után n golyót ezen r urna valamelyikébe. Rögzítsünk r nem-negatív $k_1, \dots, k_r$ egész számot úgy, hogy $\sum\limits_{j=1}^{r} k_j = n$. Ekkor $\frac{n!}{k_1! \cdots k_r!}$ olyan dobássorozat van, amelyben a j-ik urnába k_j golyó esik minden $1 \leq j \leq r$ számra.

5.) Igaz a binomiális tétel, azaz

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}.$$

6.) Igaz a binomiális tétel következő polinomiális tételnek nevezett általánosítása. Legyenek adva $a_1, \dots, a_r$ valós (vagy komplex) számok és egy n pozitív egész szám. Ekkor

$$(a_1 + \cdots + a_r)^n = \sum_{\substack{(j_1,\dots,j_r):\ j_u \geq 0,\ 1 \leq u \leq r \\ j_1+\cdots+j_r=n}} \frac{n!}{j_1! \cdots j_r!} a_1^{j_1} \cdots a_r^{j_r}.$$

7.) Minden nem negatív egész n, m és k számokra igaz az

$$\binom{n+m}{k} = \binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \binom{n}{2}\binom{m}{k-2} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{m}{0}$$

azonosság. (Tegyük fel, hogy $n+m \geq k$.)

A következő eredmény, — amely a binomiális tétel általánosításának is tekinthető — az $(1+x)^\alpha$ függvény Taylor sorfejtése, ahol α tetszőleges (nem feltétlenül egész és nem feltétlenül pozitív) szám.

8.) Minden α, $-\infty < \alpha < \infty$, és x, $-1 < x < 1$, valós számra

$$(1+x)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} x^j,$$

ahol $\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}$, ha $j \geq 1$, (azaz így adtuk meg az $\binom{n}{j}$ binomiális együttható definiciójának formális kiterjesztését abban az esetben, ha az n számnak megfelelő α szám nem feltétlenül pozitív egész szám), és $\binom{\alpha}{0} = 1$.

9.) A 7. feladatban megfogalmazott azonosság érvényes nem egész n és m számokra is, ha a binomiális együtthatókat úgy definiáljuk, mint azt a 8. feladatban tettük.

Megoldások:

1.) Egy ilyen felbontás megadásához elég megadni a k elemű halmazt. Ezt viszont $\binom{n}{k}$-féleképp választhatjuk ki. (A k-elemű halmaz megadásakor k elemet kell kiválasztani n elemből, és nem számít, hogy milyen sorrendben választjuk ki azokat.)

2.) Válasszuk ki először az n elemű k_1 elemű részhalmazát. Ezt $\binom{n}{k_1}$ módon tehetjük meg. Ezután marad egy $n-k_1$ elemű halmaz, ahonnan k_2 elemet $\binom{n-k_1}{k_2}$ módon választhatunk ki. A k_3 elemű halmazt a maradék $n-k_1-k_2$ elemű halmazból $\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$ módon választhatjuk ki. Az összes halmaz lehetséges kiválasztásának a száma

$$\prod_{s=1}^{r} \binom{n-k_1-\cdots-k_{s-1}}{k_s}$$
$$= \prod_{s=1}^{r} \frac{\prod\limits_{u=0}^{k_s-1}(n-k_1-\cdots-k_{s-1}-u)}{k_s!} = \frac{n!}{k_1!\cdots k_r!},$$

ahol $\binom{n-k_1-\cdots-k_{s-1}}{k_s} = \binom{n}{k_1}$, ha $s=1$, és hasonlóan $\prod\limits_{u=0}^{k_s-1}(n-k_1-\cdots-k_{s-1}-u) = n(n-1)\cdots(n-k_1+1)$ az $s=1$ esetben a második sorban. Ilyen módon megkapjuk a feladat egy lehetséges megoldását.

3.) Soroljuk fel az n elemű halmaz elemeit egymás után. Egy részhalmazt megadhatunk úgy, hogy minden felsorolt elemről eldöntjük, hogy belevesszük-e a részhalmazba vagy nem. Íly módon n alkalommal kell igen vagy nem döntést hozni. Az összes lehetséges döntéssorozat száma 2^n.

4.) Tekintsük az $A = \{1,2,\dots,n\}$ n-elemű halmazt, és minden dobássorozatnak feleltessük meg az A halmaznak azt az r diszjunkt $B_1,\dots,B_r$ halmazból álló felbontását, amelyben B_s, $1 \leq s \leq r$, azon időpontok halmaza, amikor a golyót az

s-ik urnába dobtuk. Ilyen módon a tekintett urnákba történő golyódobások között és egy n elemű halmaz r diszjunkt halmazra való felbontásai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítettünk. Ezért a 4. feladat megoldása következik a másodikéból.

5.) Végezzük el az $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdots(a+b)}_{n\text{-szer}}$ szorzatban a tagonkénti szorzásokat. Ekkor n-hosszúságú a és b jegyekből álló szorzatok összegét kapjuk. A binomiális tétel bizonyításához elég megmutatni azt, hogy ebben az összegben $\binom{n}{k}$ olyan szorzat van, amely k darab a és $n-k$ darab b jelet tartalmaz. Viszont minden ilyen szorzatnak megfeleltethetjük az n elemű $C = \{1, 2, \dots, n\}$ halmaznak a felbontását két diszjunkt A és B halmazra úgy, hogy A tartalmazza azokat a helyeket, ahol a és B azokat a helyeket, ahol b jel áll. Mivel az első feladat szerint a C halmaznak $\binom{n}{k}$ olyan felbontása van, amelyben A k és B $n-k$ elemű halmaz, innen következik a feladat állítása.

6.) Végezzük el az $(a_1 + \cdots + a_r)^n = \underbrace{(a_1 + \cdots + a_r)\cdots(a_1 + \cdots + a_r)}_{n\text{-szer}}$ szorzatban a tagonkénti szorzásokat. Olyan n hosszúságú szorzatok összegét kapjuk, amelyek mindegyik tagja az $a_1, \dots, a_r$ számok valamelyike. Azt kell megmutatni, hogy az így keletkezett szorzatok között minden olyan $j_1, \dots, j_r$ nem negatív egészekből álló sorozatra, amelyre teljesül a $\sum\limits_{s=1}^{r} j_s = n$ azonosság $\frac{n!}{j_1!\cdots j_r!}$ olyan tag van, amely j_1 darab a_1-et, j_2 darab a_2-t, és így tovább j_r darab a_r-et tartalmaz. Viszont feleltessünk meg minden egyes ilyen szorzatnak egy olyan n hosszúságú dobássorozatot r urnába, ahol az s-ik golyót, $1 \le s \le n$, akkor dobjuk a p-ik urnába, $1 \le p \le r$, ha a szorzat s-ik tagja a_p. Ilyen módon kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítünk az így keletkezett szorzatok és a 4. feladatban szereplő urnamodell lehetséges kimenetelei között. Ezért a felírt azonosság következik a 4. feladat eredményéből.

7.) A következő kombinatorikai meggondolás megadja a bizonyítást. Számoljuk ki két különböző módon, hogy egy urnából, amelyben $n+m$ (megkülönböztethető) golyó van, hányféleképp választhatunk ki k golyót. Ez egyrészt $\binom{n+m}{k}$, ami a baloldali kifejezéssel egyenlő. Másrészt, fessünk n golyót piros és m golyót fehér színűre. Ekkor $\binom{n}{s}\binom{m}{k-s}$ féle módon választhatunk ki k golyót úgy, hogy ezek közül s piros és $k-s$ fehér. Ezeket a kifejezéseket összegezve minden $0 \le s \le k$ számra egyrészt megkapjuk az azonosság jobboldalán szereplő kifejezést, másrészt a baloldalon szereplő kifejezést számoltuk ki más módon.

8.) E feladat megoldásában felhasználjuk a matematikai analízis néhány fontos eredményét. Ezen eredmények szerint egy elég sima $f(x)$ függvény egy a pont körüli értékeire érvényes az $f(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$ azonosság, ahol $f^{(j)}(a)$ az $f(x)$ függvény j-ik deriváltját jelöli az $x=a$ pontban. Ez az azonosság érvényes minden olyan x pontban, amelyre $|x-a| < \liminf\limits_{j\to\infty} |f^{(j)}(a)|^{1/j}$. A fenti azonosság jobboldalán megjelenő hatványsort nevezik az $f(x)$ függvény Taylor sorának.

Az $f(x) = (1+x)^\alpha$ függvényre $a = 0$ választással alkalmazható ez az eredmény, azaz ebben az esetben teljesülnek a kívánt feltételek. Az $f(x) = (1+x)^\alpha$ esetben $f^{(0)}(0) = f(0) = 1$, $f^{(j)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)$, ha $j \ge 1$, ezért $\frac{f^{(j)}(0)}{j!} = \binom{\alpha}{j}$. Nem nehéz belátni, hogy minden $\varepsilon > 0$ számra létezik olyan $C(\varepsilon) > 0$ szám, amelyre $\left|\binom{\alpha}{j}\right| \le C(\varepsilon)(1+\varepsilon)^j$ minden $j = 1, 2, \dots$ számra, ahonnan $\liminf\limits_{j\to\infty} |f^{(j)}(0)|^{1/j} \le 1$. Innen következik a feladat állítása.

Megjegyzés: Ha $\alpha = n$ pozitív egész szám, akkor $\binom{\alpha}{j} = 0$ minden $j > n$ számra, mert ebben az esetben az $n(n-1)\cdots(n-j+1)$ szorzat tartalmazza a nulla tényezőt. Ezért ebben az esetben a megadott Taylor sorfejtés $(1+x)^n = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j$ alakban írható, és ez az azonosság érvényes minden x valós számra. Ez az azonosság ekvivalens a binomiális tétellel. Az $\alpha = -1$ esetben azt kapjuk, hogy $\binom{-1}{j} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-j)}{j!} = (-1)^j$, ahonnan $(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^j$, ha $|x| < 1$. Írjuk át ezt az azonosságot $y = -x$ helyettesítéssel. Azt kapjuk, hogy $\frac{1}{1-y} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} y^j$, ha $|y| < 1$. Ez utóbbi képlet megegyezik a geometriai sor összegezési formulájával.

9.) Ennek a feladatnak a megoldásában is felhasználjuk a matematikai analízis néhány eredményét. Egyrészt felhasználjuk azt a tényt, hogy egy $f(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ hatványsor a_j együtthatóit egyértelműen meghatározzák az $f(x)$ függvény értékei nulla egy kis környezetében. (Ezek az együtthatók megegyeznek az $f(x)$ függvény Taylor sorfejtésében megjelenő együtthatókkal.) Másrészt, hatványsorok szorzásakor a szorzatot ugyanúgy számolhatjuk ki, mint polinomok esetén.

Írjuk át az $(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{n+m}$ azonosságot az itt megjelenő függvények hatványsora segítségével. Azt kapjuk, hogy

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} \binom{m}{j} x^j\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} x^j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{m+n}{j} x^j,$$

ha $|x| < 1$. Végezzük el a beszorzást a baloldalon, és számoljuk ki x^k együtthatóját. Azt kapjuk, hogy ez az együttható $\sum\limits_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$. Ez egyenlő az x^k tag együtthatójával az azonosság jobboldalán szereplő hatványsorban, azaz a $\binom{n+m}{k}$ számmal, és ezt kellett belátni.

De Méré lovag két problémája

1. probléma. Ha egy kockát 4-szer feldobunk, akkor mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy hatos dobás lesz? Ha két kockát 24-szer feldobunk, mi annak a valószínűsége, hogy legalább egy dupla hatos lesz?

2. probléma. Két játékos egy igazságos játékot játszik, amelynek mindegyik fordulójában az egyes játékosok $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyernek, illetve veszítenek. Megállapodnak, hogy az a játékos nyeri el a tétet, aki először ér el hat nyerést. De a játékot félbe kell szakítaniuk akkor, amikor az egyiküknek három a másikuknak pedig öt nyerése volt. Hogyan kell igazságosan osztozkodniuk?

Az 1. probléma megoldása:

Annak a valószínűsége, hogy egy dobás eredménye nem hatos $\frac{5}{6}$, annak pedig, hogy 4 egymás utáni dobásban nem jelenik meg a hatos $\left(\frac{5}{6}\right)^4$. Annak a valószínűsége, hogy négy dobásban megjelenik egy hatos $P_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$. Hasonlóan, annak a valószínűsége, hogy két kocka dobásában nem jelenik meg a dupla hatos $\frac{35}{36}$, annak a valószínűsége, hogy ez 24 dobásban nem jelenik meg $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$. Annak a valószínűsége, hogy 24 dobásban megjelenik egy dupla hatos $P_2 = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$.

Érdemes megérteni, hogy a P_1 és P_2 valószínűségek miért vannak olyan közel egymáshoz. Vezessük be az $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, \dots$, számokat. Ekkor $1 - P_1 = a_6^{2/3}$, $1 - P_2 = a_{36}^{2/3}$. Viszont tanultuk az analízisben, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{-1}$, $e = 2.71\dots$. Továbbá ez az a_n sorozat elég gyorsan tart a határértékéhez, ezért az $a_6 \sim e^{-1}$ és $a_{36} \sim e^{-1}$ elég jó közelítés. Ezért mind a P_1 mind a P_2 valószínűség jól közelíthető az $1 - e^{-2/3}$ számmal. Továbbá ismeretes, hogy az a_n sorozat monoton nő, és innen adódik, hogy $P_1 > P_2$. Történetesen az $1 - e^{-2/3} \sim 0.49$ szám közel van $\frac{1}{2}$-hez, és a P_1 és P_2 valószínűségek az $\frac{1}{2}$ számot közrefogják. A P_1 szám értéke $\frac{1}{2} + \frac{23}{1296} \sim 0.52$.

A 2. probléma megoldása.

Tekintsük azt az általánosabb problémát, amikor n nyerés kell a tét megszerzéséhez, és az első játékos k, a második játékos pedig l alkalommal nyert. Tekintsük a következő $(n-k)+(n-l)-1 = 2n-k-l-1$ fordulót. Az első játékos akkor és csak akkor nyerné el a tétet, ha ezekben a fordulókban legalább $n-k$ alkalommal nyer. Ennek valószínűsége $P = 2^{k+l+1-2n} \sum\limits_{j=n-k}^{2n-k-l-1} \binom{2n-k-l-1}{j}$. Jelen esetben az első játékos $\frac{7}{8}$, a második játékos $\frac{1}{8}$ valószínűséggel nyeri el a tétet. Az igazságos tehát a $7:1$ arányú osztozkodás.

Történeti megjegyzés.

Matematika-történészek kiderítették, hogy mindkét most tárgyalt feladat jóval korábban ismert volt, mielőtt de Méré lovag kitűzte őket. Az a) feladat eredeti megfogalmazásában azt kérdezzük, hogy hányszor kell feldobni két kockát ahhoz, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer 2 hatost dobunk nagyobb legyen, mint 1/2. De Méré maga is megoldotta ezt a feladatot, de sajnos, … két módszerrel, amelyek különböző eredményre vezettek: 24 és 25 dobás. De Méré biztos volt abban, hogy a két módszer egyformán megbízható, és a két megoldás különböző eredménye miatt a matematika ,,ingatagságát" tette felelőssé. Pascal, miután meggyőződött arról, hogy a helyes válasz 25, le sem írta a megoldást. (De Méré lovag úgy gondolta, hogy ha négy dobás elegendő ahhoz, hogy egy kockával legalább $\frac{1}{2}$ valószínűséggel hatost dobjunk, akkor minthogy annak a valószínűsége, hogy két kocka mindegyikével hatost dobunk $\frac{1}{6}$-szor kisebb mint annak, hogy egy kockával dobunk hatost, ezért (szerinte) 6-szor több, tehát $4 \times 6 = 24$ dobás kell ahhoz, hogy legalább $\frac{1}{2}$ valószínűséggel következzék be két hatos dobás.)

Nem kötelező házi feladat:

Lássuk be, hogy az $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat valóban monoton növekszik.

Segítség: Lássuk be, hogy az a_n sorozat ,,folytonos kiterjesztése" a valós számokra, az $a(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$ függvény, illetve annak logaritmusa az $f(x) = x \log\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ függvény monoton nő az $x \ge 1$ félegyenesen. Ennek érdekében mutassuk meg, hogy $f(x)$ konkáv függvény, amelynek deriváltja a végtelenben nullához tart.)

1. kiegészítés. Egy népszerű feladat tárgyalása a tanultak alapján.

Tanulságos és népszerű az alábbi feladat.

A következő lehetőséget ajánlják fel nekünk. Egy épületben három garázs van, és mindegyiknek az ajtaja be van zárva. Az egyik garázsban egy autó van. Megkérhetjük, hogy nyissák ki az egyik garázsajtót. Ha annak a garázsnak az ajtaját nyittatjuk ki, amelyikben az autó van, akkor ezt az autót hazavihetjük, de ha egy másikat nyittatunk ki, akkor üres kézzel kell hazamennünk.

Rámutatunk az egyik garázsajtóra. Ezután kinyitnak egy másik garázsajtót, amelyik mögött nincs autó. Ezután kinyittathatjuk vagy azt a garázsajtót, amelyikre eredetileg rámutattunk, vagy megváltoztathatjuk a véleményünket, és a másik még ki nem nyitott garázsajtót nyittathatjuk ki. Érdemes-e megváltoztatni a véleményünket, és a másik még ki nem nyitott garázsajtót kinyittatni vagy mindegy, hogy melyik ajtót nyittatjuk ki? (Célunk természetesen az, hogy minél nagyobb valószínűséggel hazavihessük az autót.)

A válasz az, hogy érdemes a másik ajtót kinyittatni, mert akkor $\frac{2}{3}$, míg az eredetileg kijelölt ajtó kinyittatása esetén csak $\frac{1}{3}$ valószínűséggel vihetjük haza az autót. Annak érdekében, hogy ezt jól megértsük, és teljes biztonsággal a számunkra előnyös megoldást válasszuk, érdemes megfogalmazni pontosan azt a valószínűségi modellt, amely leírja a feladatban megadott procedurát. A model áttekintése után megtaláljuk azt az egyszerű magyarázatot is, amelyet nem biztos, hogy rögtön észrevettünk.

Magyarázat: Nevezzük el azt az ajtót, amelyre rámutattunk az 1-es, a másik két ajtó közül a baloldalit a 2-es, a jobboldalit a 3-as ajtónak. Mindhárom ajtó mögött $\frac{1}{3}$

valószínűséggel van az autó. Leírok egy olyan valószínűségi modellt, amely a feladatban leírt eljárásnak egy lehetséges megvalósítását adja meg.

Tegyük fel, hogy a következő módon készültek fel a kiszolgálásomra. Az autót $\frac{1}{3}$ valószínűséggel elhelyezték az 1. 2. vagy 3. ajtó mögé, majd ettől függetlenül elvégeztek egy véletlen kisérletet, amelynek két kimenete van, mondjuk I és F, és legyen az I eredmény valószínűsége p, $0 \le p \le 1$, Például feldobtak egy pénzdarabot, amelyik p valószínűséggel esik az írás és $1-p$ valószínűséggel esik a fej oldalára. Ezen kisérlet eredményének a segítségével döntik el, hogy melyik ajtót nyitják ki abban az esetben, ha van szabad választásuk.

Vezessük be az $(1,F)$, $(1,I)$, $(2,F)$, $(2,I)$, $(3,F)$ és $(3,I)$ eseményeket, ahol az 1, 2 illetve 3 szám azt jelöli, hogy az autó az 1-es, 2-es vagy 3-as ajtó mögött van az F és I jel pedig, hogy a kisérlet eredménye F vagy I. Ezen események diszjunktak, az $(1,I)$, $(2,I)$ és $(3,I)$ események valószínűsége $\frac{p}{3}$, míg az $(1,F)$, $(2,F)$ és $(3,F)$ események valószínűsége $\frac{1-p}{3}$ Ha az $(1,I)$ esemény következik be akkor a 2-es, ha az $(1,F)$ esemény következett be, akkor a 3-as ajtót nyitják ki. (Ha az 1-es esemény következett be, akkor a másik két ajtó bármelyikét kinyithatják, és a véletlen kisérlet segítségével választottak.) Ha a $(2,F)$ vagy $(2,I)$ esemény következik be, akkor a hármas, ha a $(3,F)$ vagy $(3,I)$ esemény következik be, akkor a 2-es ajtót nyitják ki. (Ezekben az esetekben kötelező így eljárni.) Ha azt az ajtót nyittatjuk ki, amelyre eredetileg rámutattunk, akkor az $(1,F)$ vagy $(1,I)$ esemény bekövetkezte esetén nyerjük meg az autót, és ennek valószínűsége $\frac{1}{3}$. Ha a másik ajtót nyittatjuk ki, akkor az autót a $(2,F)$, $(2,I)$, $(3,F)$ vagy $(3,I)$ kimenetelek valamelyike esetén nyerjük meg. Ennek valószínűsége pedig $\frac{2}{3}$. Vegyük észre, hogy annak valószínűsége, hogy az az eredetileg kiválasztott 1-es ajtó kinyittatása esetén hazavihetjük az autót $P(\{(1,F)\}) + P(\{1,I)\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{3}$, és ez nem függ attól, hogy milyen valószínűséggel lett a kisérlet eredménye I vagy F. Hasonlóan, annak a valószínűsége, hogy a másik ajtó kinyitása esetén vihetjük haza az autót $P(\{(2,F)\}) + P(\{2,I)\}) + P(\{(3,F)\}) + P(\{3,I)\}) = P(\{2\}) + P(\{3\}) = \frac{2}{3}$ függetlenül attól, hogy milyen valószínűséggel lett a kisérlet eredmény I vagy F.

A véletlen kisérlet, (például egy pénzfeldobás) segítségével megadtunk egy valószínűségi mezőt, ahol a problémát jól át tudjuk tekinteni. De e model áttekintése során megérthetjük, hogy valójában egy olyan esemény valószínűségére kérdezünk rá, amely csak attól függ, hogy milyen valószínűséggel tették az autót az egyes garázsokba. Az az esemény, hogy véleményünk megváltoztatása nélkül nyerjük el az autót megegyezik azzal az eseménnyel, hogy az autó abban a garázsban volt, amelyikre eredetileg rámutattunk. Az az esemény hogy véleményünk megváltoztatása esetén nyerjük el az autót megegyezik azzal az eseménnyel, hogy az autó a másik két garázs valamelyikében volt.

2. kiegészítés. A Taylor sorfejtésről.

Áttekintem a Taylor sorfejtés számunkra legérdekesebb eredményeit. Ezt érdemes a következő Lagrange-tól származó eredménnyel kezdeni.

Lagrange tétele függvények alkalmas polinom közelítéséről. *Legyen $f(x)$ egy $k+1$-szer, $k \ge 0$, differenciálható függvény valamely $[a-h, a+h]$ intervallumban. Ekkor érvényes az*

$$f(a+u) = f(a) + f'(a)u + \frac{f''(a)}{2}u^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}u^k + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}u^{k+1}, \quad \text{ha } |u| < h,$$

azonosság, ahol $f^{(j)}(x)$ az f függvény j-ik deriváltja az x pontban, ξ egy alkalmas pont az $(a, a+u)$ intervallumban, ha $u > 0$, és az $(a-u, a)$ intervallumban, ha $u < 0$.

Megfogalmazom e tétel egy fontos következményét.

Lagrange tételének a következménye. *Legyen $f(x)$ végtelen sokszor differenciálható függvény valamely $[a-h, a+h]$ intervallumban, amelyre teljesül a*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{h^k}{k!} \sup_{a-h<x<a+h} |f^{(k)}(x)| = 0$$

feltétel. Ekkor

$$f(a+u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}u^k \quad \text{minden } |u| < h \text{ számra.}$$

(A fenti képletben $f^{(0)}(a) = f(a)$.)

A fenti eredmény azt sugallja, hogy ha adva van egy az a pontban végtelen sokszor differenciálható f függvény, akkor érdemes bevezetni e függvénynek a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}u^k$$

Taylor sorát. Ezt a végtelen sort nevezik az $f(x)$ függvény a pont körüli hatványsorának. Ezenkívül, ha adva van egy A_k, $k = 0, 1, 2, \dots$ számsorozat, akkor definiálhatjuk az

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k u^k$$

(formális) hatványsort. Ezután vizsgálhatjuk hatványsorok és végtelen sokszor differenciálható függvények kapcsolatát. Igaz-e, hogy minden hatványsor segítségével definiált függvény végtelen sokszor differenciálható? Igaz-e, hogy minden végtelen sokszor differenciálható függvény hatványsorba fejthető, azaz egyenlő az a pont körüli hatványsorával az a pont egy alkalmas környezetében? Az első kérdésre a válasz igenlő. (Ez úgy értendő, hogy csupán annyi feltételt kell tenni a hatványsor együtthatóira, ami biztosítja a hatványsor konvergenciáját egy alkalmas intervallumban.) Ezt mondja ki az alábbi tétel. Ahhoz viszont, hogy egy végtelen sokszor differenciálható függvény hatványsorba fejthető legyen, némi extra feltételt még fel kell tenni.

Tétel hatványsorok tulajdonságairól. *Tekintsünk egy*

$$g(u)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k u^k$$

alakú hatványsort, és vezessük be az $A=\limsup\limits_{k\to\infty}A_k^{1/k}$ *számot. Ekkor a* $g(u)$ *hatványsor konvergens minden* $|u|<\frac{1}{A}$ *és divergens minden* $|u|>\frac{1}{A}$ *számra. (Az* $u=\pm\frac{1}{A}$ *eset nehezebb. Ez külön vizsgálatokat igényel. Ezzel a kérdéssel azonban itt nem foglalkozom.) A* $g(u)$ *hatványsor tagonként differenciálható az* $|u|<\frac{1}{A}$ *intervallumban, azaz*

$$g'(u)=\sum_{k=1}^{\infty}kA_k u^{k-1}\quad \textit{ha } |u|<\frac{1}{A}.$$

Nem nehéz belátni, hogy a fenti tételt lehet alkalmazni a $g'(u)$ majd rekurzive a $g(u)$ függvény k-ik deriváltjára, a $g^{(k)}(u)$ függvényre minden $k=1,2,\dots$ indexre az $|u|<\frac{1}{A}$ intervallumban, és ez azt jelenti, hogy a $g(\cdot)$ függvény végtelen sokszor differenciálható ebben az intervallumban. Részletesebben kifejtve,

$$g^{(j)}(u)=\sum_{k=j}^{\infty}k(k-1)\cdots(k-j+1)A_k u^{k-j}\quad \text{minden } j=1,2,\dots \text{ számra, ha } |u|<\frac{1}{A}.$$

Érdemes kimondani az alábbi lemmát, amely valójában az utolsó tétel egyszerű következménye.

Lemma hatványsorok egyértelműségéről. *Egyezzen meg két* $g(u)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k u^k$ *és* $h(u)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}B_k u^k$ *hatványsor valamely* $|u|<\alpha$ *intervallumban. Akkor* $A_k=B_k$ *minden* $k=0,1,2,\dots$ *indexre.*

A Lagrange tétel következménye alapján minden olyan végtelen sokszor differenciálható függvény, amelynek a (többszörös) deriváltjai nem nőnek túlságosan gyorsan megadható hatványsor alakban, és ez a hatványsor előállítás az előző lemma szerint egyértelmű. A Lagrange tétel következményében szereplő feltétel gyengíthető, de teljesen el nem hagyható. Van olyan végtelen sokszor differenciálható függvény, amely nem állítható elő hatványsor alakban. Ilyen függvényre mutat példát a következő híres példa.

Példa végtelen sokszor differenciálható, de hatványsorba nem fejthető függvényre. *Legyen $f(x) = e^{-1/x^2}$, ha $x > 0$, és $f(x) = 0$, ha $x < 0$. Ez az $f(x)$ függvény az $x = 0$ pontban is végtelen sokszor differenciálható, és $f^{(k)}(0) = 0$ minden $k = 0, 1, 2, \dots$ számra. (Az $f(x)$ függvény az $x \neq 0$ pontokban is végtelen sokszor differenciálható.) Ez a végtelen sokszor differenciálható függvény az $x = 0$ pont környezetében nem fejthető hatványsorba.*

Azokat a (végtelen sokszor differenciálható) függvényeket, amelyek hatványsorba fejthetőek analitikusnak nevezik. Az analitikus függvények (illetve azoknak a komplex számsíkra való kiterjesztésének) a vizsgálata a komplex függvénytan rendkívül fontos témája. Sok olyan analitikus függvény van, amelyek hatványsorát illik ismerni. A legfontosabb hatványsorok:

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad -\infty < x < \infty, \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad -\infty < x < \infty, \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad -\infty < x < \infty, \\
\log(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \qquad -1 < x < 1, \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{x^k}{k}, \qquad -1 < x < 1, \quad \text{ha } -\infty < \alpha < \infty.
\end{aligned}
$$

Az utolsó azonosságban $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. Érdemes megjegyezni, hogy ez az azonosság az $\alpha = -1$ esetben a $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} x^k$ geometriai sorösszeget kifejező azonosság. Ha $\alpha = n$ pozitív egész szám, akkor ez az azonosság az $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ binomiális azonossággal egyezik meg.

Egy függvény hatványsorának az első néhány tagjának az összege jó közelítést ad a függvényre. Az, hogy milyen jó ez a közelítés megbecsülhető a Taylor sor alakjából, vagy Lagrange tételéből függvények alkalmas polinom közelítéséről. Ilyen jellegű becslések fontos szerepet játszanak sok vizsgálatban. Hatványsorokkal jól lehet számolni. Kissé informálisan azt mondhatjuk, hogy hatványsorokkal úgy számolhatunk, mint (véges) polinomokkal. Ezt az állítást nem fejtem ki részletesen. Talán érdemes megjegyezni, hogy ide tartozik a hatványsorok tagonkénti differenciálhatóságáról szóló tétel. Ez a hatványsorok egy fontos tulajdonsága, mert általános esetben egy függvénysor tagonkénti differenciálhatóságának biztosításához bizonyos extra feltételeket kell tenni.