A SELBERG–FÉLE NYOMFORMULA

Halász Gábor

a Poisson összegzési képlet analogonja.

A Poisson formula

Legyen $k(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ komplex értékű függvény, $K(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k(x+n)$. (Konvergenciával, stb. nem foglalkozunk). Nyilván $K(x+1) = K(x)$.

Fourier sorba fejtve,

$$K(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{2\pi ijx},$$

ahol

$$\begin{aligned} a_j &= \int_0^1 K(x)e^{-2\pi ijx}\,dx = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} k(x+n)e^{-2\pi ijx}\,dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 k(x+n)e^{-2\pi ijx}\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} k(x)e^{-2\pi ijx}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} k(x)e^{-2\pi ijx}\,dx = \kappa(2\pi j); \end{aligned}$$

itt

$$\kappa(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x)e^{-itx}\,dx$$

a Fourier transzformált.

Például $K(0)$-at definíciójával és Fourier sorával is kifejezve,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} k(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \kappa(2\pi j).$$

Ennek az az értelme (és a fő haszna), hogy a baloldal az $\int_{-\infty}^{\infty} k(x)\,dx = \kappa(0)$ integrál közelítő összege, ami a jobboldal $j = 0$-hoz tartozó tagja, míg a $j \neq 0$ tagok adják a hibát. (2-dimenzióban, — ott az egészeket mindkét oldalon egész koordinátájú vektorok helyettesítik, — ha a megfelelő $k(x)$ egy nagy körlap indikátorfüggvénye, akkor a baloldal a körbe eső rácspontok száma, míg a jobboldalon a 0 vektornak megfelelő tag a körlap területe. A hibatag pontos nagyságrendje — ez a nevezetes körprobléma — ismeretlen; a legjobb ismert eredmény valóban ezen Poisson formula többi tagjának becsléséből adódik. Egy rokon körproblémát l. később!)

Ugyanez mégegyszer fellengzős stílusban.

A számegyenesen $|x-y|$ metrika, a Lebesgue mérték mérték. Jelölje $T_u x = x+u$ az u-val való eltolást. Ezek metrika– és mértéktartóak, (de az összes metrika– és mértéktartó transzformációknak csak egy részcsoportját alkotják).

Jelöljük ugyanígy az $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ függvényeken ható $T_u f = f(x+u)$ eltolás operátort is. Általános operátort röviden, illetve részletesen így jelölünk:

$$Lf = \underset{y}{L}(f(y), x),$$

ami azt jelenti, hogy az L operátor f-re mint az y változó függvényére hat, és azt az x változó függvényévé transzformálja.

Az L operátort invariánsnak mondjuk, ha

$$\underset{y}{L}(f(y+u), x) = \underset{y}{L}(f(y), x+u),$$

azaz, ha $LT_u = T_u L$ minden u-ra.

Mikor lesz az $Lf = \int_{-\infty}^{\infty} k(x,y) f(y)\, dy$ integrál operátor invariáns?

$$\begin{aligned} LT_u f &= \int_{-\infty}^{\infty} k(x,y) f(y+u)\, dy, \\ T_u L f &= \int_{-\infty}^{\infty} k(x+u,y) f(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} k(x+u,y+u) f(y+u)\, dy, \end{aligned}$$

azaz akkor, ha $k(x,y) = k(x+u,y+u)$, másszóval $k(x,y)$ csak $(x-y)$-tól függ, $k(x,y) = k(x-y)$, $Lf = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y) f(y)\, dy$ konvolúció.

Mikor lesz az $Lf = \sum\limits_{\nu=0}^{m} a_\nu(x) \frac{d^\nu f}{dx^\nu}$ differenciál operátor invariáns?

$$\begin{aligned} LT_u f &= \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu(x) f^{(\nu)}(x+u), \\ T_u L f &= \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu(x+u) f^{(\nu)}(x+u), \end{aligned}$$

azaz akkor, ha $a_\nu(x+u) = a_\nu(x)$, $a_\nu(x) \equiv a_\nu$ konstans, $L = \sum\limits_{\nu=0}^{m} a_\nu D^\nu$, ahol $D = \frac{d}{dx}$, ami tehát generálja az invariáns differenciáloperátorok gyűrűjét.

Állítás. *Bármely két invariáns operátor felcserélhető, $L_1 L_2 = L_2 L_1$.*

Bizonyítás. Invariáns operátorok szorzata is invariáns:

$$L_1 L_2 T_u = L_1 T_u L_2 = T_u L_1 L_2.$$

Ha mindkettő integrál operátor,

$$L_{1,2} f = \int_{-\infty}^{\infty} k_{1,2}(x,y) f(y)\, dy,$$

akkor L_1L_2 is
$$k(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty} k_1(x,u)k_2(u,y)\,du$$
magfüggvénnyel.

Invariáns integrál operátor magfüggvényére $k(x,y)=k(-y,-x)$, mert $x-y=-y-(-x)$, a valós számok, így az eltolások csoportja is kommutatív. Ezt mind $k(x,y)$-ra, mind $k_{1,2}(x,y)$-ra felírva,
$$\begin{aligned}k(x,y)&=\int_{-\infty}^{\infty} k_1(-y,u)k_2(u,-x)\,du\\&=\int_{-\infty}^{\infty} k_1(-y,-u)k_2(-u,-x)\,du=\int_{-\infty}^{\infty} k_1(u,y)k_2(x,u)\,du,\end{aligned}$$
ahol a közbülső lépésben felhasználtuk, hogy az $x\to -x$ tükrözés, bár nem tartozik az eltolás csoportunkhoz, szintén mértéktartó. A jobboldal L_2L_1 magfüggvénye, és ezzel bebizonyítottuk az állítást integrál operátorokra.

Legyen $k(u)>0$ $(|u|<1)$, $k(u)=0$ $(|u|\geq 1)$, $\int_{-\infty}^{\infty} k(u)\,du=1$, és
$$k_\delta(z,w)=\frac{1}{\delta}k\left(\frac{x-y}{\delta}\right).$$
Ekkor
$$L_\delta f=\int_{-\infty}^{\infty} k_\delta(x,y)f(y)\,dy$$
invariáns integrál operátor, amelyre $L_\delta f\to f$ $(\delta\to 0)$.

Ha L tetszőleges invariáns operátor, akkor
$$LL_\delta f=\int_{-\infty}^{\infty} \underset{x}{L}(k_\delta(x,y),x)f(y)\,dy$$
integrál operátor és mint két invariáns operátor szorzata, invariáns is. Tudjuk tehát, hogy
$$(L_1L_\delta)(L_2L_\delta)=(L_2L_\delta)(L_1L_\delta),$$
és $\delta\to 0$ adja az állítást.[1]

Ez azért fontos számunkra, mert felcserélhető operátoroknak "közös spektrálfelbontása" van.

Ha például $f(x)$ D-nek sajátfüggvénye tetszőleges komplex λ sajátértékkel, $Df=\lambda f$, ahol $f(x)=e^{\lambda x}$, (az összes ilyen $Ae^{\lambda x}$ alakú), akkor
$$DLf=LDf=L\lambda f=\lambda Lf,$$
tehát Lf is sajátfüggvénye D-nek ugyanazon λ sajátértékkel. Mivel ezek a sajátfüggvények itt 1-dimenziós teret alkotnak, $Lf=\Lambda e^{\lambda x}=\Lambda f(x)$, ahol Λ csak λ-tól és L-től függ.

[1] A bizonyítás egyszerűsítését Lempert Lászlónak köszönöm.

Számítsuk ki a Λ-t, ha $Lf = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)f(y)\,dy$! Mivel $f(0)=1$,

$$\Lambda = \underset{y}{L}(f(y),0) = \int_{-\infty}^{\infty} k(-y)e^{\lambda y}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} k(y)e^{-\lambda y}\,dy,$$

a Laplace (Fourier) integrál.

* * *

Az eltolások diszkrét részcsoportja egyetlen elemmel generált végtelen ciklikus, tipikus példa $\{T_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. $f(x)$ (1 szerinti) periodicitása azt jelenti, hogy $T_n f = f$. Ha L invariáns operátor, akkor $T_n Lf = LT_n f = Lf$, azaz Lf is periodikus: a periodikus függvények az invariáns operátorokra nézve invariáns alteret alkotnak. Mostantól a periodikus $f \in \mathfrak{L}_2(0,1)$ függvények terére szorítkozunk, a skalár szorzatot, önadjungáltságot, stb. is ebben értjük.

Ha L integrál operátor, akkor

$$\begin{aligned} Lf &= \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)f(y)dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n}^{n+1} k(x-y)f(y)\,dy \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 k(x-(y+n))f(y+n)dy = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy, \end{aligned}$$

ahol $K(x,y) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} k(x-(y+n))$ mindkét változójában periodikus mag.

A periodikus függvények terében iD önadjungált, mert

$$(Df,g) = \int_0^1 f'(x)\overline{g(x)}\,dx =$$

(parciálisan integrálva)

$$= -\int_0^1 f(x)\overline{g'(x)}\,dx = -(f,Dg).$$

D sajátértékei ezért imagináriusak, ($(Df,f) = \lambda(f,f)$, $(Df,f) = -(f,Df) = -\overline{\lambda}(f,f)$, $\lambda = -\overline{\lambda}$), és különböző sajátértékekhez tartozó sajátfüggvények ortogonálisak, ($Df = \lambda f$, $Dg = \mu g$, $\lambda \neq \mu \Longrightarrow \lambda(f,g) = (Df,g) = -(f,Dg) = -\overline{\mu}(f,g) = \mu(f,g)$, $(f,g)=0$).

Persze tudjuk, hogy a normált sajátfüggvények összessége a trigonometrikus rendszer: $f_j(x) = e^{\lambda_j x} = e^{2\pi i j x}$ $(j = 0, \pm 1, \ldots)$. Ezek teljesek is, — ez is következne általános tételekből, — és így $K(x,y)$ kifejthető a 2-változós függvények terében teljes $\{f_i(x)\overline{f_j(y)}\}_{i,j=-\infty}^{\infty}$ rendszer szerint:

$$K(x,y) = \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} c_{ij} f_i(x)\overline{f_j(y)}.$$

Ha az $Lf = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)f(y)\,dy$ integrál operátornak a λ_j-hez tartozó sajátértéke Λ_j, amiről tudjuk, hogy

$$\Lambda_j = \int_{-\infty}^{\infty} k(y)e^{-\lambda_j y}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} k(y)e^{-2\pi ijy}\,dy = \kappa(2\pi j),$$

akkor az ortogonalitás alapján

$$\begin{aligned}\Lambda_j f_j(x) = Lf_j = \int_0^1 K(x,y)f_j(y)\,dy &= \int_0^1 \sum_{i,l=-\infty}^{\infty} c_{il} f_i(x)\overline{f_l(y)}f_j(y)\,dy \\ = \sum_{i,l=-\infty}^{\infty} c_{il} f_i(x) \int_0^1 \overline{f_l(y)}f_j(y)\,dy &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{ij} f_i(x).\end{aligned}$$

Az ortogonális sorfejtés egyértelműsége alapján pedig

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j, \\ \Lambda_j, & \text{ha } i = j. \end{cases}$$

Innen

$$K(x,y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Lambda_j f_j(x)\overline{f_j(y)},$$

és operátorunk nyoma,

$$\int_0^1 K(x,x)\,dx = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Lambda_j.$$

$K(x,x)$ valójában konstans,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} k(x-(x+n)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k(n),$$

míg a jobboldalon $\Lambda_j = \kappa(2\pi j)$, és eljutottunk a Poisson formulához.

* * *

Általános térben, ahol adott izometrikus transzformációk, (eltolások) egy csoportja, ezek szerint a következő a feladat.

Program. Meghatározni az invariáns integrál és differenciál operátorokat, (a konvolúció és a deriválás általánosítását). Megkeresni a differenciál operátorok sajátértékeit és sajátfüggvényeit, (az exponenciális függvény általánosítását). Kiszámítani az integrál operátorok ezekhez tartozó sajátértékeit, (a Fourier integrál általánosítása). Az operátorokat az eltolások egy diszkrét csoportjára nézve invariáns függvényekre korlátozni, (a periodikus függvények általánosítása). Megkeresni ebben a függvénytérben a differenciál operátorok sajátfüggvényeit, (a trigonometrikus rendszer általánosítását). Kiszámolni az integrál operátorok magfüggvényét, (a periodus intervallumon való integrál alak megfelelőjét), és azt a sajátfüggvények szerint kifejteni.

Ezt a programot egy speciális esetben végrehajtjuk.

Analízis a hiperbolikus síkon

A félsíkmodell. Elsősorban a $H = \{z\colon \Im z > 0\}$ felső félsíkot használjuk alaptérként. Pontjait rendszerint $z = x + iy$-nal és $w = u + iv$-vel jelöljük.

A metrika $|dz|/y$, másszóval a γ görbe (nem–euklideszi) hossza

$$\ell(\gamma) = \int_\gamma \frac{|dz|}{y},$$

két pont távolsága

$$d(z,w) = \min_\gamma \ell(\gamma) = \log \frac{1 + \frac{|z-w|}{|z-\overline{w}|}}{1 - \frac{|z-w|}{|z-\overline{w}|}},$$

ahol a minimum a z-t és w-t összekötő görbékre veendő. Az explicit képletből csak arra lesz szükségünk, hogy az

$$\frac{1}{4(|\frac{z-\overline{w}}{z-w}|^2 - 1)} = \frac{|z-w|^2}{yv}$$

függvénye. A geodetikusok, (a minimumot adó görbék) a valós tengelyt merőlegesen metsző körök és egyenesek; ezeket fogjuk (nem-euklideszi) egyeneseknek nevezni.

A metrikából levezethető területelem, $d\sigma = dx\,dy/y^2$, másszóval az A halmaz mértéke

$$\sigma(A) = \int_A d\sigma = \int\int_A \frac{dx\,dy}{y^2}.$$

H-nak önmagára való konform leképezései,

$$Tz = \frac{az+b}{cz+d},$$

ahol a, b, c, d valósak, $ad - bc > 0$, — feltehető, hogy $ad - bc = 1$, — terünk merev mozgatásai, ugyanis, ha $w = Tz$,

$$\ell(T\gamma) = \int_{T\gamma} \frac{|dw|}{v} = \int_\gamma \frac{|T'(z)||dz|}{v} = \int_\gamma \frac{|dz|}{y} = \ell(\gamma),$$

mert, mint utánaszámolható,

$$|T'(z)| = \frac{v}{y}.$$

Emiatt a távolságot is megtartják,

$$d(Tz, Tw) = d(z,w)$$

és a mértéket is,

$$\sigma(TA) = \int\int_{TA} \frac{du\,dv}{v^2} = \int\int_A \frac{|T'(z)|^2\,dx\,dy}{v^2} = \int\int_A \frac{dx\,dy}{y^2} = \sigma(A).$$

A körmodell. Néha kényelmesebb lesz az egységkörben mint alaptérben dolgozni. Az áttérés H-nak az egységkörre való konform leképezésével, például

$$U(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

-vel valósítható meg, ami a H-beli metrikát és mértéket — konstans szorzótól eltekintve — $|dz|/(1-|z|^2)$-be, illetve $dx\,dy/(1-|z|^2)^2$-be viszi. A nem–euklideszi egyenesek az egységkörvonalat merőlegesen metsző körök és egyenesek.

A merev mozgatások

$$Tz = \varrho \frac{z-\xi}{1-z\overline{\xi}}, \qquad (|\varrho| = 1,\ |\xi| < 1)$$

alakúak, a metrika és mérték invarianciáját biztosító azonosság, ahol $w = Tz$,

$$|T'(z)| = \frac{1-|w|^2}{1-|z|^2}.$$

Invariáns operátorok. A H-n értelmezett $f(z)$ függvényeken ható operátorokat a valós esetnek megfelelően így jelöljük:

$$Lf = \underset{w}{L}(f(w), z).$$

A számegyenes eltolásaihoz hasonlóan a T mozgatás is meghatároz egy ilyen operátort:

$$Tf \overset{def}{=} f(Tz).$$

Az L operátort invariánsnak mondjuk, ha

$$\underset{w}{L}(f(Tw), z) = \underset{w}{L}(f(w), Tz),$$

azaz, ha $LT = TL$ minden T-re.

Mikor lesz az $Lf = \int_H k(z,w)f(w)\,d\sigma_w$ integrál operátor invariáns? ($d\sigma_w$ azt jelzi, hogy w az integrációs változó.)

$$\begin{aligned}
LTf &= \int_H k(z,w)f(Tw)\,d\sigma_w,\\
TLf &= \int_H k(Tz,w)f(w)\,d\sigma_w = \int_H k(Tz,Tw)f(Tw)\,d\sigma_w
\end{aligned}$$

(a mértéktartás alapján), azaz akkor, ha $k(z,w) = k(Tz,Tw)$ minden T mozgatásra.

A mozgatások csoportja kétszeresen tranzitív abban az értelemben, hogy — a szükséges feltétel, — $d(z_1,w_1) = d(z_2,w_2)$ esetén létezik T, amelyre $z_2 = Tz_1$, $w_2 = Tw_1$. $k(z,w)$ tehát csak $d(z,w)$-től függ,

$$k(z,w) = k\left(\frac{|z-w|^2}{yv}\right).$$

Mikor lesz az

$$Lf = \sum_{0\le\nu+\mu\le m} a_{\nu\mu}(z)\frac{\partial^{\nu+\mu} f}{\partial x^\nu\,\partial y^\mu}$$

differenciál operátor invariáns?

Megjegyzés operátor megadásáról. Invariáns operátort rögzített $z_0 \in H$-ban kiértékelő

$$L^0 f = \underset{w}{L}^0 f(w) \overset{def}{=} \underset{w}{L}(f(w), z_0)$$

funkcionál egyértelműen meghatározza a teljes operátort, hiszen

$$Lf = \underset{w}{L}(f(w), z) = \underset{w}{L}(f(T_z w), z_0) = \underset{w}{L}^0 f(T_z w),$$

ahol T_z tetszőleges olyan mozgatás, amelyre $T_z z_0 = z$.

A funkcionál nem tetszőleges. Ha ugyanis $Tz_0 = z_0$, (T z_0 körüli nem-euklideszi forgatás), akkor $Lf(Tw) = TLf(w)$ alapján

$$L^0 f(Tw) = \underset{w}{L}(f(Tw), z_0) = \underset{w}{L}(f(w), Tz_0) = \underset{w}{L}(f(w), z_0) = L^0 f(w) :$$

a funkcionál "forgásszimmetrikus".

Fordítva, ha L^0 forgásszimmetrikus funkcionál, akkor a fenti képlet,

$$Lf = \underset{w}{L}^0 f(T_z w)$$

invariáns operátort definiál.(Bizonyítás. Tetszőleges T-re legyen $z_1 = Tz$.

$$\begin{aligned} TLf &= \underset{w}{L}^0 f(T_{z_1} w) \overset{def}{=} \underset{w}{L}^0 g(w),\\ LTf &= \underset{w}{L}^0 f(TT_z w) = \underset{w}{L}^0 g(T_{z_1}^{-1} T T_z w) \overset{def}{=}\\ &= \underset{w}{L}^0 g(T_1 w) = \underset{w}{L}^0 g(w), \end{aligned}$$

ugyanis

$$T_1 z_0 = T_{z_1}^{-1} T T_z z_0 = T_{z_1}^{-1} T z = z_0.)$$

* * *

Elég tehát megnézni, hogy az

$$L^0 f = \sum_{0\le\nu+\mu\le m} a_{\nu\mu}\, \frac{\partial^{\nu+\mu} f(z)}{\partial x^\nu\,\partial y^\mu}\bigg|_{z=z_0}$$

($a_{\nu\mu} = a_{\nu\mu}(z_0)$) differenciál funkcionál mikor forgásszimmetrikus. Most kényelmesebb a körmodell, $z_0 = 0$ és $L^0 f$-et z és $\overline{z}$ szerinti deriváltakkal felírni:

$$L^0 f = \sum_{0\le\nu+\mu=m} b_{\nu\mu}\, \frac{\partial^{\nu+\mu} f(z)}{\partial z^\nu\,\partial \overline{z}^\mu}\bigg|_{z=0}.$$

A forgásszimmetria azt jelenti, hogy

$$\underset{z}{L^0} f(\varrho z) = \sum_{0 \le \nu+\mu \le m} b_{\nu\mu} \varrho^\nu \overline{\varrho}^\mu \left. \frac{\partial^{\nu+\mu} f(z)}{\partial z^\nu \, \partial \overline{z}^\mu} \right|_{z=0}$$

független $|\varrho| = 1$-től. Ez akkor van így, ha

$$\sum_{\nu-\mu=h} b_{\nu\mu} \left. \frac{\partial^{\nu+\mu} f(z)}{\partial z^\nu \, \partial \overline{z}^\mu} \right|_{z=0} = 0$$

minden $h \neq 0$-ra és f-re, azaz, ha $b_{\nu\mu} = 0$ $(\nu \neq \mu)$. Tehát

$$L^0 f = \sum_{0 \le \nu \le m/2} b_\nu \left. \left(\frac{\partial^2}{\partial z \, \partial \overline{z}} \right)^\nu f(z) \right|_{z=0} = \sum_{0 \le \nu \le m/2} c_\nu \, \Delta^\nu f(z)|_{z=0} \,,$$

mert

$$4 \frac{\partial^2}{\partial z \, \partial \overline{z}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \Delta,$$

a Laplace operátor.

Ha például a funkcionál $L^0 f = \Delta f(z) \, |_{z=0}$, akkor a megfelelő operátor

$$Lf = \underset{w}{L^0} f(T_z w) = \Delta \; f(T_z w)|_{w=0} \,.$$

Általában, ha $g(w)$ reguláris függvény, akkor a Laplace operátor láncszabálya

$$\Delta f(g(w)) = \Delta f \; |_{g(w)} \, |g'(w)|^2.$$

(Jó gyakorlat a z és $\overline{z}$ szerinti deriváltakkal való számolásra!)

A fejezet elején említett képlet szerint

$$|T_z'(0)| = \frac{1-|z|^2}{1-|0|^2},$$

ahonnan, a láncszabályt $g(w) = T_z w$-re alkalmazva,

$$Lf = \Delta f(T_z w) \; |_{w=0} = (1-|z|^2)^2 \Delta f(z) \overset{def}{=} D_1,$$

a körmodell hiperbolikus Laplace operátora.

Az összes $\Delta^\nu f(z)|_{z=0}$ $(0 \le \nu \le m/2)$ funkcionálnak megfelelő invariáns operátort lineárisan kombinálva megkapjuk az összes invariáns differenciál operátort, amelyek tehát $[m/2]+1$–dimenziós teret alkotnak. Bár az előbbiek nem azonosak a D_1^ν-kkel, a $\sum_{0 \le \nu \le m/2} c_\nu D_1^\nu$ alakúak összessége is, mint könnyű látni, $[m/2]+1$–dimenziós, és így kimerítik az összes invariáns differenciál operátort.[2]

[2] Ezt a "bizonyítást" Ruzsa Imrének köszönöm.

Ha a $w = U(z)\colon \{z\colon \Im z > 0\} \to \{w\colon |w| < 1\}$ segítségével áttérünk a félsíkmodellre, akkor D_1-nek

$$UD_1U^{-1}f = \underset{w}{D_1}(f(U^{-1}(w)), U(z)) = (1 - |w|^2)^2 \Delta f(U^{-1}(w))$$

felel meg, ami $|U'(z)| = (1 - |w|^2)/(2y)$ és a láncszabály alapján $= 4y^2 \Delta f(z)$.

$$D \stackrel{def}{=} y^2 \Delta f,$$

a félsíkmodell hiperbolikus Laplace operátora tehát generálja az invariáns differenciál operátorok gyűrűjét.

* * *

Bár a mozgatások csoportja most nem kommutatív, és az identitástól eltekintve egyik sem invariáns operátor, a következő állításhoz a valós esetben is csak a kommutativitás egy enyhe következménye, bizonyos szimmetria kellett.

Állítás. *Bármely két invariáns operátor felcserélhető,* $L_1L_2 = L_2L_1$.

Bizonyítás. Ugyanúgy, mint a valós esetben, invariáns operátorok szorzata is invariáns, továbbá $k_{1,2}(z, w)$ magfüggvényű integrál operátorok szorzata, L_1L_2 is integrál operátor

$$k(z, w) = \int_H k_1(z, s)k_2(s, w)\, d\sigma_s$$

magfüggvénnyel.

Rögzített z,w pár esetén legyen T a $[z, w]$ (nem–euklideszi) szakasz felező pontjára való középpontos tükrözés, amelyre tehát $Tz = w$, $Tw = z$. A magfüggvény invarianciája alapján

$$k(z, w) = k(Tz, Tw) = k(w, z):$$

a magfüggvény szimmetrikus. Ezt mind $k(z, w)$-re, mind $k_{1,2}(z, w)$-re felírva,

$$k(z, w) = \int_H k_1(w, s)k_2(s, z)\, d\sigma_s = \int_H k_1(s, w)k_2(z, s)\, d\sigma_s,$$

ahol a jobboldal L_2L_1 magfüggvénye, és ezzel bebizonyítottuk az állítást integrál operátorokra.

Legyen $k(u) > 0$ ($|u| < 1$), $k(u) = 0$ ($|u| \geq 1$), és

$$k_\delta(z, w) = c(\delta)k(\frac{d(z, w)}{\delta}),$$

ahol a $c(\delta)$ konstans úgy van meghatározva, hogy

$$\int_H k_\delta(z, w)\, d\sigma_w = 1$$

legyen. Ekkor

$$L_\delta f = \int_H k_\delta(z, w)f(w)\, d\sigma_w$$

invariáns integrál operátor, amelyre $L_\delta f \to f$ $(\delta \to 0)$.

Ha L tetszőleges invariáns operátor, akkor

$$LL_\delta f = \int_H \underset{z}{L}(k_\delta(z,w),z)f(w)\,d\sigma_w$$

már integrál operátor lesz, és mint két invariáns operátor szorzata, invariáns is. Tudjuk tehát, hogy

$$(L_1L_\delta)(L_2L_\delta) = (L_2L_\delta)(L_1L_\delta),$$

és $\delta \to 0$ adja az állítást.

Kiegészítés. Például a valós esetben a bizonyításban definiált T tükrözés — bár létezik — nem eleme a mozgatás csoportunknak.

(Az $x \to -x$ tükrözés mintájára) az általános esetben ezért Selberg felteszi, hogy található olyan izometrikus transzformáció, μ — esetleg nem eleme a csoportunknak — és bármely z, w pontpárhoz olyan T csoportbeli mozgatás, amelyre $Tz = \mu w$, $Tw = \mu z$; az ilyen teret nevezi gyengén szimmetrikusnak. (Az általunk használt kétszeres tranzitivitás fennállása esetén persze μ választható az identitásnak.) $k(z,w)$ szimmetriája helyett

$$k(z,w) = k(Tz,Tw) = k(\mu w, \mu z)$$

állítható, és a bizonyítás megfelelő lépése — változatlan végeredménnyel — így módosul:

$$\begin{aligned} k(z,w) &= \int_H k_1(\mu w, s)k_2(s,\mu z)\,d\sigma_s \\ &= \int_H k_1(\mu w, \mu s)k_2(\mu s, \mu z)\,d\sigma_s = \int_H k_1(s,w)k_2(z,s)\,d\sigma_s, \end{aligned}$$

ahol közben felhasználtuk, hogy μ mértéktartó.

A $k(z,w)$ magú L integrál operátor adjungáltjának, L^*-nak $\overline{k(w,z)}$ a magfüggvénye, a $k(z,w) = k(\mu w, \mu z)$ egyenlőség, mint könnyen látható, így azt jelenti, hogy $\mu^{-1}L^*\mu = \overline{L}$, és az integrál operátorok felcserélhetőségének bizonyításában tulajdonképpen ez történt:[3]

$$\overline{L}_1\overline{L}_2 = \mu^{-1}L_1^*\mu\mu^{-1}L_2^*\mu = \mu^{-1}L_1^*L_2^*\mu = \mu^{-1}(L_2L_1)^*\mu = \overline{L_2L_1}.$$

Invariáns operátorok sajátfüggvényei. $y^s = (\Im z)^s$ bármely rögzített komplex s mellett sajátfüggvénye $D = y^2\Delta$-nek, hiszen

$$\underset{z}{D}(y^s,z) = y^2\Delta y^s = y^2 s(s-1)y^{s-2} = \lambda y^s$$

$\lambda = s(s-1)$ sajátértékkel.

[3]Ezt a magyarázatot és a bizonyítás ezen egyszerűsített változatát Lempert Lászlónak köszönöm.

Ha L tetszőleges invariáns operátor, akkor a felcserélhetőség miatt

$$DLy^s = LDy^s = \lambda Ly^s,$$

másszóval Ly^s is sajátfüggvénye D-nek ugyanazon λ sajátértékkel. Ebből azonban most nem következik, hogy y^s L-nek is sajátfüggvénye, mert y^s még konstans szorzótól eltekintve sem az egyetlen λ sajátértékű sajátfüggvény: például minden $Ty^s = (\Im Tz)^s$ ilyen. Mi menthető az egyértelműségből?

Legyen $z_0 \in H$ rögzített, $T(\vartheta)$ a z_0 körüli, ϑ szöggel való forgatás és

$$f_0(z) = Mf = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(T(\vartheta)z)\,d\vartheta$$

a "középérték operátor". Minden τ-val

$$\begin{aligned} T(\tau)f_0(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(T(\vartheta)T(\tau)z)\,d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(T(\vartheta+\tau)z)\,d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(T(\vartheta)z)\,d\vartheta = f_0(z): \end{aligned}$$

$f_0(z)$ "forgásszimmetrikus".

D minden $T(\vartheta)$-val és így M-mel is felcserélhető, és ha $Df = \lambda f$, akkor

$$Df_0 = DMf = MDf = \lambda Mf = \lambda f_0$$

forgásszimmetrikus f_0-lal.

Állítás. *Minden komplex λ-hoz egyértelműen létezik forgásszimmetrikus $g(z)$, amelyre $Dg = \lambda g$ és $g(z_0) = 1$.*

Bizonyítás. A létezést

$$g(z) = \frac{f_0(z)}{f_0(z_0)}$$

bizonyítja az $f(z) = y^s$ választással, ha $\lambda = s(s-1)$, azaz $s = 1/2 + \sqrt{1/4+\lambda}$, felhasználva, hogy $f_0(z_0) = f(z_0) \neq 0$.

Az egyértelműséget kényelmesebb a körmodellben bizonyítani $z_0 = 0$-val, amikoris $g(z)$ forgásszimmetriája, $g(\varrho z) = g(z)$ $(|\varrho| = 1)$ azt jelenti, hogy $g(z) = g(r)$, ahol $z = re^{i\vartheta}$.

Polár koordinátákkal felírva

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \vartheta^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r},$$

tehát a sajátérték egyenlet:

$$D_1 g = (1-r^2)^2(g''(r) + \frac{1}{r}g'(r)) = \lambda g(r).$$

Ez így is írható:

$$(g'(r)r)' = \frac{\lambda g(r)r}{(1-r^2)^2}.$$

A differenciálegyenlet homogén lineáris, ezért azt kell megmutatnunk, hogy $g(0) = 0$ esetén $g(r) = 0$ $(0 \le r < 1)$.

Legyen

$$M(r) = \max_{0 \le u \le r} (g'(u)u)'.$$

Ekkor $0 \le u \le r$ esetén

$$|g'(u)u| \le M(r)u, \quad |g(u)| \le M(r)r,$$

az utolsó lépésben $g(0) = 0$-at is felhasználva. Az egyenlet szerint pedig

$$M(r) \le \frac{|\lambda| M(r) r^2}{(1-r^2)^2},$$

ami elég kis r-re csak úgy lehet, ha $M(r) = 0$. Ekkor $g'(r)r = c$, $g(r) = c \log r$ 0 környezetében, de a c konstans csak 0 lehet, különben $g(r)$ folytonos sem volna a 0-ban.

0-tól különböző r_0 pontban a kezdeti értékek, $g(r_0)$, $g'(r_0)$ egyértelműen meghatározzák a megoldást, — ennek a tételnek a bizonyítását ismételtük el az előbb az $r_0 = 0$ esetben $g'(r)$ együtthatójának, $1/r$-nek a 0-beli szingularitása miatt, — ezért valójában $g(r) \equiv 0$ és kész.

Hogyan függ $g(z) = g(z, z_0)$ z_0-tól? Legyen $Tz_0 = z_1$ és $g(z, z_1) = g_1(z)$.

Mivel $g_1(z)$ z_1 körül forgásszimmetrikus, $g_1(Tz)$ z_0 körül lesz az:

$$g_1(TT(\tau)z) = g_1(TT(\tau)T^{-1}Tz) = g_1(Tz),$$

hiszen $TT(\tau)T^{-1}$-nek z_1 fixpontja. Mivel $g_1(z)$ λ sajátértékű sajátfüggvény, $g_1(Tz)$ is az. Végül pedig $g_1(Tz_0) = g_1(z_1) = g(z_1, z_1) = 1$. E három tulajdonság egyértelműen jellemzi $g(z)$-t, tehát $g_1(Tz) = g(z)$, részletesen

$$g(Tz, z_1) = g(Tz, Tz_0) = g(z, z_0),$$

vagyis $g(z, z_0)$ úgy viselkedik a két változójában, mint invariáns integrál operátor magfüggvénye.

Láttuk korábban, hogy akkor tetszőleges invariáns operátorral, L-lel $h(z) = h(z, z_0) = \underset{z}{L}(g(z, z_0), z)$ — mint L és a $g(z, z_0)$ magfüggvénnyel definiált operátor szorzatának magfüggvénye — szintén úgy viselkedik. Speciálisan $h(z)$ forgásszimmetrikus z_0 körül. Azt is tudjuk, hogy $h(z)$, miután $g(z)$ is, λ sajátértékű sajátfüggvénye D-nek. Az egyértelműség miatt ekkor $h = Lg = \Lambda g$. Itt $g(z_0) = 1$ alapján $\Lambda = h(z_0) = h(z_0, z_0)$, ami így z_0-tól sem, csakis L-től és λ-tól függ.

Legyen végül f tetszőleges sajátfüggvény, $Df = \lambda f$. $f_0 = Mf$-re, ami már forgásszimmetrikus is z_0 körül, szintén $Df_0 = \lambda f_0$, tehát f_0 g konstans szorosa, és így f_0 is sajátfüggvénye L-nek ugyanazzal a sajátértékkel:

$$Lf_0 = \Lambda f_0.$$

Itt $f_0 = Mf$ és $Lf_0 = LMf = MLf$, tehát

$$MLf = \Lambda Mf,$$

és $z = z_0$-ban kiértékelve,

$$\underset{z}{L}(f(z), z_0) = \Lambda f(z_0).$$

Ez minden z_0-ra fennáll, Λ nem függ z_0-tól, tehát $Lf = \Lambda f$, és ezzel bebizonyítottuk a fejezet fő eredményét:

Tétel. *Ha f sajátfüggvénye D-nek, $Df = \lambda f$, és L invariáns operátor, akkor f L-nek is sajátfüggvénye, $Lf = \Lambda f$, ahol Λ csak L-től és λ-tól függ.*

Nagyon hasznos, hogy Λ f-től különben nem függ: f ismerete nélkül kiszámíthatjuk L-re vonatkozó sajátértékét, ha ismerjük D-nek akár csak egy, λ sajátértékű sajátfüggvényét.

Integrál operátor sajátértéke. Esetünkben ilyet ismerünk: y^s, ahol $\lambda = s(s-1)$, és számítsuk ki, mi lesz a Λ, ha

$$Lf = \int_H k(z,w) f(w)\, d\sigma_w, \quad k(z,w) = k\left(\frac{|z-w|^2}{yv}\right).$$

Tudjuk, hogy

$$\int_H k(z,w) v^s\, d\sigma_w = \Lambda y^s,$$

ahol $z = i$-t helyettesítve,

$$\begin{aligned}\Lambda = \int_H k(i,w) v^s\, d\sigma_w &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty k\left(\frac{|i-w|^2}{1\cdot v}\right) v^s \frac{du\,dv}{v^2} \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty k\left(\frac{u^2+(v-1)^2}{v}\right) v^{s-2}\, du\,dv.\end{aligned}$$

Legyen

$$t \overset{def}{=} \frac{(v-1)^2}{v} = v + \frac{1}{v} - 2.$$

Ekkor

$$\int_{-\infty}^\infty k\left(\frac{u^2+(v-1)^2}{v}\right) du = \int_{-\infty}^\infty k\left(\frac{u^2}{v}+t\right) du =$$

$$= 2\int_0^\infty k(\tau+t)\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{\tau}}\, d\tau = \sqrt{v}\int_0^\infty \frac{k(\tau+t)}{\sqrt{\tau}}\, d\tau \overset{def}{=} vg(\log v).$$

$$\Lambda = \int_0^\infty vg(\log v) v^{s-2}\, dv = \int_{-\infty}^\infty g(y) e^{sy}\, dy \overset{def}{=} G(s),$$

a Fourier integrál általánosítása, az úgynevezett Selberg transzformáció; itt $\lambda = s(s-1)$, $s = 1/2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\lambda}$.

A két s értéknek ugyanazt az eredményt kell adnia, $G(s) = G(1-s)$. Ez abból is látszik, hogy t v-ben és $1/v$-ben szimmetrikus lévén, a definíció szerint $e^y g(y) = g(-y)$. Ezen szimmetriáktól eltekintve a k, g, G függvények bármelyike előírható, és a másik kettő belőle egyszerű formulával kiszámítható.

Kiegészítés. A Selberg által tekintett általános analitikus sokaságokon hasonló a helyzet azzal a különbséggel, hogy az invariáns differenciál operátorok gyűrűjét nem egy, de véges sok elem generálja, és a sajátfüggvények szerepét ezen véges sok generátor közös sajátfüggvényei játszák. Ismerve egy ilyen sajátfüggvény sajátértékeit egyszerre mindegyik generátorra nézve, meghatározhatók az integrál operátorokra vonatkozó sajátértékek is.

Diszkrét részcsoportok

A mozgatások Γ részcsoportját diszkrétnek mondjuk, ha rögzített $z \in H$-ra a $\{\gamma z \colon \gamma \in \Gamma\}$ halmaz nem torlódik H-ban.

Két pont, z_1 és z_2 ekvivalens (mod Γ), ha van $\gamma \in \Gamma$, amelyre $\gamma z_1 = z_2$. Az ekvivalencia osztályok halmazát R-rel jelöljük.

A $\mathfrak{D} \subset H$ halmaz fundamentális tartomány, ha minden ekvivalencia osztályból pontosan egy elemet tartalmaz. Másszóval, ha a $\gamma\mathfrak{D}$ ($\gamma \in \Gamma$) halmazok H diszjunkt partícióját alkotják.

A valós tengelyen $\Gamma = \{T_n\}$ esetében $\mathfrak{D} = [0,1)$ választható fundamentális tartománynak. A két ekvivalens végpontot összeragasztva R topológiailag körvonal lesz. Az euklideszi síkon tipikus diszkrét csoport $\Gamma = \{z + n\omega_1 + m\omega_2 \colon n, m \text{ egész}\}$ ($\Im\omega_1/\omega_2 \neq 0$). $\mathfrak{D}$-nek választható a megfelelő rácsparallelogramma. A szemközti ekvivalens oldalakat összeragasztva R topológiailag tórusz lesz.

E példák mintájára tegyük fel, hogy Γ fixpontmentes, (azaz az identitás kivételével elemeinek nincs fixpontja), — amit hallgatólagosan már a fundamentális tartomány szigorú értelmezésével is feltettünk, — és hogy van "kompakt", (azaz nem–euklideszi értelemben korlátos) fundamentális tartománya.

$\mathfrak{D}$ ekkor választható (nem-euklideszi) sokszögnek, amelynek oldalai páronként ekvivalensek. Az ekvivalenseket összeragasztva R topológiailag gömb lesz véges sok füllel. Ezek a kompakt, "zárt" Riemann felületek. A fülek száma, a Riemann felület neme, amit q-val fogunk jelölni, itt > 1: $q = 1$, azaz tórusz csak az euklideszi síkon fordulhat elő.

R örökli H metrikáját és mértékét; R mértéke, $\sigma(\mathfrak{D}) = 4\pi(q-1)$ véges. A $H \to R$ leképezés, amely $z \in H$-hoz az ekvivalencia osztályát rendeli hozzá, lokálisan kölcsönösen egyértelmű, R úgynevezett univerzális fedése.

Az $f(z)$ ($z \in H$) függvényt automorfnak mondjuk Γ-ra nézve, ha $f(\gamma z) = f(z)$ ($\gamma \in \Gamma$). Másszóval f ekvivalens pontokban egyforma értéket vesz fel, azaz az R Riemann felületen értelmezett függvény.

Mostantól kezdve H-n értelmezett függvényen mindig automorfat értünk. Invariáns operátor automorf függvényből automorfat csinál: $\gamma L f = L\gamma f = Lf$, tehát L valóban R-en hat. Ezen függvények közül is az $\mathfrak{L}_2(R, d\sigma) = \mathfrak{L}_2(\mathfrak{D}, d\sigma)$-beliekre szorítkozunk. A skalár szorzatot, önadjungáltságot is ebben a térben értjük.

D spektrál felbontása. Ebben az értelemben D önadjungált, sőt negatív operátor.

A Green-formulát ugyanis a sokszögnek képzelt $\mathfrak{D}$-re felírva,

$$\begin{aligned}(Df,g) &= \int_{\mathfrak{D}} Df\cdot\overline{g}\,d\sigma_z = \int\int_{\mathfrak{D}} y^2\Delta f\cdot\overline{g}\,\frac{dx\,dy}{y^2}\\ &= \int_{\partial\mathfrak{D}}\frac{\partial f}{\partial n}\overline{g}\,ds - \int\int_{\mathfrak{D}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\overline{g}}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\overline{g}}{\partial y}\right)dx\,dy,\end{aligned}$$

ahol $\partial/\partial n$ a külső normális szerinti deriváltat jelenti, ds az ívhossz elem.

A vonalintegrál eltűnik: ha ℓ és $\gamma\ell$ ($\gamma\in\Gamma$) két ekvivalens oldala $\mathfrak{D}$-nek, akkor $f(\gamma z)=f(z)$ alapján

$$\frac{\partial f}{\partial n}(\gamma z)|\gamma'(z)| = -\frac{\partial f}{\partial n}(z),$$

$$\int_{\gamma\ell}\frac{\partial f}{\partial n}(z)\overline{g(z)}\,ds = \int_{\ell}\frac{\partial f}{\partial n}(\gamma z)\overline{g(\gamma z)}|\gamma'(z)|\,ds = -\int_{\ell}\frac{\partial f}{\partial n}(z)\overline{g(z)}\,ds,$$

és az oldalakon vett integrálok páronként kiejtik egymást.

Innen látjuk, hogy valóban $(Df,g)=\overline{(Dg,f)}$, és hogy ez ≤ 0 $g=f$ esetén.

Mi a D operátor képtere? g erre akkor és csak akkor merőleges, ha minden f-re

$$(Df,g)=(f,Dg)=0,$$

tehát, ha $Dg\equiv 0$, azaz g harmonikus, de akkor a maximum elv szerint konstans. A képtér lezárása tehát az

$$\mathfrak{L}_2^0 \overset{def}{=} \{f\in\mathfrak{L}_2\colon \int_{\mathfrak{D}} f\,d\sigma = 0\}$$

függvénytér.

(Mivel nem tudjuk előre, hogy g síma függvény, amelyre D alkalmazható, precízebben — egy korábbi jelöléssel — azt kellett volna mondani, hogy

$$(DL_\delta f,g)=(L_\delta Df,g)=(Df,\overline{L}_\delta g)=(f,D\overline{L}_\delta g)=0$$

$$\Rightarrow D\overline{L}_\delta g\equiv 0 \Rightarrow \overline{L}_\delta g \text{ harmonikus} \Rightarrow L_\delta g \text{ konstans} \overset{\delta\to 0}{\Rightarrow} g \text{ konstans.})$$

Ha D-t is $\mathfrak{L}_2^0$-ra korlátozzuk, akkor $Df\equiv 0\Rightarrow f\equiv 0$, D tehát "invertálható" e téren. Az inverz

$$\int_{\mathfrak{D}} G(z,w)f(w)\,d\sigma_w$$

alakú integrál operátor.

Ha például $G(z,w)$ mindkét változójában automorf, w-ben z és egy rögzített z_0 (és a velük ekvivalens pontok) kivételével harmonikus, és

$$G(z,w)=\begin{cases}-\log|w-z|+O(1) & (w\to z),\\ \log|w-z_0|+O(1) & (w\to z_0),\end{cases}$$

akkor ezt az integrál operátort Df-re alkalmazva $f(z)-f(z_0)$-at adja vissza, mint az a Green formula segítségével egyszerűen bizonyítható $\mathfrak{D}$-ből z és z_0 körül kis köröket kihagyva, amikoris a normális szerinti deriváltnak a kis körökön vett vonalintegrálja fogja határértékben $f(z)$-t, illetve $f(z_0)$-at reprodukálni. Az integrál operátor tehát konstanstól eltekintve valóban invertálja D-t. Ilyen $G(z,w)$ függvény a harmonikus függvények klasszikus kostrukciós módszereivel nyerhető.

Az integrál operátor szintén negatív, és mivel G-nek csak logaritmikus szingularitásai vannak, Hilbert–Schmidt típusú. Az ilyen operátorok általános elmélete szerint a normált sajátfüggvények, $\{f_j(z)\}_{j=1}^{\infty}$ teljes ortonormált rendszert alkotnak $\mathfrak{L}_2^0$-ban; a sajátértékek 0-hoz tartanak és minden 0-tól különböző sajátérték sajátaltere véges dimenziós. Operátorunk invertálható, tehát a 0 nem lehet sajátérték. Visszatérve D-re összefoglalhatjuk e klasszikus spektrálelmélet eredményét:

$Df_j = \lambda_j f_j$, $0 > \lambda_j \to -\infty$, és hozzávéve $\lambda_0 = 0$-t és $f_0 \equiv (\sigma(\mathfrak{D})^{-1/2}$-t, $\{f_j(z)\}_{j=0}^{\infty}$ teljes ortonormált rendszert alkot $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{D}, d\sigma)$-ban.

Integrál operátor spektrál felbontása. Integrál operátort automorf függvényre alkalmazva

$$
\begin{aligned}
Lf &= \int_H k(z,w) f(w) d\sigma_w = \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_{\gamma\mathfrak{D}} k(z,w) f(w) d\sigma_w \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_{\mathfrak{D}} k(z,\gamma w) f(\gamma w) d\sigma_w = \int_{\mathfrak{D}} K(z,w) f(w) d\sigma_w,
\end{aligned}
$$

ahol

$$
K(z,w) = \sum_{\gamma\in\Gamma} k(z,\gamma w).
$$

$K(z,w)$ mint mindkét változójában automorf függvény kifejthető az ilyen függvények terében teljes $\{f_i(z)\overline{f}_j(z)\}_{i,j=0}^{\infty}$ ortonormált rendszer szerint. Ugyanúgy, ahogy a valós esetben, a kifejtés így néz ki:

$$
K(z,w) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_j f_j(z) \overline{f_j(w)},
$$

ahol $Lf_j = \Lambda_j f_j$.

Az operátor nyoma

$$
\int_{\mathfrak{D}} K(z,z) d\sigma_z = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_j \int_{\mathfrak{D}} |f_j(z)|^2 \, d\sigma_z = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_j,
$$

azaz

$$
\int_{\mathfrak{D}} \sum_{\gamma\in\Gamma} k(z,\gamma z) d\sigma = \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_{\mathfrak{D}} k(z,\gamma z) d\sigma = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_j.
$$

A nyomformula

$k(z,\gamma z)$ megfelelője a valós esetben konstans volt, ezért a baloldalt tovább alakítjuk.

Általánosabban, mikor lesz $k(w, \gamma_0 w) = k(z, \gamma z)$? Ha $w = Tz$, akkor

$$k(w, \gamma_0 w) = k(Tz, \gamma_0 Tz) = k(z, T^{-1}\gamma_0 Tz),$$

tehát akkor biztosan, ha $\gamma = T^{-1}\gamma_0 T$, vagyis, ha γ és γ_0 egymásnak T általi konjugáltjai. (Ha $\gamma = \gamma_0$, akkor ez azt jelenti, hogy γ_0 és T felcserélhetőek, mint a valós esetben mindig, ami most azonban ritkaság.)

Összegezzünk ezért külön–külön az egyes konjugált osztályokra! γ_0 konjugált osztályát jelölje $\{\gamma_0\}$. A konjugáló elem legyen g: $\gamma = g^{-1}\gamma_0 g$. (Itt $g \in \Gamma$ lesz, bár az előbbi megjegyzéshez ez nem szükséges.) Ha két ilyen megegyezik,

$$g_1^{-1}\gamma_0 g_1 = g^{-1}\gamma_0 g, \quad g g_1^{-1}\gamma_0 = \gamma_0 g g_1^{-1},$$

az azt jelenti, hogy $g g_1^{-1} \in [\gamma_0] \overset{def}{=}$ a γ_0-lal felcserélhető elemek részcsoportja Γ-ban. Tehát általában

$$\sum_{\gamma \in \{\gamma_0\}} = \sum_{g \in \Gamma/[\gamma_0]},$$

ahol $\gamma = g^{-1}\gamma_0 g$, és a második összegben g a $[\gamma_0]$ szerinti jobboldali (baloldali?) mellékosztályok egy–egy reprezentánsán fut végig.

$\gamma \in \{\gamma_0\}$ esetén

$$\int_{\mathfrak{D}} k(z, \gamma z)\, d\sigma = \int_{\mathfrak{D}} k(z, g^{-1}\gamma_0 g z) d\sigma = \int_{\mathfrak{D}} k(gz, \gamma_0 g z)\, d\sigma = \int_{g\mathfrak{D}} k(z, \gamma_0 z)\, d\sigma,$$

$$\sum_{\gamma \in \{\gamma_0\}} \int_{\mathfrak{D}} k(z, \gamma z)\, d\sigma = \sum_{g \in \Gamma/[\gamma_0]} \int_{g\mathfrak{D}} k(z, \gamma_0 z)\, d\sigma = \int_{\mathfrak{D}(\gamma_0)} k(z, \gamma_0 z)\, d\sigma,$$

ahol

$$\mathfrak{D}(\gamma_0) = \bigcup_{g \in \Gamma/[\gamma_0]} g\mathfrak{D}.$$

Ha az itt szereplő g reprezentáns elemeket balról végigszorozzuk $[\gamma_0]$ elemeivel, akkor megkapjuk Γ elemeit, mindegyiket pontosan egyszer. Másszóval a $\gamma\mathfrak{D}(\gamma_0)$ ($\gamma \in [\gamma_0]$) halmazok H diszjunkt partícióját alkotják, tehát $\mathfrak{D}(\gamma_0)$ a $[\gamma_0]$ diszkrét részcsoport fundamentális tartománya.

Összefoglalva,

$$\sum_{\gamma \in \{\gamma_0\}} \int_{\mathfrak{D}} k(z, \gamma z)\, d\sigma = \int_{\mathfrak{D}(\gamma_0)} k(z, \gamma_0 z)\, d\sigma.$$

Korábbról tudjuk, hogy $k(z, \gamma_0 z)$ automorf $[\gamma_0]$-ra nézve, így igazából mindegy, hogy $[\gamma_0]$ melyik fundamentális tartományát választjuk $\mathfrak{D}(\gamma_0)$-ként.

* * *

A mozgatásokról. Az identitástól különböző mozgatásnak egy vagy két fixpontja van. Ha csak egy van, akkor az valós vagy a ∞; ezek a parabolikus transzformációk. Ha van fixpont H-ban, akkor a konjugáltja a másik fixpont; ezek az elliptikus transzformációk. A többinek két különböző, valós vagy ∞ fixpontja van; ezek a hiperbolikus transzformációk.

A fixpontmentességgel kizártuk, hogy Γ-nak elliptikus eleme lehessen. Parabolikus sem lehet, ha $\mathfrak{D}$ kompakt. Ha ugyanis T, esetleg $\notin \Gamma$, a ∞-t átviszi γ egyetlen fixpontjába, akkor $T^{-1}\gamma T$-nek a ∞ az egyetlen fixpontja, ami csak (euklideszi) eltolás lehet. Nagy valós részű pontot ilyen eltolás közeli pontba visz, és visszatérve γ-ra, majd a megfelelő pontot Γ-beli mozgatással $\mathfrak{D}$-be vive látjuk, hogy létezik parabolikus $\gamma_n \in \Gamma$ és $z_n \to z_0 \in \mathfrak{D}$ úgy, hogy $d(z_n, \gamma_n z_n) \to 0$. Ekkor $0 < d(z_0, \gamma_n z_0) \to 0$, ami ellentmond Γ diszkrétségének.

$\gamma \in \Gamma$ tehát csak hiperbolikus lehet. Ha T, esetleg $\notin \Gamma$, 0-t és ∞-t átviszi γ két fixpontjába, akkor $T^{-1}\gamma T$-nek 0 és ∞ lesz a két fixpontja, és így ϱz ($\varrho > 0$) alakú, ahol — 0-t és ∞-t esetleg felcserélve — feltehetjük, hogy $\varrho > 1$. ϱ-t γ, sőt $\{\gamma\}$ egyértelműen meghatározza, és γ és $\{\gamma\}$ normájának nevezzük: $\varrho = N(\gamma) = N(\{\gamma\})$.

Két mozgatás akkor és csak akkor cserélhető fel, ha fixpontjaik megegyeznek. A γ_0-lal felcserélhető mozgatásokhoz tehát ugyanaz a T választható és látjuk, hogy ezek csoportja a $\varrho > 0$ számok multiplikatív csoportjával izomorf. $[\gamma_0]$ mint a γ_0-lal felcserélhető mozgatások diszkrét részcsoportja ezért végtelen ciklikus. Legyen γ^* ennek egy generátora: $[\gamma_0] = \{\gamma^{*l}\}_{l=-\infty}^{\infty}$. γ^*-ot primitív elemnek, $\{\gamma^*\}$-ot primitív konjugált osztálynak hívjuk. Ha előírjuk, hogy $\gamma_0 = \gamma^{*m}$ $m > 0$-val, akkor γ_0 egyértelműen meghatározza γ^*-ot. Legyen $\varrho^* = N(\gamma^*)$.

* * *

$$\int_{\mathfrak{D}(\gamma_0)} k(z, \gamma_0 z)\, d\sigma = \int_{\mathfrak{D}(\gamma_0)} k(T^{-1}z, T^{-1}\gamma_0 z)\, d\sigma = \int_{T^{-1}\mathfrak{D}(\gamma_0)} k(z, T^{-1}\gamma_0 T z)\, d\sigma$$
$$= \int_{T^{-1}\mathfrak{D}(\gamma_0)} k(z, \varrho_0 z)\, d\sigma,$$

ahol $\varrho_0 = N(\gamma_0)$.

$T^{-1}\mathfrak{D}(\gamma_0)$ a $T^{-1}[\gamma_0]T = \{\varrho^{*l} z\}_{l=-\infty}^{\infty}$ csoport fundamentális tartománya, éspedig tetszőleges fundamentális tartománya lehet; választhatjuk a $\{z = re^{i\vartheta} \colon 1 \le r < \varrho^*,\ 0 < \vartheta < \pi\}$ félgyűrűnek. Azt is tudjuk előre, hogy $k(z, \varrho_0 z)$ a $\varrho_0 z$ transzformációval felcserélhető ϱz transzformációkra nézve invariáns, vagyis minden sugár mentén konstans.

$$\int_{T^{-1}\mathfrak{D}(\gamma_0)} k(z, \varrho_0 z)\, d\sigma = \int_0^\pi \int_1^{\varrho^*} k(z, \varrho_0 z) \frac{r\, dr\, d\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} = \int_0^\pi k(e^{i\vartheta}, \varrho_0 e^{i\vartheta}) \frac{\log \varrho^*}{\sin^2 \vartheta}\, d\vartheta =$$
$$= 2 \int_0^{\pi/2} k\left(\frac{|e^{i\vartheta} - \varrho_0 e^{i\vartheta}|^2}{\sin \vartheta \cdot \varrho_0 \sin \vartheta} \right) \frac{\log \varrho^*}{\sin^2 \vartheta}\, d\vartheta = 2 \log \varrho^* \int_0^{\pi/2} k\left(\frac{(\varrho_0 - 1)^2}{\varrho_0 \sin^2 \vartheta} \right) \frac{d\vartheta}{\sin^2 \vartheta}.$$

Ez a $t = (\varrho_0 - 1)^2/\varrho_0 = \varrho_0 + 1/\varrho_0 - 2$ és $\tau = t/\sin^2 \vartheta$, azaz $\vartheta = \arcsin \sqrt{t/\tau}$ helyettesítéssel

$$= 2 \log \varrho^* \int_t^\infty k(\tau) \frac{\tau}{t} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{t}{\tau}}} \frac{\sqrt{t}}{2\tau^{3/2}}\, d\tau = \frac{\log \varrho^*}{\sqrt{t}} \int_t^\infty \frac{k(\tau)}{\sqrt{\tau - t}}\, d\tau =$$

$$= \frac{\log \varrho^*}{\sqrt{t}} \int_0^\infty \frac{k(\tau + t)}{\sqrt{\tau}}\, d\tau = \frac{\log \varrho^*}{\sqrt{t}} \sqrt{\varrho_0} g(\log \varrho_0) = \frac{\log \varrho^*}{\frac{\varrho_0 - 1}{\sqrt{\varrho_0}}} \sqrt{\varrho_0} g(\log \varrho_0) =$$

$$= \frac{\log \varrho^*}{1 - \frac{1}{\varrho_0}} g(\log \varrho_0)$$

g korábbi definíciója szerint.

Összefoglalva,

$$\sum_{\gamma \in \{\gamma_0\}} \int_{\mathfrak{D}} k(z, \gamma z)\, d\sigma = \frac{\log N(\gamma^*)}{1 - \frac{1}{N(\gamma_0)}} g(\log N(\gamma_0)).$$

(Ez lett végül az eredetileg semmitmondó összegből!)

Az identitást tartalmazó egyelemű konjugált osztályt külön kell kezelnünk:

$$\int_{\mathfrak{D}} k(z, z)\, d\sigma = k(0)\sigma(\mathfrak{D}) = \frac{q-1}{\pi i} \int_{(\alpha)} (1 - 2s) \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) G(s)\, ds$$

G korábbi definíciója szerint hosszabb, de számunkra kevésbé érdekes számolással; itt (α) az α valós részű függőleges egyenest jelenti, $\alpha > 0$.

A korábbi nyomformulánk,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\mathfrak{D}} k(z, \gamma z) d\sigma = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_j$$

tehát így alakul:

$$\frac{q-1}{\pi i} \int_{(\alpha)} (1 - 2s) \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) G(s)\, ds + \sum_{\{\gamma_0\}} \frac{\log N(\{\gamma^*\})}{1 - \frac{1}{N(\{\gamma_0\})}} g(\log N(\{\gamma_0\})) = \sum_{j=0}^{\infty} G(s_j).$$

Itt

$$G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{sy}\, dy,$$

$$s_j = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda_j},$$

(csak az egyik négyzetgyök veendő), ahol $\lambda_0 = 0$, $\lambda_j < 0$ $(j = 1, \ldots)$ D sajátértékei multiplicitással véve,

$\{\gamma_0\}$ az identitást nem tartalmazó konjugált osztályokon fut végig, $\{\gamma^*\}$ a megfelelő primitív osztály, (γ^* definiálható például γ_0 legnagyobb kitevőjű, Γ-beli gyökeként,)

$N(\ )$ a norma,

q a Riemann felület neme.

Ez a híres Selberg–féle nyomformula a legegyszerűbb esetben.

Kiegészítés. Csak kényelmi szempontból zártuk ki az elliptikus transzformációkat. Ha $\mathfrak{D}$ kompaktságát sem követeljük meg, akkor $\sigma(\mathfrak{D}) < \infty$ esetén Γ még viszonylag egyszerű, végesen generált, de már megjelennek parabolikus elemek, D spektruma pedig már nem tisztán diszkrét, folytonos része is van. A $\sigma(\mathfrak{D}) = \infty$ esete lényegesen más, (Patterson).

A Selberg–féle ζ–függvény

A formula emlékeztette Selberget a

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\Re s > 1),$$

a Riemann–féle ζ–függvény elméletében ismert és használt képletekre.

Az Euler–féle szorzat–előállítás,

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots\right) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

logaritmikus differenciálásával

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

ahol $\Lambda(n) = \log p$, ha n a p prím hatványa és 0, ha n nem prímhatvány.

A $G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{sy}\,dy$ jelölést megtartva, a teljes hasonlóság érdekében legyen itt is $e^y g(y) = g(-y)$, $G(s) = G(1-s)$. Tegyük fel, hogy $G(s)$ reguláris a $-\epsilon \leq \Re s \leq 1+\epsilon$ sávban, és a ∞-ben kellő rendben eltűnik; ez a valódi feltétele a nyomformula fennállásának is. Egy "Weil–féle explicit formula" erre az esetre így néz ki:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) g(\log n) = G(1) - \frac{1}{2}{\sum_{\varrho}}' G(\varrho) + \frac{1}{4\pi i}\int_{(\alpha)} \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}\right) - \log \pi\right) G(s)\,ds,$$

ahol a jobboldali összegben ϱ a ζ–függvény $0 < \Re\varrho < 1$ sávba eső gyökein, vagyis $\zeta'/\zeta(s)$ pólusain, az úgynevezett nem–triviális gyökökön fut végig, és az integrál felel meg a többi, a negatív páros egész helyeken levő, úgynevezett triviális gyöknek; $0 < \alpha < 1$. (Bizonyítás: A baloldal

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{(1+\epsilon)} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) G(s)\,ds.$$

A Reziduum–tétellel áttoljuk az integrációs utat $(-\epsilon)$-ra, majd $\zeta(s)$ és $G(s)$ függvény egyenletét felhasználva — mindegyik az s és $1-s$ helyen felvett értékek között teremt kapcsolatot — visszaírjuk $(1+\epsilon)$-on vett integrállá, amikor ismét megjelenik a baloldalt kifejező integrál.)

A nyomformulában n-nek $N(\{\gamma_0\})$, $\Lambda(n)$-nek $\log N(\{\gamma^*\})/(1 - 1/N(\{\gamma_0\})$ felel meg. Vezessük be ezért a

$$\sum_{\{\gamma_0\}} \frac{\log N(\{\gamma^*\})}{1 - \frac{1}{N(\{\gamma_0\})}} \cdot \frac{1}{N(\{\gamma_0\})^s}$$

Dirichlet sort.

A primitív konjugált osztályokra összegezve ez így írható:

$$\sum_{\{\gamma^*\}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\log N(\{\gamma^*\})}{1-\frac{1}{N(\{\gamma^*\})^l}}\cdot\frac{1}{N(\{\gamma^*\})^{ls}}=\sum_{\{\gamma^*\}}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\log N(\{\gamma^*\})}{N(\{\gamma^*\})^{l\nu}N(\{\gamma^*\})^{ls}}=$$

$$=-\left(\sum_{\{\gamma^*\}}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{lN(\{\gamma^*\})^{l\nu}N(\{\gamma^*\})^{ls}}\right)'=\left(\sum_{\{\gamma^*\}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\log(1-\frac{1}{N(\{\gamma^*\})^{\nu+s}})\right)'=$$

$$=\left(\log\prod_{\{\gamma^*\}}\prod_{\nu=0}^{\infty}(1-\frac{1}{N(\{\gamma^*\})^{\nu+s}})\right)'=\frac{Z'}{Z}(s),$$

ahol

$$Z(s)=\prod_{\{\gamma^*\}}\prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{N(\{\gamma^*\})^{\nu+s}}\right)$$

a Selberg–féle ζ–függvény.

A Selberg és a Weil formula analógiájából "leolvasható", hogy $Z(s)$-nek az s_j-kben gyöke van; itt $s_j=1/2+\sqrt{1/4+\lambda_j}$-nek mind a két értékével számolunk, amikoris a nyomformula jobboldalán levő összeg is 1/2 szorzót kap. A negatív előjel hiánya miatt $s_0=1$ és 0 is gyök! Mivel $0>\lambda_j\to-\infty$ $(0<j\to\infty)$, véges sok gyök eshet az $[1/2,1)$ intervallumba, — ismeretes, hogy ilyenek nagy számban elő is fordulnak nagy q esetén, — de a többire igaz a "Riemann sejtés", $\Re s_j=1/2$. Az $\int_{(\alpha)}\dots$ tag jelent még "triviális gyököket" a negatív egész helyeken.

$Z(s)$-et és $Z(1-s)$-et a $\zeta(s)$-éhez hasonló függvényegyenlet kapcsolja össze abból adódóan, hogy $\lambda=s(s-1)$ s-ben és $(1-s)$-ben szimmetrikus.

$Z(s)$ ezen tulajdonságai révén ugyanannyi információt tartalmaz, mint maga a nyomformula.

Alkalmazások

Konjugált osztályok "Prímszámtétele".

Ahogy a Riemann–féle ζ–függvényből a prímszámtétel, úgy vezethető le $Z(s)$-ből a

$$\sum_{N(\{\gamma^*\})\le x}1=\mathcal{L}ix+\sum_{-1/4<\lambda_j<0}\mathcal{L}ix^{s_j}+O(x^{3/4})$$

aszimptotika, ahol

$$\mathcal{L}ix=\int_2^x\frac{du}{\log u}.$$

A 3/4 kitevő — a ma ismert legjobb(?) — a "Riemann sejtés" teljesülése ellenére sem 1/2, aminél persze jobb nem lehet. (Elsőként Huber bizonyította a $Z(s)$-hez hasonló függvény segítségével szintén a Laplace operátor sajátfüggvényei szerinti sorfejtéssel, a nyomformulát nem ismerve.)

Geometriai jelentés.

A Γ csoport magán az R Riemann felületen is felismerhető: izomorf a fundamentális csoportjával, azaz r_0 rögzített pontjából induló és oda visszatérő zárt ℓ görbék homotópia osztályainak csoportjával, amelyben a görbék összefűzése a művelet. A megfeleltetés: r_0-nak az univerzális fedés szerinti egyik ősképét, z_0-at lerögzítve, folytassuk — nyomjuk fel H–ra — ℓ-et z_0-ból kiindulva; ha ez z_1-ben végződik, akkor rendeljük ℓ-hez azt a $\gamma \in \Gamma$ elemet, amelyre $\gamma z_0 = z_1$.

Γ konjugált osztályainak a szabad homotópia osztályok felelnek meg: Két zárt görbe akkor homotóp ebben az értelemben, ha az egyik a másikba deformálható minden pontját szabadon mozgatva; a megfeleltetés ℓ és γ osztályai között ugyanaz mint az előbb, ℓ-nek tetszőleges z_0 pontját kezdőpontként kijelölve.

Minden szabad homotópia osztályt mérhetünk legrövidebb görbéjének hosszával. Ha $\{\gamma_0\}$ a megfelelő konjugált osztály, akkor ez a hossz

$$\min_{\gamma \in \{\gamma_0\}} \min_{z \in H} d(z, \gamma z).$$

A belső minimum valójában független $\gamma \in \{\gamma_0\}$-tól, sőt γ_0-at tetszőleges, nem feltétlenül Γ-beli T mozgatással konjugálva,

$$d(z, T^{-1}\gamma_0 T z) = d(Tz, \gamma_0 T z),$$

ahonnan

$$\min_{z \in H} d(z, T^{-1}\gamma_0 T z) = \min_{z \in H} d(z, \gamma_0 z).$$

E konjugáltként a $\varrho_0 z$ transzformációt választva, ahol ϱ_0 γ_0 normája, a minimum

$$= \min_{z \in H} d(z, \varrho_0 z) = \int_1^{\varrho_0} \frac{dy}{y} = \log \varrho_0 = \log N(\{\gamma_0\}),$$

mint könnyű ellenőrizni. A minimumot adó görbe H-n az $[i, \varrho_0 i]$ szakasz, egy geodetikus vonal. R-en ennek zárt geodetikus felel meg, minden szabad homotópia osztályban pontosan egy. "Prímszámtételünk" másszóval a zárt geodetikusok hosszainak eloszlását írja le. Primitív konjugált osztálynak egyszer, nem primitívnek többször körüljárt zárt geodetikus felel meg.

Hiperbolikus körprobléma.

Ugyanígy mérhetjük a közönséges homotópia osztályokat is a bennük levő görbék minimális hosszával. Ha a leírt megfeleltetés a homotópia osztályhoz γ-t rendeli hozzá, akkor ez a minimális hossz $d(z_0, \gamma z_0)$.

Mindjárt általánosabban vizsgálhatjuk $d(z, \gamma w)$ eloszlását. Az euklideszi eset mintájára a γw $(\gamma \in \Gamma)$ pontok nevezhetők hiperbolikus rácspontoknak, és

$$\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ d(z, \gamma w) < r}} 1$$

e rácspontok száma a z középpontú, r sugarú körben.

Ha $k(z,w)$ a $\{z,w\colon\ d(z,w)<r\}$ halmaz indikátor függvénye, akkor ez a szám nem más, mint

$$K(z,w)=\sum_{\gamma\in\Gamma}k(z,w).$$

Korábbi sorfejtésünk szerint

$$K(z,w)=\sum_{j=0}^{\infty}\Lambda_j f_j(z)\overline{f_j(w)}.$$

Ennek kezeléséhez λ_j-n és Λ_j-n kívül a sajátfüggvényekről is szükség van információra.

$j=0$ a főtag, az r sugarú kör területe osztva a fundamentális tartomány területével, mint várható. $-1/4<\lambda_j<0$ ad további, hatványrendben kisebb, z-től és w-től függő együtthatójú tagokat; a maradékra ismert legjobb(?) becslés itt is a főtag 3/4-ik hatványa. (Huber eredménye.)

Míg az euklideszi körproblémában elemi geometriai megfontolás már jó aszimptotikát ad, amennyiben a hibatagot a kör kerületével becsüli, itt az használhatatlan, mert nem–euklideszi nagy kör területe és kerülete egyforma nagyságrendű.

Sajátértékek eloszlása.

A nyomformulát visszafelé olvasva, a benne szereplő függvények alkalmas választásával, — amikoris éppen fordítva, a baloldal egyetlen tagja, a γ =identitásnak megfelelő játszik csak szerepet, — a λ_j sajátértékek eloszlására lehet következtetni.

Az aszimptotika, Weyl tétele klasszikus eredmény síkbeli tartományokra, de Riemann felületekre is általánosították. A Selberg formula segítségével bizonyítható, hogy

$$\sum_{-\lambda_j<x}1=\frac{\sigma(\mathfrak{D})}{4\pi}x+O(\sqrt{x}).$$

Még az sincs kizárva, hogy a hibatag $O(x^{\epsilon})$.

A sajátérték spektrum, a $\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty}$ sorozat egyértelműen meghatározza a zárt geodetikusok hossz, illetve a konjugált osztályok norma spektrumát, az

$$\{N(\{\gamma\})\}_{\{\gamma\}}$$

sorozatot és viszont. De van két nem konform és nem antikonform ekvivalens zárt Riemann felület, — csoportelméletileg kifejezve két, a (tengelyes tükrözést is tartalmazó) teljes izometria csoportra nézve nem konjugált diszkrét csoport, — amelyek spektrumai megegyeznek!

IRODALOM

Az első cikk a témában:

Selberg, A.: Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, Journal of the Indian Mathematical Society 20 (1956), 47–87.

Ismertető cikk részletes irodalommal:

Elstrodt, J.: Die Selbergsche Spurformel für kompakte Riemannsche Flächen, Jahresbericht der Deutschen Mathematischen Vereinigung 83 (1981), 45–77.