Feladatok

Az első két feladatot V.I. Arnol'dnak a Magyar Tudomány 1998 októberi (10.) számában az 1247–1251. oldalon Kersner Róbert fordításában megjelent “A matematika tanításáról” című cikke motiválta.

1. Milyen felületet ír le a $2xz = y^2$ egyenlet?
2. Egy az $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + fxz + gyz = 0$ egyenlettel meghatározott másodfokú polinom null-helyei által meghatározott felület mikor tartalmaz egyeneseket?
3. Ha két egyforma átmérőjű golyó csúszás nélkül legurul ugyanazon a lejtón, az egyik golyó tömör homogén, a másik belül üres, akkor melyik golyó ér le előbb a lejtő aljára?

   Tekintsük az elöző feladat következő általánosítását

4. Hogyan lehet kiszámítani azt, hogy egy golyó mennyi idő alatt gurul le egy sima (de nem feltétlenül állandó szögű) lejtőn? Hogyan lehet felírni a megfelelő differenciálegyenletet?

   E feladat lényeges része az, hogy egy csúszás nélküli gurulás pályáját hogyan lehet átírni egy álló koordinátarendszerbe, (egy inerciarendszerbe). Ez a tartalma a következő feladatnak.

5. Tekintsük egy R sugarú körlap $\omega(t)$ szögsebességgel történő csúszás nélküli forgását egy sima $y = a(x)$ egyenlettel definiált lejtőn. Azaz tekintsünk egy olyan mozgást, melyben a körlap $R\omega(t)\,dt$ utat tesz meg a lejtőn a $[t, t + dt]$ időintervallumban, és eközben az érintkezési pontja is $\omega(t)\,dt$ szöggel megy előrébb.

   Mutassuk meg, hogy a lejtő egy pontjához rögzítve a koordinátarendszert a körlap mozgása leírható a következő módon: A mozgás előáll, mint a kör egy tetszőlegesen kijelölt pontjának valamilyen $v(x(t))$ sebességgel való mozgásának és a körnek e pont körüli $\bar\omega(t)$ szögsebességgel való forgásának a szuperpoziciója. Ez a $\bar\omega(t)$ szögsebesség nem függ attól, hogy a kör melyik pontját jelöltük ki. Mutassuk meg, hogy $\bar\omega(t) = \omega(t)(1 + R\rho(t))$, ahol $\rho(t)$ a lejtő görbülete a kör és lejtő közötti érintkezési pontban a t időpontban. Ha a kör középpontját jelöljük ki, mint a forgás középpontját a mozgás eme reprezentációjában, akkor e pont sebességének nagysága $(R + R^2\rho(t))\omega(t)$, iránya pedig párhuzamos a lejtő érintőjével az érintési pontban.