Wiener-folyamatok definiciója. A funkcionális centrális határeloszlástétel.

A valószínűségszámítás egyik nagyon fontos fogalma a Wiener-folyamat, amelyet Brown-mozgásnak is hívnak. Az első elnevezés e fogalom első matematikailag precíz bevezetőjére, Norbert Wienerre, a második pedig egy Brown nevű XIX. században élt angol biológusra utal, aki egy folyadékban levő, egymással ütköző apró részecskék mozgását tanulmányozta. Később kiderült, hogy a Wiener-folyamat az egy részecske (véletlen) pályáját leíró legjobb matematikai modell. Korábbi tanulmányainkban láttuk, hogy a valószínűségi változók körében a normális eloszlás, a vektor értékű valószínűségi változók között a több-dimenziós normális eloszlás központi szerepet játszik. A Wiener-folyamat hasonlóan fontos szerepet játszik a sztochasztikus folyamatok elméletében, és tulajdonképpen úgy tekinthető, mint a standard normális eloszlású valószínűségi változók megfelelelője a sztochasztikus folyamatok között. Ennek a meglehetősen nagyvonalú kijelentésnek pontosabb értelmet ad a később ismertetett funkcionális centrális határeloszlástétel. A továbbiakban felhasználom a korábban tárgyalt sztochasztikus folyamatokról szóló alapvető fogalmakat és eredményeket.

A Wiener-folyamat definiciójának megadása előtt vezessük be a következő egyszerű definiciót (elnevezést).

Szochasztikus folyamat trajektóriájának a fogalma. *Legyen adva egy T indexhalmazzal paraméterezett $\xi_t(\omega) = \xi(t, \omega)$ sztochasztikus folyamat. Ennek egy rögzített ω elemi eseményhez tartozó trajektóriáján a T halmazon definiált $\xi(t, \omega)$, $t \in T$, függvényt értjük.*

Bevezetjük továbbá a következő fogalmat is.

Gauss (sztochasztikus) folyamat definiciója. *Egy ξ_t, $t \in T$, folyamatot Gauss-folyamatnak nevezünk, ha ennek minden véges dimenziós eloszlása normális eloszlású, azaz a T halmaz minden $T_0 = \{t_1, \dots, t_k\}$ véges részhalmazára a $(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k})$ véletlen vektor több-dimenziós normális eloszlású vektor.*

1. feladat: Idézzük fel a több-dimenziós normális eloszlás definicióját. Lássuk be, hogy egy n-dimenziós $(X_1, \dots, X_n)$ normális eloszlású véletlen vektor eloszlását meghatározzák az EX_j, $1 \le j \le n$ várható értékek és a $\operatorname{Cov}(X_j, X_k) = EX_jX_k - EX_jEX_k$, $1 \le j, k \le n$, kovarianciák.

Megfogalmazom a Wiener-folyamat definicióját.

Wiener-folyamat definiciója. *Egy a $[0, T]$ $0 < T \le \infty$, intervallumon értelmezett Wiener-folyamaton olyan Gauss-folyamatot értünk, amelyre*

a) $EW(t) = 0$, $0 \le t \le T$, $EW(s)W(t) = \min(s, t)$, $\le s, t \le T$.

b) A $W(t, \omega)$ folyamat trajektóriája minden ω elemi eseményre folytonos függvény a $[0, T]$ intervallumon.

A Wiener-folyamat definiciója kapcsán számos kérdést tisztázni kell. A fő kérdés az, hogy a fent megadott definició értelmes-e. Először tisztázni kell az a) pontot.

Mondhatjuk-e, hogy definiáltuk a Wiener-folyamat véges dimenziós eloszlásait konzisztens módon? A definició b) pontja még rejtélyesebb. A Kolmogorov-féle alaptételben semmilyen kijelentés nem szerepelt a sztochasztikus folyamat trajektóriáját illetően. Honnan tudjuk, hogy létezik folytonos trajektóriájú, a Wiener-folyamat a) feltételét teljesítő Gauss-folyamat? Ha létezik, akkor mit mondhatunk a folytonos trajektória létezéséről? Automatikusan teljesül-e ez a követelmény, vagy tennünk kell-e valamit ennek teljesítése érdekében?

Az első kérdés megválaszolása egyszerűbb. Egyrészt az előbb megfogalmazott 1. feladat egyik állítása szerint a várható érték és a kovariancia megadásával és azzal a megkötéssel, hogy a Wiener-folyamat Gauss-folyamat, egyértelműen megadtuk e folyamat véges dimenziós eloszlásait. Másrészt igaz az alábbi 2. feladat állítása:

2. feladat. Rögzítsünk valamely $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le T$ számokat, vegyünk független, nulla várható értékű és $t_j - t_{j-1}$, $1 \le j \le n$, $t_0 = 0$, normális eloszlású η_j valószínűségi változókat, és definiáljuk a $Z_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \eta_j$, $1 \le k \le n$ valószínűségi változókat. Lássuk be, hogy a $(Z_1, \dots, Z_n)$ véletlen vektor eloszlása megegyezik a Wiener-folyamatban definiált $(W(t_1), \dots, W(t_n))$ véletlen vektor eloszlásával. Lássuk be ennek az észrevételnek a segítségével, hogy a Wiener-folyamat definiciójában előírt véges dimenziós eloszlások értelmesek, azaz valóban léteznek a kívánt kovarianciával rendelkező véges dimenziós normális eloszlások, és ezek az eloszlások konzisztensek.

A 2. feladat állítása azt jelenti, hogy a Kolmogorov-féle alaptétel szerint létezik a Wiener-folyamat definicójában szereplő a) tulajdonságot teljesítő Gauss-folyamat. A b) tulajdonsággal kapcsolatban a helyzet bonyolultabb. Oldjuk meg először a következő feladatot.

3. feladat: Legyen adva egy ξ_t, $0 \le t \le 1$, a $[0, 1]$ intervallummal mint index halmazzal indexelt sztochasztikus folyamat valamely $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Jelölje $\mathcal{F}$ a ξ_t, $0 \le t \le 1$, valószínűségi változók által generált σ-algebrát. Lássuk be, hogy az az esemény, hogy a ξ_t folyamat folytonos trajektóriájú nincs benne az $\mathcal{F}$ σ-algebrában.

A 3. feladat eredménye azért érdekes a számunkra, mert csak az ott definiált σ-algebra eseményeinek a valószínűségéről tudunk beszélni. Ha alaposabban meggondoljuk be lehet látni, hogy egy sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásainak ismeretében nem beszélhetünk annak az eseménynek a valószínűségéről, hogy a sztochasztikus folyamat minden trajektóriája folytonos függvény. Viszont lehetőségünk van arra, hogy ha adva van egy sztochasztikus folyamat, akkor megpróbáljuk annak trajektóriáit „kijavítani” úgy, hogy a sztochasztikus folyamatot definiáló valószínűségi változókat egy null-mértékű halmazon megváltoztatunk. Ezáltal a sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásait nem változtatjuk meg, viszont bizonyos esetekben esélyünk van arra, hogy egy sztochasztikus folyamatban kontinum sok null-mértékű halmazon változtatva a trajektóriák tulajdonságait megváltoztatva jobb tulajdonságú trajektóriákat kapunk. Az alábbiakban megfogalmazok és bebizonyítok egy eredményt, amely elégséges feltételt ad arra, hogy egy sztochasztikus folyamat valószínűségi változóit null-mértékű halmazon megváltoztatva olyan sztochasztikus folyamatot kapjunk, amelynek trajektóriái folytonosak. (Természetesen az új folyamat véges dimenziós eloszlásai megegyeznek az eredeti folyamat véges dimenziós eloszlásaival.) Azután megmutatom, hogy ez az eredmény alkalmazható a Wiener-folyamatok esetében is. Ez lehetővé teszi, hogy a Wiener-folyamat definiciójában megköveteljük a b) tulajdonságot.

Az eredmény megfogalmazása előtt bevezetem a következő definiciót.

Sztochasztikus folyamat sztochasztikus folytonosságának a definiciója. *Legyen adva egy $X(t)$, $a \le t \le b$, sztochasztikus folyamat valamely $[a,b]$ intervallumon. Azt mondjuk, hogy ez a sztochasztikus folyamat folytonos valamely $a \le t \le b$ pontban, ha minden $t_n \to t$ számsorozatra az $X(t_n)$ valószínűségi változók sztochasztikusan konvergálnak az $X(t)$ valószínűségi változóhoz, azaz ha minden $\varepsilon > 0$ számra és $t_n \to t$ számsorozatra teljesül a*

$$\lim_{t_n \to t} P(|X(t_n,\omega) - X(t,\omega)| > \varepsilon) = 0$$

reláció.

Most megfogalmazom a következő Lemmát.

Lemma sztochasztikus folyamat folytonos trajektóriáiról. *Legyen adva egy $X(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$, sztochasztikus folyamat a $[0,1]$ intervallumon. Teljesítse ez a sztochasztikus folyamat a következő két tulajdonságot.*

a) Az $X(t,\omega)$ sztochasztikus folyamat sztochasztikusan folytonos a $[0,1]$ intervallum minden pontjában.

b) A sztochasztikus folyamat majdnem minden $X(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$, $\omega \in \Omega$, trajektóriája rendelkezik a következő tulajdonsággal. Az $X\left(\frac{k}{2^n},\omega\right)$, $n = 1,2,\dots$, $0 \le k \le 2^n$ függvény, azaz az $X(\cdot,\omega)$ függvény megszorítása a diadikusan racionális pontokra, egyenletesen folytonos.

Ekkor létezik olyan $\bar X(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$, sztochasztikus folyamat, amelynek minden $\bar X(\cdot,\omega)$ trajektóriája folytonos függvény, és $P(\bar X(t,\omega) = X(t,\omega)) = 1$ minden $0 \le t \le 1$ pontban.

Megjegyzés: Belátható, hogy a Lemmában szereplő a) és b) feltétel teljesülése vagy nem teljesülése az $X(t,\omega)$ sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásaitól függ. Továbbá nem nehéz belátni, hogy ha egy a $[0,1]$ intervallumon definiált sztochasztikus folyamat minden trajektóriája folytonos függvény, akkor teljesíti az előző lemmában megfogalmazott a) és b) feltételt.

A Lemma bizonyítása. Definiáljuk az $\bar X(t,\omega)$ sztochasztikus folyamatot a következő módon: Legyen $\bar X(t,\omega) = 0$ minden $0 \le t \le 1$ számra egy olyan ω esetében, amelyre az $X\left(\frac{k}{2^n},\omega\right)$ függvény nem egyenletesen folytonos. Az olyan ω elemi eseményekre viszont, amelyekre ez a függvény egyenletesen folytonos a diadikusan racionális pontokban tekintsünk minden $0 \le t \le 1$ számra egy olyan $\frac{k_n}{2^n} = \frac{k_n(t)}{2^n}$ sorozatot, $n = 1,2,\dots$, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_n}{2^n} = t$, és legyen $\bar X(t,\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} X\left(\frac{k_n}{2^n},\omega\right)$. Ez a limesz létezik, mert az $X\left(\frac{k_n}{2^n},\omega\right)$,

$n = 1, 2, \ldots$, sorozat Cauchy sorozat. Az $X(t,\omega)$ és $\bar{X}(t,\omega)$ valószínűségi változó 1 valószínűséggel megegyezik, mert mind a kettőhöz sztochasztikusan (a mértékelmélet nyelvén mértékben) konvergál az $X\left(\frac{k_n}{2^n},\omega\right)$, $n = 1, 2, \ldots$, sorozat. Ezenkívül az $\bar{X}(\cdot,\omega)$ trajektóriák folytonos függvények minden $\omega \in \Omega$ elemi eseményre.

Az előző lemma segítségével bebizonyítom az alábbi állítást, amely a korábbi eredményekkel együtt biztosítja, hogy létezik Wiener-folyamat.

Tétel (folytonos trajektóriájú) Wiener-folyamat létezéséről. *Legyen adva egy olyan $\bar{W}(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$, Gauss-folyamat a $[0,1]$ intervallumon, amely teljesíti a Wiener-folyamat definiciójában szereplő a) feltételt. Ekkor létezik olyan $W(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$, Wiener-folyamat a $[0,1]$ intervallumon, amelyre $P(W(t,\omega) = \bar{W}(t,\omega)) = 1$ minden $0 \le t \le 1$ számra, és trajektóriái 1 valószínűséggel folytonosak.*

A Wiener-folyamat létezéséről szóló tétel bizonyítása. Elég megmutatni, hogy mindkét a Lemmában szereplő feltétel teljesül egy olyan $\bar{W}(t,\omega)$ Gauss-folyamatra, amely teljesíti a Wiener-folyamat definiciójában szereplő a) feltételt. Ezek közül az a) tulajdonság teljesülése nyílvánvaló a Csebisev egyenlőtlenség alapján, mert $\bar{W}(t_n,\omega) - \bar{W}(t,\omega)$ egy 0 várható értékű és $|t - t_n|$ szórásnégyzetű valószínűségi változó. A b) tulajdonság bizonyításához elég megmutatni azt, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sup_{1\le k\le 2^n}\left|\bar{W}\left(\frac{k}{2^n},\omega\right) - \bar{W}\left(\frac{k-1}{2^n},\omega\right)\right| > 2^{-n/8}\right) < \infty. \tag{A}$$

Ebből ugyanis a Borel-Cantelli lemma alapján következik, hogy létezik olyan $\bar{\Omega} \subset \Omega$, $P(\bar{\Omega}) = 1$ esemény, amelyre igaz, hogy minden $\omega \in \bar{\Omega}$ elemi eseményre van olyan $n(\omega)$ küszöbindex úgy, hogy $\sup\limits_{1\le k\le 2^n}\left|\bar{W}\left(\frac{k}{2^n},\omega\right) - \bar{W}\left(\frac{k-1}{2^n},\omega\right)\right| \le 2^{-n/8}$ minden $n \ge n(\omega)$ számra. Azt állítom, hogy ebből következik, hogy ha t és s két olyan diadikus racionális szám, amelyre $0 < t - s < 2^{-L}$ valamely (nagy) L egész számra, $\omega \in \bar{\Omega}$, $L \ge n(\omega)$ akkor $|X(t,\omega) - X(s,\omega)| \le 2\sum\limits_{n=L}^{\infty}\sup\limits_{1\le k\le 2^n}\left|\bar{W}\left(\frac{k}{2^n},\omega\right) - \bar{W}\left(\frac{k-1}{2^n},\omega\right)\right| \le 2\sum\limits_{n=L}^{\infty} 2^{-n/8} \le 1000\cdot 2^{-L/8}$, ahonnan következik, hogy a $\bar{W}(t,\omega)$ folyamat teljesíti a b) tulajdonságot, ha $\omega \in \bar{\Omega}$.

A fenti egyenlőtlenségsorozat első egyenlőtlenségének belátása érdekében tekintsük a leghosszabb $\left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right]$ intervallumokat, amelyekre $\left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right] \subset [s,t]$. Egy vagy két ilyen intervallum van, és $j \ge L$. Legyen ezen intervallumok egyesítésének a bal végpontja $\frac{k}{2^j}$, jobb végpontja pedig $\frac{\bar{k}}{2^j}$, $\bar{k} = k+1$ vagy $\bar{k} = k+2$. Mind az $\left[s, \frac{k}{2^j}\right]$ mind a $\left[\frac{\bar{k}}{2^j}, t\right]$ intervallum előállítható különböző hosszúságú $2^{-j'}$, $j' \ge j+1$, hosszúságú diadikus intervallumok egyesítéseként. Az előbbiekből következik, hogy az $[s,t]$ intervallum előáll 2^{-j}, $j \ge L$, hosszúságú diadikus intervallumok egyesítéseként, és ebben az egyesítésben minden $j \ge L$-re legfeljebb 2 darab 2^{-j} hosszúságú intervallum szerepel. Innen következik a kívánt egyenlőtlenség.

Az (A) reláció bizonyításához vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sup_{1\le k\le 2^n}\left|\bar W\left(\frac{k}{2^n},\omega\right)-\bar W\left(\frac{k-1}{2^n},\omega\right)\right|>2^{-n/8}\right)\\
&\quad\le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n} P\left(\left|\bar W\left(\frac{k}{2^n},\omega\right)-\bar W\left(\frac{k-1}{2^n},\omega\right)\right|>2^{-n/8}\right)\\
&\quad\le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\frac{E\left(\bar W\left(\frac{k}{2^n},\omega\right)-\bar W\left(\frac{k-1}{2^n},\omega\right)\right)^4}{2^{-n/2}}=\sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{3\cdot 2^{-2n}}{2^{-n/2}}<\infty,
\end{aligned}$$

mert a $W\left(\frac{k}{2^n},\omega\right)-\bar W\left(\frac{k-1}{2^n},\omega\right)$ valószínűségi változók normális eloszlásúak, nulla várható értékkel és 2^{-n} szórásnégyzettel. Ezért a negyedik momentumuk $3\cdot 2^{-2n}$. A tétel bizonyítását befejeztük.

Megjegyzés: A fenti tételben beláttuk, hogy létezik a $[0,1]$ intervallumon definiált Wiener-folyamat. A jelölések némi változtatásával be lehet látni ugyanezzel a módszerrel, hogy tetszőleges $T>0$ számra létezik Wiener-folyamat a $[0,T]$ intervallumon. De be lehet látni azt, hogy létezik $W(t,\omega)$, $t\ge 0$. Wiener-folyamat a pozitív félegyenesen például a következő feladat megoldásának a segítségével.

Feladat: Legyen $W_n(t,\omega)$, $n=1,2,\dots$, $0\le t\le 1$, független Wiener-folyamatok sorozata a $[0,1]$ intervallumon. Lássuk be, hogy ,,ezeket a független Wiener-folyamatokat összeragasztva”, azaz definiálva a $W(t,\omega)=\sum\limits_{j=1}^{[t]}W_j(1,\omega)+W_{[t]+1}(\{t\},\omega)$, $0\le t<\infty$, Wiener-folyamat a $t\ge 0$ félegyenesen, ahol $[t]$ a t szám egész részet $\{t\}$ pedit a t szám tört részét jelöli.

Nem kötelező feladat: Mutassuk meg, (felhasználva az előző bizonyítás gondolatait, hogy ha egy $X(t,\omega)$, $0\le t\le 1$, sztochasztikus folyamat a $[0,1]$ intervallumon teljesíti az $E|X(t,\omega)-X(s,\omega)|^{2+\alpha}\le C|t-s|^{1+\beta}$ feltételt alkalmas $\alpha>0$, $\beta>0$ és $C>0$ konstansokkal mindet $0\le s<t\le 1$ számpárra, akkor létezik az $X(t,\omega)$ sztochasztikus folyamatnak olyan $\bar X(t,\omega)$ módosítása, amelyre $P(X(t,\omega)=\bar X(t,\omega))=1$ minden $0\le t\le 1$ számra, és a $\bar X(t,\omega)$ folyamat minden trajektóriája folytonos függvény. (Valójában az $\alpha>0$ feltétel elhagyható a feltételként szereplő egyenlőtlenségből. Azért tettük ezt fel, mert a legtöbb érdekes esetben csak $\alpha>0$ számmal tudjuk biztosítani a kívánt feltétel teljesülését.)

4. feladat: Mutassuk meg, hogy egy a $[0,1]$ intervallumon definiált folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamat tekinthető, mint egy $C([0,1])$-tér értékű, azaz a $[0,1]$ intervallumon értelmezett folytonos értékű függvényekből álló, és a szuprémum normával ellátott Banach téren értelmezett valószínűségi változó. A probléma jobb megértése érdekében a megfogamazom e kérdés 4a) változatát, amely megmagyarázza, mi a probléma lényege.

4a. feladat: Világos, hogy egy a $[0,1]$ intervallumon értelmezett folytonos trajektóriájú $X(t,\omega)$ sztochasztikus folyamat az $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőt leképezi a $C([0,1])$ térbe. De be kell látni, hogy ez a leképezés mérhető. Tudjuk, hogy mivel minden rögzített $0\le t\le 1$ számra az $X(t,\cdot)$ függvény folytonos, azaz tetszőleges Borel mérhető B halmazra $\{\omega\colon X(t,\omega)\in B\}\in\mathcal{A}$, (azaz a B halmaz őséképe mérhető). Lássuk be, hogy a $C([0,1])$ tér tetszőleges mérhető D halmazára $\{\omega\colon X(t,\omega)\in D\}\in\mathcal{A}$.

4b. feladat: Az 4. feladat állítása szerint tetszőleges a $[0,1]$ intervallumon definiált folytonos trajektóriájú folyamat tekinthető úgy, mint egy értékeit a $C([0,1])$ térben felvevő valószínűségi változó. Lássuk be, hogy e folyamat véges dimenziós eloszlásai meghatározzák annak valószínűségét is, hogy véve egy tetszőleges Borel-mérhető halmazt a $C([0,1])$ térben, a sztochasztikus folyamat trajektóriái ebbe a halmazba esnek.

5. feladat: Az előző tétel megoldásában fontos szerepet játszott az a lépés, hogy adjunk jó becslést annak valószínűségére, hogy egy normális eloszlású valószínűségi változó egy adott számnál nagyobb értéket vesz fel. Ezt a becslést abban a bizonyításban a negyedik momentum becslésének a segítségével kaptuk. Az ebben a feladatban megfogalmazott becslés pontosabb, és bizonyos nehezebb feladatokban erre van szükség. A következő jelölést fogjuk alkalmazni. $\Phi(x)$ jelöli a standard normális eloszlásfüggvényt, $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, ennek sűrűségfüggvényét. Mutassuk meg (parciális integrálással), hogy minden $x>0$ számra teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\varphi(x)<1-\Phi(x)<\frac{1}{x}\varphi(x).$$

Wiener-folyamatok tulajdonságai.

Megfogalmazom azt a fontos eredményt, amelyet funkcionális centrális határeloszlástételnek szokás nevezni, és amely a szokásos centrális határeloszlástétel természetes és fontos általánosítása. A centrális határeloszlástétel állítását úgy lehet heurisztikusan megfogalmazni, hogy ha összeadunk n független nulla várható értékű kis értékeket felvevő valószínűségi változót nagy n számra, akkor ezen valószínűségi változók összegének az eloszlása közelítőleg megegyezik egy olyan nulla várható értékű normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásával, amelynek szórásnégyzete egyenlő ennek az összegnek a szórásnégyzetével. Mivel független, normális eloszlású valószínűségi változók összege szintén normális eloszlású, ez az állítás úgy is interpretálható, hogy kis független valószínűségi változók összegei közelítőleg úgy viselkednek, mintha az összeadandók normális eloszlásúak lennének. A funkcionális centrális határeloszlástételnek is van hasonló heurisztikus interpreteciója. Eszerint, ha ezen kis valószínűségi változóknak az összes részletösszegét tekintjük, azaz a tagokat 1-től m-ig összeadjuk minden $1 \le m \le n$ számra, akkor ezen részletösszegek együttese körülbelül úgy viselkedik, mintha az összeadandók normális eloszlásúak lennének.

Annak érdekében, hogy a funkcionális centrális határeloszlástételt pontosan és általános feltételek mellett megfogalmazhassam először felidézem a centrális határeloszlástételt független, de nem feltétlenül egyform eloszlású valószínűségi változókra, illetve annak egy természetes általánosítását úgynevezett szériasorozatokra.

Először a tétel általánosabb, szériasorozatokról szóló alakját fogalmazom meg. Ennek érdekében megadom a szériasorozatok definicióját.

Szériasorozat definiciója. *Legyen adva minden $k = 1, 2, \dots$ számra egy n_k pozitív egész szám és valószínűségi változók egy $\xi_{k,j}$, $j = 1, 2, \dots, n_k$, sorozata, amelynek elemei (rögzített k számra) függetlenek. Valószínűségi változók egy ilyen rendszerét szériasorozatnak nevezünk.*

Adva egy $\xi_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$, szériasorozat, tekintsük az $S_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, sorösszegeket. Az S_k, $k = 1, 2, \dots$ véletlen összegek nagyon általános feltételek mellett eloszlásban konvergálnak a standard normális eloszláshoz. A szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástétel egy ilyen jellegű állítást fogalmaz meg. E tétel érvényességének a feltételei közül a legfontosabb az úgynevezett Lindeberg feltétel, amelyet külön ismertetek.

Lindeberg feltétel definiciója szériasorozatokra: *Legyen $\xi_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$, olyan szériasorozat, amelynek elemeire $E\xi_{k,j} = 0$, $E\xi_{k,j}^2 < \infty$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$, és $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 = 1$. Ez a szériasorozat akkor és csak akkor teljesíti a Lindeberg feltételt, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 I\left(\{|\xi_{k,j}| > \varepsilon\}\right) = 0,$$

ahol $I(A)$ egy A halmaz indikátor függvénye.

Centrális határeloszlástétel szériasorozatokra a Lindeberg feltétel teljesülése esetén. *Legyen $\xi_{k,j}$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, olyan szériasorozat, amelyre $E\xi_{k,j}=0$, $E\xi_{k,j}^2<\infty$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2=1$, és teljesítse e szériasorozat a Lindeberg feltételt. Ekkor*

a.) A szériasorozat tagjai teljesítik a $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sup\limits_{1\le j\le n_k} E\xi_{k,j}^2\right)=0$ kicsiségi feltételt.

b.) Az $S_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\xi_{k,j}$, $1\le k<\infty$, véletlen összegek eloszlásban konvergálnak a standard, azaz nulla várható értékű és 1 szórásnégyzetű normális eloszláshoz, ha $k\to\infty$.

Be lehet látni azt is, hogy a centrális eloszlástétel ezen formája bizonyos értelemben éles, és tovább nem javítható. Nevezetesen igaz a következő tétel.

A szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástétel állításának a megfordítása. *Legyen $\xi_{k,j}$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, olyan szériasorozat, amelyre $E\xi_{k,j}=0$, $E\xi_{k,j}^2<\infty$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2=1$, és teljesítse e szériasorozat a centrális határeloszlástételt valamint a $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sup\limits_{1\le j\le n_k} E\xi_{k,j}^2\right)=0$ kicsiségi feltételt. Ekkor a szériasorozat teljesíti a Lindeberg feltételt is.*

Minket az a kérdés érdekel, hogy ha adva van független valószínűségi változók egy végtelen $\xi_1,\xi_2,\dots$ sorozata, arra hogyan szól a centrális határeloszlástétel, és az milyen feltételek mellett teljesül. Ebben az esetben természetes azt kérdezni, hogy ha $E\xi_j=0$ minden $j=1,2,\dots$ számra, akkor az $S_n=\frac{1}{s_n}\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j$ sorozat, ahol $s_n^2=\sum\limits_{j=1}^{n}E\xi_j^2$ az S_n összeg szórásnégyzete mikor konvergál eloszlásban a standard normális eloszláshoz. A válasz erre a kérdésre könnyen visszavezethető a szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástételre. Valóban, definiáljuk a következő szériasorozatot. Legyen $n_k=k$ és $\xi_{k,j}=\frac{1}{s_k}\xi_j$, $1\le j\le k$, minden $k=1,2,\dots$ számra. Ekkor az eredeti $\frac{1}{s_n}S_n$, $n=1,2,\dots$, normalizált részletösszegsorozat és az előbb definiált $\xi_{k,j}$ szériasorozat $\bar S_k=\sum\limits_{j=1}^{k}\xi_{k,j}$, $k=1,2,\dots$, sorösszegeiből álló sorozat megegyezik, ezért a szériasorozatokra megfogalmazott centrális határeloszlástételből következik az alább megfogalmazott független valószínűségi változók sorozatairól szóló centrális határeloszlástétel. Ennek megfogalmazása érdekében először megadom a Lindeberg feltétel definicióját független valószínűségi változók sorozataira.

Lindeberg feltétel definiciója független valószínűségi változók sorozataira. *Legyen adva független valószínűségi változók $\xi_1,\xi_2,\dots$ sorozata, amelyre teljesül, hogy $E\xi_j=0$ és $E\xi_j^2<\infty$ minden $j=1,2,\dots$ számra, továbbá $\sum\limits_{j=1}^{\infty}E\xi_j^2=\infty$. Azt mondjuk,* *hogy a $\xi_1, \xi_2, \dots$ sorozat teljesíti a Lindeberg feltételt, ha minden $\varepsilon > 0$ számra*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} \sum_{j=1}^{n} E(\xi_j^2 I(|\xi_j| > \varepsilon s_n)) = 0,$$

ahol $s_n^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} E\xi_j^2$, és $I(A)$ jelöli egy A esemény indikátorfüggvényét.

Centrális határeloszlástétel független valószínűségi változók sorozataira a Lindeberg feltétel teljesülése esetén. *Legyen adva független valószínűségi változók $\xi_1, \xi_2, \dots$ olyan sorozata, amelyre $E\xi_j = 0$ és $E\xi_j^2 < \infty$ minden $j = 1, 2, \dots$ számra, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} E\xi_j^2 = \infty$, és e sorozatra teljesül a Lindeberg feltétel. Legyen $s_n^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} E\xi_j^2$. Ekkor*

a.) a szériasorozat tagjai teljesítik a $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{1\le j\le n} \frac{E\xi_j^2}{s_n^2} \right) = 0$ kicsiségi feltételt.

b.) Az $\frac{1}{s_n} S_n = \frac{1}{s_n} \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$, véletlen összegek eloszlásban konvergálnak a standard, azaz nulla várható értékű és 1 szórásnégyzetű normális eloszláshoz, ha $n \to \infty$.

Megjegyzem, hogy tekinthetjük a szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástétel állításának a megfordítását is, és megfogalmazhatjuk annak természetes megfelelőjét független valószínűségi változók részletösszegeire. Ez az állítás is egy érvényes tétel.

Megfogalmazok egy olyan eredményt, amely azt fejezi ki, hogy amennyiben veszünk egy a Lindeberg feltételt teljesítő szériasorozatot, és rögzített k számra nemcsak az $S_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j}$ véletlen összeget vezetjük be, hanem az összes

$$S_k(j) = \sum_{p=1}^{j} \xi_{k,p}, \quad 1 \le j \le n_k \tag{B1}$$

részletösszeget, és tekintjük az $S_k(j)$, $1 \le j \le n_k$, sorozat eloszlását, akkor ennek aszimptotikus viselkedése bizonyos értelemben jól leírható egy Wiener-folyamat segítségével.

A fenti állítás pontos megfogalmazásának érdekében vezessük be a következő jelöléseket: Legyen adva egy

$$\begin{matrix} \xi_{1,1}, \dots, \xi_{1,n_1} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \xi_{k,1}, \dots, \xi_{k,n_k} \\ \vdots \qquad \vdots \end{matrix} \tag{B2}$$

szériasorozat, amelyre $E\xi_{k,j}=0$, $E\xi_{k,j}^2=\sigma_{k,j}^2$, $\sum\limits_{j=1}^{n_k}\sigma_{k,j}^2=s_k^2$, és feltesszük, hogy teljesül a $\lim\limits_{k\to\infty}s_k^2=1$ reláció. Vezessük be az $S_k(0)=0$, $S_k(j)=\sum\limits_{p=1}^{j}\xi_{k,p}$ és $s_k(j)^2=\sum\limits_{p=1}^{j}\sigma_{k,p}^2$, $\bar s_k^2(0)=0$, $\bar s_k(j)^2=\frac{s_k(j)^2}{s_k^2}$, $1\le j\le n_k$, $k=1,2,\dots$, mennyiségeket. Adjuk meg ezen mennyiségek segítségével a következő a $[0,1]$ intervallumon definiált $X_k(t)=X_k(t,\omega)$, $0\le t\le 1$, (véletlen) folytonos függvényeket:

$$
\begin{aligned}
&X_k(\bar s_k^2(j),\omega)=S_k(j),\quad 0\le j\le n_k \quad \text{és}\\
&X_k(t,\omega)=\frac{\bar s_k(j)^2-t}{\bar s_k(j)^2-\bar s_k(j-1)^2}X_k(\bar s_k^2(j-1),\omega)+\frac{t-\bar s_k(j-1)^2}{\bar s_k(j)^2-\bar s_k(j-1)^2}X_k(\bar s_k^2(j),\omega)\\
&\qquad\qquad \text{ha } \bar s_k(j-1)^2\le t\le \bar s_k(j)^2,\quad 1\le j\le n_k,
\end{aligned}
\tag{B3}
$$

azaz az $X_k(\cdot,\omega)$ függvény az $\bar s_k(j)^2$ pontokban megegyeznek az első j $\xi_{k,p}(\omega)$ valószínűségi változó összegével, a köztük levő pontokban pedig lineáris függvényként kiegészítjük őket. (Vegyük észre, hogy az $\bar s_k(j)^2=\frac{s_k(j)^2}{s_k^2}$ szám közelítőleg egyenlő az $S_k(j)$ valószínűségi változó szórásnégyzetével, mert $s_k(j)^2=\operatorname{Var}S_k(j)$, és $\lim\limits_{k\to\infty}s_k^2=1$. Ez a tény teszi természetessé az $X_k(\cdot)$ sztochasztikus folyamat skálázását.) Tegyük fel, hogy a (B2) szériasorozat teljesíti a Lindeberg feltételt is. Ekkor alkalmazható rá a centrális határeloszlástétel. Némi plusz munkával be lehet látni, hogy nemcsak az $X_k(1,\omega)$ valószínűségi változók konvergálnak eloszlásban a standard normális eloszláshoz, ha $k\to\infty$, hanem az is igaz, hogy minden rögzített t számra az $X_k(t,\omega)$ valószínűségi változók konvergálnak eloszlásban egy 0 várható értékű és t szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változóhoz. Sőt, az is igaz, hogy minden $0\le t_1<t_2<\dots<t_m\le 1$ számokra az $(X_k(t_1,\omega),\dots,X_k(t_m,\omega))$ véletlen vektorok eloszlásban konvergálnak egy olyan $(Z_1,\dots,Z_m)$ m-dimenziós normális eloszlású vektor eloszlásához, amelyre $EZ_j=0$, $0\le j\le k$, $EZ_jZ_{j'}=\min(t_j,t_{j'})$. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy nagy k indexre a (B3) képletben definiált $X_k(t,\omega)$ sztochasztikus folyamat közel van eloszlásban egy a $[0,1]$ intervallumon definiált Wiener-folyamathoz. Az alábbiakban megfogalmazok egy tételt, amely a fent megfogalmazattokhoz hasonló, de tartalmasabb állítást fogalmaz meg. A tétel kimondása előtt emlékeztetek arra, hogy mint azt a 4. feladatban megfogalmazott állítás megfogalmazza, egy a $[0,1]$ intervallumon definiált folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamatot tekinthetünk egy $C([0,1])$ téren definiált valószínűségi változónak is. Ezt az észrevételt alkalmazhatjuk mind a Wiener-folyamatra, mind a (B3) képletben definiált folyamatokra. Az a tény, hogy egy Wiener-folyamat felfogható úgy, mint egy értékeit a $C([0,1])$ térben felvevő valószínűségi változó lehetővé teszi, hogy bevezessük az alább megadandó Wiener mérték fogalmát.

Wiener-mérték definiciója. *Legyen adva egy Wiener-folyamat a $[0,1]$ intervallumban. Tekintsük ezt, mint egy értékeit a $C([0,1])$ térben felvevő valószínűségi változót. Ennek eloszlását, azaz a $\mu_W(A)=P(\omega\colon W(\cdot,\omega)\in A)$ függvényt minden a $C([0,1])$ térbeli Borel mérhető A halmazra, (azaz minden olyan A halmazra, amely benne van* *a $B([0,1])$ térben lévő nyílt halmazok által generált legszűkebb σ-algebrában) Wiener-mértéknek nevezzük.*

Fel fogjuk használni azt a tényt, hogy az eloszlásban való konvergencia természetes általánosítását definiálták tetszőleges szeparábilis metrikus térben. Ezt gyenge konvergenciának nevezik általában az irodalomban, és euklidészi térben levő valószínűségi mértékek esetében ez ekvivalens az eloszlásban való konvergenciával. Több különböző alakja van ennek a definiciónak, de ezek mindegyike ekvivalens. A definiciókat megadom, de ekvivalenciájuk bizonyítását elhagyom.

Valószínűségi mértékek (gyenge) konvergenciájának a definiciója, a) definició. *Legyen adva valószínűségi mértékek μ_n, $n=1,2\dots$, sorozata egy (X,ρ) szeparábilis metrikus tér Borel mérhető részhalmazain. Azt mondjuk, hogy e mértékek sorozata gyengén konvergál egy μ e szeparábilis metrikus tér Borel mérhető részhalmazain definiált valószínűségi mértékhez, ha minden a metrikus téren értelmezett folytonos és korlátos $f(x)$ függvényre*

$$\lim_{n\to\infty}\int f(x)\mu_n(\,dx)=\int f(x)\mu(\,dx).$$

Megjegyzés. A fenti definicióban megköveteltük, hogy az $f(x)$ 'tesztfüggvények' ne csak folytonosak, hanem korlátosak is legyenek. Ez a megszorítás biztosítja, hogy mindig beszélhetünk a (véges) $\int f(x)\mu_n(\,dx)$ és $\int f(x)\mu(\,dx)$ integrálokról.

Valószínűségi mértékek (gyenge) konvergenciájának a definiciója, b1) definició. *Legyen adva valószínűségi mértékek μ_n, $n=1,2\dots$, sorozata egy (X,ρ) szeparábilis metrikus tér Borel mérhető részhalmazain. Azt mondjuk, hogy e mértékek sorozata gyengén konvergál egy μ e szeparábilis metrikus tér Borel mérhető részhalmazain definiált valószínűségi mértékhez, ha minden a metrikus téren lévő zárt F halmazra*

$$\limsup_{n\to\infty}\mu_n(F)\le\mu(F).$$

Valószínűségi mértékek (gyenge) konvergenciájának a definiciója, b2) definició. *Legyen adva valószínűségi mértékek μ_n, $n=1,2\dots$, sorozata egy (X,ρ) szeparábilis metrikus tér Borel mérhető részhalmazain. Azt mondjuk, hogy e mértékek sorozata gyengén konvergál egy μ e szeparábilis metrikus tér Borel mérhető részhalmazain definiált valószínűségi mértékhez, ha minden a metrikus téren lévő nyílt G halmazra*

$$\liminf_{n\to\infty}\mu_n(G)\ge\mu(G).$$

A következő eredményben megfogalmazzuk, milyen kapcsolat van eloszlásfüggvények konvergenciája és az eloszlásfüggvények által generált eloszlások (gyenge) konvergenciája között.

Tétel eloszlásfüggvények és az általuk generált mértékek gyenge konvergenciája közötti kapcsolatról. *Tekintsük F_n eloszlásfüggvények, $n = 1, 2, \dots$ sorozatát és egy F_0 eloszlásfüggvényt a számegyenesen vagy az R^k k-dimenziós eukideszi térben, valamint az általuk generált $\mu_n = \mu_{F_n}$ Stieltjes mértékeket, $n = 0, 1, 2, \dots$. Az F_n eloszlásfüggvények akkor és csak akkor konvergálnak eloszlásban az F_0 eloszlásfüggvényhez, ha az F_n eloszlásfüggvények által meghatározott μ_n Stieltjes (valószínűségi) mértékek gyengén konvergálnak az F_0 eloszlásfüggvény által meghatározott μ_0 (valószínűségi) Stieltjes mértékhez.*

Most kimondhatjuk az előbb szériasorozatok által definiált véletlen lineáris darabokból álló (töröttvonal) függvényeket értékként felvevő sztochasztikus folyamatok gyenge konvergenciáját a Wiener-mértékhez. Ezt a tételt az irodalomban funkcionális centrális határeloszlástételnek hívják.

Funkcionális centrális határeloszlástétel. *Legyen adva egy a (B2) képletben leírt szériasorozat, amelynek tagjai teljesítik az $E\xi_{k,j} = 0$, $E\xi_{k,j}^2 = \sigma_{k,j}^2$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$, $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n_k} \sigma_{k,j}^2 = 1$ relációkat és a Lindeberg feltételt. Vezessük be az e szériasorozat segítségével a (B3) formulában definiált folytonos trajektóriájú $X_k(t) = X_k(t, \omega)$, $0 \le t \le 1$, $k = 1, 2, \dots$, folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamatokat. Az $X_k(t, \omega)$ sztochasztikus folyamatok gyengén konvergálnak a Wiener mértékhez, ha $k \to \infty$.*

Felmerül a kérdés, miért érdekes a fenti eredmény. Azért, mert ez nem pusztán egy absztrakt térben megfogalmazott változata a centrális határeloszlástételnek, hanem maguknak a szériasorozatok részletösszegeinek aszimptotikus viselkedéséről is lényeges új információt tartalmaz. Annak érdekében, hogy ezt megértsük lássuk be az alábbi egyszerű lemmát, amely azt fejezi ki, hogy egy folytonos transzformáció gyengén konvergens valószínűségi mértékek sorozatát ismét valószínűségi mértékek gyengén konvergens sorozatába visz. Pontosabban megfogalmazva a következő eredmény érvényes.

Lemma gyengén konvergens valószínűségi mértékek konvergenciájáról. *Legyen adva egy $(X, \mathcal{X})$ szeparábilis metrikus tér (itt $\mathcal{X}$ a ρ metrika segítségével az X téren definiált nyílt halmazok által generált Borel σ-algebrát jelöli, és hasonlóan értelmezzük később az $\mathcal{Y}$ σ-algebrát egy $(Y, \mathcal{Y})$ téren) és azon valószínűségi változók μ_n sorozata, $n = 1, 2, \dots$, amely az előbb definiált gyenge konvergencia értelmében konvergál egy μ valószínűségi mértékhez. Legyen adva ezenkívül egy másik $(Y, \mathcal{Y})$ szeparábilis metrikus tér, valamint egy T* folytonos *transzformáció az $(X, \mathcal{X})$ térből az $(Y, \mathcal{Y})$ térbe. Ez a transzformáció természetes módon indukál egy transzformációt, amely minden az $(X, \mathcal{X})$ téren definiált ν valószínűségi mértéknek a következő $T\nu$ valószínűségi mértéket felelteti meg az $(Y, \mathcal{Y})$ téren: $T\nu(B) = \nu(\{x\colon Tx \in B\})$ minden $B \in \mathcal{Y}$ halmazra. Ekkor a $T\mu_n$ valószínűségi mértékek gyengén konvergálnak a $T\mu$ valószínűségi mértékhez.*

A lemma bizonyítása. Alkalmazzuk a gyenge konvergencia a) definicióját. Ekkor azt kell belátni, hogy tetszőleges az $(Y, \mathcal{Y})$ téren folytonos és korlátos $g(y)$ függvényre

$$\lim_{n\to\infty} \int g(y) T\mu_n(\,dy) = \int g(y) T\mu(\,dy).$$

Vezessük be a $g(y)$ függvény $f(x) = g(Tx)$ ősképét. Ekkor az $f(x)$ függvény folytonos és korlátos, és a mértékelmélet egyik fontos eredménye alapján mértéktartó transzformációk szerinti integrálokról

$$\int f(x)\mu(\,dx) = \int g(y)T\mu(\,dy) \quad \text{és} \quad \int f(x)\mu_n(dx) = \int g(y)T\mu_n(dy)$$

minden $n = 1, 2, \dots$ számra. A μ_n mértékek gyenge konvergenciájából és az $f(x)$ függvény folytonosságából és korlátosságából következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \int f(x)\mu_n(\,dx) = \int f(x)\mu(\,dx)$ a fenti szereposztással. A fenti összefüggésekből következik a lemma állítása.

Megjegyzés 1: Érdemes megfogalmazni a fenti lemma állítását ekvivalens módon mértékek helyett (metrikus térbeli értékeket felvevő) valószínűségi változók segítségével. Ez így szól. Legyen adva $(X, \mathcal{X})$ szeparábilis, metrikus térbeli értékeket felvevő valószínűségi változóknak egy ξ_n, $n = 1, 2\dots$ sorozata, amelyek eloszlásai (gyengén) konvergálnak egy ξ ($(X, \mathcal{X})$ térbeli értékeket felvevő) valószínűségi változó eloszlásához. Legyen T az $(X, \mathcal{X})$ tér egy folytonos leképezése valamely $(Y, \mathcal{Y})$ szeparábilis metrikus térbe. Ekkor a $T(\xi_n)$ valószínűségi változók eloszlásai eloszlásban konvergálnak a $T(\xi)$ valószínűségi változó eloszlásához.

Megjegyzés 2: Be lehet látni, hogy igaz a fenti lemma olyan élesítése, amely szerint a Lemma általánosítása érvényben marad akkor is, ha gyengítjük azt a feltételt, hogy a T transzformáció folytonos. Elegendő csak annyit megkövetelni, hogy a T transzformáció egy valószínűséggel folytonos a μ (határ)mérték szerint. Ez az általánosítás érdekes bizonyos alkalmazásokban.

A fenti lemma számunkra abban a speciális esetben érdekes, amikor az $(X, \mathcal{X})$ tér a $[0, 1]$ intervallumon definiált folytonos függvények $C([0, 1])$ tere, $(Y, \mathcal{Y})$ a számegyenes vagy egy véges dimenziós euklidészi tér a szokásos Borel σ-algebrával, és alkalmazunk egy T transzformációt a $C([0, 1])$ térből ebbe a véges dimenziós euklidészi térbe. Ekkor a funkcionális centrális határeloszlástételnek érdekes következményei vannak. Tekinthetjük például a következő példákat: $T_1 f = \sup\limits_{0\le x\le 1} |f(x)|$, $T_2 f = \sup\limits_{0\le x\le 1} f(x)$, $T_3 f = \int_0^1 f^2(x)\,dx$, $T_4 f = (T_1 f, T_2 f, T_3 f)$. Ezen a transzformációk mindegyike folytonos, közülük az első három a számegyenesre, a negyedik a három dimenziós euklidészi térbe képez. A T_1 transzformáció alkalmazása például azt adja, hogy ha egy szériasorozat teljesíti a funkcionális centrális határeloszlástétel feltételeit, akkor a $\sup\limits_{1\le j\le n_k} \left|\sum\limits_{p=1}^{j} \xi_{k,p}\right|$ valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak egy a $[0, 1]$ intervallumban definiált Wiener-folyamat szuprémumának eloszlásához. Hasonlóan lehet egy határeloszlástételt mondani T_2, T_3 vagy T_4 transzformáció alkalmazása segítségével. Vegyük észre azt is, hogy a határeloszlás csak a határfolyamattól (a Wiener-folyamattól) függ, tehát minden a funkcionális centrális határeloszlástétel feltételeit teljesítő szériasorozatra ugyanaz.

Informális módon a fenti eredmények úgy interpretálhatóak, hogy a funkcionális határeloszlástétel feltételeit teljesítő szériasorozatokból képzett részletösszegek sorozatai nagy indexre hasonlóan viselkednek, és ezt a hasonló viselkedést a Wiener-folyamat segítségével írhatjuk le.

Végül megjegyzem, hogy Brown angol biológusnak az ismertetés elején említett azon megfigyelésének a hátterében, amely miatt a Wiener-folyamatot Brown mozgásnak is hívják, szintén a funkcionális centrális határeloszlástétel van. Egy apró részecske az idő folyamán sok egymástól független apró lökést kap, és mozgása az ezen lökések hatására végzett sok kis egymástól független elmozdulás összegeként áll elő. A funkcionális centrális határeloszlástétel szerint egy ilyen pálya közelítőleg úgy viselkedik, mint egy Wiener-folyamat trajektóriája.

Kiegészítés. *Megjegyzések a feladatok megoldásához.*

1. feladat Egy $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ vektort k-dimenziós standard normális eloszlású vektornak nevezünk, ha koordinátái független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Azokat a vektorokat nevezzük normális eloszlásúnak, amelynek eloszlása megegyezik egy $\xi A + m$ véletlen vektor eloszlásával, ahol ξ standard normális eloszlású vektor, A egy $k \times k$ mátrix m egy k-dimenziós (determinisztikus) vektor. Némi számolással belátható, hogy egy ilyen vektor kovariancia mátrixa $D = A^* A$ alakú. A lineáris algebra bizonyos eredményeiből következik, hogy a $D = A^* A$ egyenletnek (rögzített D mátrixra) akkor és csak akkor van megoldása, ha D szimmetrikus pozitív (szemi)definit mátrix. (Miért?) Viszont egy ilyen egyenletnek nem csak egy A mátrix lehet a megoldása. Ennek ellenére a D kovariancia mátrix és az m várható érték mátrix meghatározza egy normális eloszlású vektor eloszlását. Ennek egy lehetséges magyarázata: Elég megmutatni, hogy a ξ normális eloszlású valószínűségi változó $Ee^{i(t,\xi)}$ karakterisztikus függvényét meghatározza a D kovariancia mátrix és m várható érték. Másrészt be lehet látni, hogy $Ee^{i(t,\xi)} = e^{-(t,Dt)/2+i(m,t)}$.

2. feladat Az eloszlások megegyezéséhez a tekintett vektorok normális eloszlása és nulla várható értéke miatt elegendő a kovarianciamátrixok megegyezését ellenőrízni. A konzisztencia könnyen látható, ha megértjük, miről van szó.

3. feladat (Vázlatos indoklás) A σ-algebra csak megszámlálható sok koordiátától függő eseményeket tartalmaz. Egy függvény ismerete viszont megszámlálható sok koordinátájában nem határozza meg, hogy folytonos-e, mert a többi koordinátában el lehet rontani a folytonosságot.

4. feladat Mind a 4), mind a 4a) mind a 4b) feladat megoldása a következő állítás igazolásán alapul:

Tekintsük az $(R^{[0,1]}, \mathcal{C}^{[0,1]}) = \left(\prod\limits_{t \in [0,1]} R_t, \prod\limits_{t \in [0,1]} \mathcal{B}_t \right)$ szorzatteret, ahol R_t a számegyenesnek $\mathcal{B}_t$ pedig a számegyenes σ-algebrájának egy a t számmal paraméterezett példánya. Jelölje Z az összes a $[0,1]$ intervallumon folytonos függvényből álló halmazt, és tekintsük az $(R^{[0,1]}, \mathcal{C}^{[0,1]})$ tér $(Z, \mathcal{Z})$ megszorítását a Z halmazra. Ez azt jelenti, hogy vesszük a Z halmazt, és $\mathcal{Z}$ azokból a B halmazokból áll, amelyek előállnak $B = Z \cap A$,

$A \in \mathcal{C}^{[0,1]}$ alakban. Nem nehéz belátni, hogy $\mathcal{Z}$ a Z halmaz bizonyos részhalmazaiból álló σ-algebra. Azt állítjuk, hogy tetszőleges a $C([0,1])$ térben Borel mérhető halmaz benne van a $\mathcal{Z}$ σ-algebrában. (Az is igaz, hogy a $\mathcal{Z}$ σ-algebra megegyezik a $C([0,1])$ tér Borel σ-algebrával, de ennek az állításnak a második felére nem lesz szükségünk.)

Az előbbi állítás bizonyításához elég megmutatni azt, hogy a $C([0,1])$ tér minden G nyílt halmazára $G \in \mathcal{Z}$, mert ebből következik, hogy minden a nyílt halmazok által generált σ-algebrájában levő B halmazra, $B \in \mathcal{Z}$.

Tovább lehet redukálni az állítást a következő tipusú halmazokra: Ha $x = x(t) \in C([0,1])$, $\varepsilon > 0$, akkor legyen $S(x,\varepsilon) = \{y\colon y \in C([0,1]),\ \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)| < \varepsilon\}$. Elég belátni, hogy minden $S(x,\varepsilon)$ tipusú halmazra $S(x,\varepsilon) \in \mathcal{Z}$, mert tetszőleges nyílt halmaz előállítható megszámlálható sok ilyen halmaz uniójaként. A következő meggondolás mutatja, hogy $S(x,\varepsilon) \in \mathcal{Z}$. Jelölje Q a racionális számok halmazát a $[0,1]$ intervallumban. Ekkor

$$S(x,\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{r\in Q} \left\{ y\colon y \in Z, |y(r) - x(r)| < \left(1 - \frac{1}{n}\right)\varepsilon \right\} \right) \in \mathcal{Z}.$$

(Miért?)

Az, hogy az $X(\cdot,\omega)$ folytonos trajektóriájú folyamat azt jelenti, hogy $X(\cdot,\omega) \in Z$ minden $\omega \in \Omega$ elemi eseményre. Mivel a $C([0,1])$ tér minden B Borel mérhető halmaza előáll $B = A \cap Z$, $A \in \mathcal{C}^{[0,1]}$ alakban, ezért $\{\omega\colon X(\cdot,\omega) \in B\} = \{\omega\colon X(\cdot,\omega) \in B \cap Z\} = \{\omega\colon X(\cdot,\omega) \in A\} \in \mathcal{A}$, és a $P(X(\cdot,\omega) \in A) = P(X(\cdot,\omega) \in B$ valószínűséget meghatározzák az $X(\cdot,\omega)$ sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásai. Innen következik mind a 4a) mind a 4b) feladat állítása.

5. feladat Parciális integrálással belátható, hogy

$$\begin{aligned}\int_x^\infty e^{-u^2/2}\,du &= \frac{1}{x}e^{-x^2/2} - \int_x^\infty \frac{1}{u^2}e^{-u^2/2}\,du \\ &= \frac{1}{x}e^{-x^2/2} - \frac{1}{x^3}e^{-x^2/2} + \int_x^\infty \frac{3}{u^4}e^{-u^2/2}\,du\ ,\end{aligned}$$

és ebből az azonosságból levezethető a feladat állítása.