A szeptember 28-i gyakorlat anyaga.

A szemináriumon a függetlenségről szóló legfontosabb fogalmakat és eredményeket tekintettük át.

Előzetes megjegyzés: A szövegben AB-vel és nem $A \cap B$-vel jelölöm a metszetet $A+B$-vel és nem $A \cup B$-vel az uniót. Mint értesültem róla, az az előadáson az $A \cap B$ illetve $A \cup B$ jelölést használják. Mivel az irodalomban mind a két jelölés gyakran előfordul, helyes, ha mind a két jelölésmódhoz hozzászoknak.

Mint arról szó volt eseményeknek egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező (mérhető) halmazait nevezzük. Egy A és B esemény (halmaz) akkor és csak akkor független, ha $P(AB) = P)A)P(B)$. Általánosabban:

Események függetlenségének definiciója: *Az $A_1, \dots, A_n$ események akkor (teljesen) függetlenek, ha az $\{1, \dots, n\}$ indexhalmaz minden $\{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ részhalmazára*

$$P(A_{j_1} \cdots A_{j_k}) = P(A_{j_1}) \cdots P(A_{j_k}).$$

Események végtelen $A_1, A_2, \dots$ sorozata akkor és csak akkor független, ha tetszőleges pozitív n egész számra az $A_1, \dots, A_n$ események függetlenek.

Néhány fontos tény a függetlenséggel kapcsolatban:

1. Adva egy A esemény vezessük be az A^ε jelölést, ahol $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon = 1$ estében $A^1 = A$, $\varepsilon = -1$ esetében $A^{-1} = \Omega \backslash A$ az A halmaz komplementere. (Gyakran használják az $\Omega \setminus A = \bar{A}$ jelölést is.) Ha $A_1, \dots, A_n$ független események, akkor az $A_1^{\varepsilon_1}, \dots, A_n^{\varepsilon_n}$ események az $\varepsilon_k = \pm 1$, $k = 1, \dots, n$ tetszőleges értékei esetén függetlenek.
2. Ha $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ független események, akkor $A_1 + A_2, A_3, \dots, A_n$ is független események.
3. Igaz az előző állítás alábbi általánosítása is: Legyenek $A_1, \dots, A_k, A_{k+1}, \dots, A_n$ független események. Ha a B esemény egy az $A_1, \dots, A_k$ események segítségével metszettel, unióval és komplementerképzéssel kifejezhető halmaz, akkor a B, $A_{k+1}, \dots, A_n$ halmazok függetlenek egymástól. Pontosabban megfogalmazva: Definiáljuk tetszőleges $j_s = 0$ vagy $j_s = 1$, $s = 1, \dots, k$ számokra a

   $$B(j_1, \dots, j_k) = A^{-1^{j_1}} \cdots A^{-1^{j_k}}$$

   halmazt. (Ugyanazt a jelölést használjuk mint az 1. megjegyzésben.) Ha $B = \bigcup\limits_{(j_1,\dots,j_k) \in \mathbf{C}} B(j_1, \dots, j_k)$, ahol $\mathbf{C}$ az összes lehetséges k hosszúságú 0—1 sorozatból álló halmaz tetszőleges részhalmaza, akkor a B, $A_{k+1}, \dots, A_n$ események függetlenek.
4. Lássunk példát arra, hogy például $k = 3$ esetében egy A, B és C halmaz esetében a $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ feltétel teljesülése nem elegendő az A, B és C események függetlenségéhez. Legyen $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4\}$,

$C = \{2,3,4\}$, $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$, $P(\{5\}) = 1 - \dfrac{4}{3\sqrt{3}}$.
Ekkor $ABC = \{2\}$, $P(ABC) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$, $P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $P(AB) = P(\{2,3\}) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$. Ezért $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$, de $P(AB) \neq P(A)P(B)$.

Az 1. állítás bizonyításának vázlata: Belátjuk, hogy ha A és B független események, akkor az A és $\bar{B}$ események függetlenek. Ekkor $P(A\bar{B}) = P(A \setminus B) = P(A) - P(AB)$, mert $AB \subset A$. Innen $P(A\bar{B}) = P(A) - P(A)P(B)$, mert A és B független események. Ezért $P(A\bar{B}) = P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(\bar{B})$. Innen, illetve a függetlenség definiciójából következik, hogy ha $A_1, \dots A_n$ események függetlenek, $1 \le j \le n$, akkor az $A_1, \dots, A_{j-1}\bar{A}_j, A_{j+1}, \dots, A_n$ események is függetlenek. Valóban, tekintsünk valamilyen $A_{j_1}, \dots A_{j_s}$ eseményeket, melyekre teljesül a $\{j_1, \dots, j_s\} \subset \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$ feltétel, és vezessük be az $A = A_{j_1} \cdots A_{j_s}$, $B = A_j$ eseményeket. Ekkor $P(AB) = P(A)P(B)$, mert a függetlenség definiciója alapján mind a két oldal a $P(A_j)P(A_{j_1}) \cdots P(A_{j_s})$ kifejezéssel egyenlő. Ezért az előbbiek alapján, $P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$. Továbbá,

$$P(A_{j_1} \cdots A_{j_s}) = P(A_{j_1}) \cdots P(A_{j_s}),$$

ezért

$$P(\bar{A}A_{j_1} \cdots A_{j_s}) = P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = P(\bar{A}_j)P(A_{j_1}) \cdots P(A_{j_s}),$$

és az $A_1, \dots, A_{j-1}\bar{A}_j, A_{j+1}, \dots, A_n$ események is függetlenek. Innen indukcióval következik, hogy az $A_1, \dots, A_n$ események közül valamely $A_{j_1}, \dots A_{j_k}$ eseményeket kicserélve ezek komplementerével az így kapott események függetlenek maradnak.

Ugyancsak fontos fogalom valószínűségi változók függetlensége. Idézzük fel először a valószínűségi változó fogalmát. Legyen adva egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező. Azt mondjuk, hogy $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, valószínűségi változó ezen a téren, ha $\xi = \xi(\omega)$ ezen a téren definiált (mérhető) valós értékű függvény. (Az, hogy a ξ függvény mérhető azt jelenti, hogy a számegyenes tetszőleges Borel mérhető B halmazára az $\{\omega\colon \xi(\omega) \in B\}$ halmaz mérhető halmaza az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ térnek, azaz eleme az $\mathcal{A}$ σ-algebrának. Ez technikai jellegű feltétel. Bár a részletek kidolgozása bizonyos mértékelméleti ismereteket igényel, a mérhetőség követelése nem jelent igazi megszorítást. Ugyanis minden definiálható függvény, tehát olyan függvény mely gyakorlatban előfordul, mérhető.)

Valószínűségi változók függetlenségének definiciója: *A $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók akkor és csak akkor (teljesen) függetlenek, ha a számegyenes tetszőleges Borel mérhető $B_1, \dots, B_n$ halmazaira*

$$P(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, \dots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1)P(\xi_2 \in B_2) \cdots P(\xi_n \in B_n).$$

Azt mondjuk, hogy valószínűségi változók, $\xi_1, \xi_2, \dots$ végtelen sorozata független, ha a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek tetszőleges $n = 1, 2, \dots$ számra.

Néhány fontos tény valószínűségi változók függetlenségével kapcsolatban:

Ahhoz, hogy független valószínűségi változókról beszélhessünk szükségünk van annak ellenőrzésére, hogy a tekintett valószínűségi változók valóban függetlenek-e. Ha a definiciót használjuk, akkor nehézséget okozhat az, hogy minden Borel mérhető B_k, $k = 1, \dots, n$ halmazt tekintenünk kell. Be lehet látni, hogy valójában elég bizonyos speciális Borel mérhető halmazokat tekinteni, ha a függetlenséget akarjuk ellenőrizni.

1. Tétel. *A $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók akkor és csak akkor (teljesen) függetlenek, ha tetszőleges $x_1, \dots, x_n$ valós számokra*

$$P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n) = P(\xi_1 < x_1) P(\xi_2 < x_2) \cdots P(\xi_n < x_n).$$

Ugyanezt a tényt kifejezhetjük az eloszlásfüggvények nyelvén is. Jelölje

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n), \quad -\infty < x_k < \infty, \ k = 1, \dots, n$$

a ξ_1, ..., ξ_n valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvényét. A ξ_1, ..., ξ_n valószínűségi változók akkor és csak akkor függetlenek, ha azok $F(x_1, \dots, x_n)$ együttes eloszlásfüggvénye $F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)$ alakú. Ebben az eseetben $F_k(x) = P(\xi_k < x)$, $k = 1, \dots, n$, a ξ_k valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a fenti faktorizációban.

2. Tétel. *Ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, akkor szorzatuk várható értéke megegyezik az egyes változók várható értékének szorzatával. Azaz, képletben kifejezve*

$$E\xi_1\xi_2 \cdots \xi_n = E\xi_1 \, E\xi_2 \cdots E\xi_n$$

Valójában némi megszorítást kell tennünk a fenti tételben. Tegyük fel, hogy $E|\xi_s| < \infty$ minden $1 \le s \le n$ esetén. Ez a feltétel biztosítja, hogy nem lép fel konvergencia (értelmezési) probléma a 2. tételben.

3. Tétel. *Ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, $g_1(x)$, ..., $g_n(x)$ (mérhető) függvények, akkor az $\eta_1 = g(\xi_1)$, ..., $\eta_n = g(\xi_n)$ valószínűségi változók is függetlenek.*

Kissé általánosabban: Legyenek

$$\xi_1, \dots, \xi_{l_1}, \xi_{l_1+1} \dots, \xi_{l_1+l_2} \dots, \xi_{l_1+\dots+l_{k-1}+1}, \dots, \xi_{l_1+\dots+l_k}$$

független valószínűségi változók, ahol $l_1, \dots, l_k$ pozitív egész számok. Ha $g_s(x_1, \dots, x_{l_s})$, $1 \le s \le k$ (mérhető) az R^{l_s} l_s dimenziós Euklidesi téren értelmezett függvények, akkor az $\eta_s = g_s(\xi_{l_{s-1}+1}, \dots, \xi_{l_s})$, $1 \le s \le k$, ($l_0 = 0$) valószínűségi változók függetlenek.

Következmény: *Ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, és $g_1(x), \dots, g_n(x)$ (mérhető) függvények a számegyenesen, akkor*

$$Eg_1(\xi_1) \cdots g_n(\xi_n) = Eg_1(\xi_1) \cdots Eg_n(\xi_n).$$

Valóban, a 3. tétel eredménye alapján az $\eta_s = g(\xi_s)$, $1 \le s \le k$ valószínűségi változók függetlenek, és a 2. tételt alkalmazva az η_s, $1 \le s \le k$ valószínűségi változókra megkapjuk a Következmény állítását.

Adva egy A esemény (azaz halmaz) egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, vezessük be ennek az A halmaznak $\chi_A = \chi_A(\omega)$ indikátor függvényét a

$$\chi_A = \chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \omega \in A \\ 0, & \text{ha } \omega \notin A \end{cases}$$

képlet segítségével.

Állítás: *Legyenek adva valamilyen $A_1, \dots, A_n$ események egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Az $A_1, \dots, A_n$ események akkor és csak akkor függetlenek, ha ezek $\chi_{A_1}, \dots, \chi_{A_n}$ indikátor függvényei független valószínűségi változók.*

Ennek az állításnak a bizonyítása lesz az egyik megoldásra kitűzött feladat.