Az október 26-i dolgozat
A változat

1. Egy urnában 4 egyforma papírlap van. Mindegyikre három számjegy van írva egymás mellé, mégpedig az elsőre $0,0,0$, a másodikra $0,1,1$, a harmadikra $1,0,1$, és a negyedikre $1,1,0$. Húzzunk ki egy lapot véletlenszerűen. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy egy olyan lapot húztunk, amelynek i-edik jegye 1-es, $i=1,2,3$. Mutassuk meg, hogy az A_i események páronként függetlenek, együttesen azonban nem! 4 pont
2. Véletlenszerűen felírunk két 1-nél kisebb pozitív számot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott számok mértani közepe kisebb mint $1/2$? 3 pont
3. Egy szabályos kockát kétszer feldobunk. A ξ valószínűségi változó jelentse a dobott páros számok számát, az η pedig a hatos dobások számát. Független-e ξ és η? Számítsuk ki ξ és η korrelációs együtthatóját! 5 pont
4. Péter feldob egy kockát. Ha páratlan számot dob, veszít 1 Ft-ot, ha hatost dob, nyer 4 Ft-ot, egyébként újra dobhat. A második dobásnál 1 Ft-ot nyer, ha párost dob, és 2 Ft-ot veszít, ha páratlant. Állapítsuk meg, a játék Péter számára előnyös, méltányos, vagy hátrányos! 3 pont
5. Egy szabályos dobókockát feldobunk egymás után százszor. Tekintsük a páratlan értékű dobások összegét, és számítsuk ki ennek várható értékét és szórásnégyzetét! 3 pont

Megoldások

1. Az A_1 esemény azt jelenti, hogy a $\{(1,0,1),(1,1,0)\}$ halmaz elemeinek valamelyikét az A_2 esemény azt jelenti, hogy az $\{(0,1,1),(1,1,0)\}$ halmaz elemeinek valamelyikét az A_3 esemény azt jelenti, hogy az $A_3=\{(0,1,1),(1,0,1)\}$ halmaz elemeinek valamelyikét tartalmazza a kihúzott lap. Innen a $A_1\cap A_2=\{(1,1,0)\}$, $A_1\cap A_3=\{(1,0,1)\}$, $A_2\cap A_3=\{(0,1,1)\}$. Ezért, $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)$, $P(A_1\cap A_2)=P(A_1\cap A_3)=P(A_2\cap A_3)=\frac{1}{4}$, tehát az A_1, A_2 és A_3 események páronként függetlenek. Másrészt $A_1\cap A_2\cap A_3=\emptyset$, ahonnan $P(A_1\cap A_2\cap A_3)=0$, és az A_1, A_2 és A_3 események nem függetlenek.
2. Legyen a két pont $0\le x,y\le 1$. Ekkor az (x,y) pont egyenletes eloszlású az egységnégyzeten. Az, hogy a két szám mértani közepe kisebb vagy egyenlő, mint $\frac{1}{2}$ azt jelenti, hogy $\sqrt{xy}\le\frac{1}{2}$, ami azt jelenti, hogy $xy\le\frac{1}{4}$. Ez úgy lehetséges, hogy vagy $0\le x\le\frac{1}{4}$ és $0\le y\le 1$, vagy $\frac{1}{4}\le x\le 1$, és $0\le y\le\frac{1}{4x}$. Ennek valószínűsége $\frac{1}{4}+\int_{1/4}^{1}\frac{1}{4x}\,dx=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left[\log x\right]_{\frac{1}{4}}^{1}=\frac{1}{4}\left(1+\log 1-\log\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}(1+\log 4)$.
3. Határozzuk meg a ξ és η valószínűségi változók együttes eloszlását:

$$a)\ P(\xi=2,\eta=2)=\frac{1}{36},\ b)\ P(\xi=2,\eta=1)=\frac{1}{9},\ c)\ P(\xi=2,\eta=0)=\frac{1}{9},$$
$$d)\ P(\xi=1,\eta=1)=\frac{1}{6},\ e)\ P(\xi=1,\eta=0)=\frac{1}{3},\ f)\ P(\xi=0,\eta=0)=\frac{1}{4}$$

Az a) eset azt jelenti, hogy mind a két dobás hatos; a b) eset azt jelenti, hogy vagy az első dobás hatos, a második dobás a 2-es és 4-es dobás valamelyike, vagy a második dobás hatos, az első dobás pedig a 2-es és 4-es dobás valamelyike; a c) eset azt jelenti, hogy mind a két dobás a 2-es és 4-es dobás valamelyike, a d) eset azt jelenti, hogy az egyik dobás 6-os, a másik páratlan; az e) eset azt jelenti, hogy az egyik dobás 2 vagy 4, a másik páratlan; az f) eset azt jelenti, hogy mind a két dobás páratlan.

Innen $E\xi\eta = 4 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$, $E\xi = 1$, $E\eta = \frac{1}{3}$, ahonnan $\operatorname{Cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta = \frac{1}{6}$. Továbbá, $\operatorname{Var}\xi = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Var}\eta = \frac{5}{18}$, ezért $\operatorname{Cor}(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Mivel a két valószínűségi változó korrellált, nem lehet független.

4. Legyen ξ_1 az első, ξ_2 az (esetleges) második dobás során szerzett nyereményünk. Minket az $E(\xi_1 + \xi_2) = E\xi_1 + E\xi_2$ értéke érdekel. $P(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2}$, $P(\xi_1 = 4) = \frac{1}{6}$, $P(\xi_1 = 0) = \frac{1}{3}$. Innen $E\xi_1 = \frac{4}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. $P(\xi_2 = 1) = \frac{1}{6}$, $P(\xi_2 = -2) = \frac{1}{6}$, $P(\xi_2 = 0) = \frac{2}{3}$, ahonnan $E\xi_2 = \frac{1}{6}$. $E\xi = 0$, azaz a játék méltányos.

5. Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 100$, valószínűségi változókat. Legyen $\xi_j = 1$, ha a j-ik dobás eredménye 1, $\xi_j = 3$, ha a j-ik dobás eredménye 3, $\xi_j = 5$, ha a j-ik dobás eredménye 5, $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye 2, 4 vagy 6. Ekkor a keresett összeg várható értéke $E\xi = E\left(\sum_{j=1}^{100} \xi_j\right) = \sum_{j=1}^{100} E\xi_j = 100E\xi_1$, szórásnégyzete $\operatorname{Var}\xi = \operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^{100} \xi_j\right) = \sum_{j=1}^{100} \operatorname{Var}\xi_j = 100\operatorname{Var}\xi_1 = 100(E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2)$. Ezért, $E\xi_1 = \frac{1}{6}(1 + 3 + 5) = \frac{3}{2}$, $E\xi_1^2 = \frac{1}{6}(1 + 9 + 25) = \frac{35}{6}$, $\operatorname{Var}\xi_1 = \frac{43}{12}$. $E\xi = 150$, $\operatorname{Var}\xi = \frac{4300}{12}$.

B változat

1. Egy dobozban 1-től 8-ig számozott, 8 db papírlap van. Véletlenszerűen kiveszünk egy lapot. Az A, B és C események jelentése legyen:

   A: a kivett lapon páros szám áll;

   B: 4-nél nem nagyobb szám áll;

   C: a kihúzott szám 2, vagy 5-nél nagyobb. Mutassuk meg, hogy

   $$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

   és a három esemény mégsem független! 4 pont
2. A $[0, 1]$ intervallumot két találomra felvett pont segítségével három részre osztjuk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kapott szakaszok mindegyike rövidebb mint 1/2? 3 pont
3. Két szabályos pénzérme mindegyikének egyik oldalára nullát, másikra pedig egyest írunk. A két érmét feldobjuk. Jelölje ξ a dobott számok összegét, η pedig a dobott számok szorzatát. Független-e ξ és η? Számítsuk ki ξ és η korrelációs együtthatóját! 5 pont
4. Egy részvény kiinduló ára egy peták. Egy év múlva vagy kétszeresére növekszik az ára, vagy felére csökken, vagy pedig változatlan marad – mindegyik lehetőség egyforma valószínűségű. A következő évben ugyanez történik, az előző évi változástól függetlenül. Mennyi két év múlva a részvényár várható értéke? 3 pont
5. Egy szabályos dobókockát feldobunk egymás után százszor. Tekintsük a páros értékű dobások összegét, és számítsuk ki ennek várható értékét és szórásnégyzetét! 3 pont

Megoldások

1. Az A esemény azt jelenti, hogy a $A = \{2, 4, 6, 8\}$ halmaz elemeinek valamelyike, a B esemény azt jelenti, hogy a $B = \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz elemeinek valamelyike, a C esemény azt jelenti, hogy az $C = \{2, 6, 7, 8\}$ halmaz elemeinek valamelyike tartalmazza a kihúzott lap sorszámát. Innen $A \cap B \cap C = \{2\}$, és $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$. Viszont, $B \cap C = \{2\}$, $P(B \cap C) = \frac{1}{8} \neq P(B)P(C)$.
2. Ezt a feladatot megoldottuk az október 10-i gyakorlat 2. feladatában. Ezt a megoldást idemásolom.

   Legyen az első ledobott pont koordinátája x a második ledobott ponté pedig y. Ekkor az (x, y) pont egyenletes eloszlású a $[0, 1] \times [0, 1]$ egységnégyzeten, és keletkezett szakaszok hossza x, $y - x$ és $1 - y$, ha $x < y$, és y, $x - y$ és $1 - x$, ha $x > y$. Akkor és csak akkor teljesül a feladat követelménye, ha a következő két (egymást kizáró) esemény valamelyike bekövetkezik:

   a.) $0 \leq x < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < y < 1$, $0 < y - x < \frac{1}{2}$,

   b.) $0 \leq y < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x < 1$, $0 < x - y < \frac{1}{2}$.

(Az a.) eset felel meg annak, hogy $x < y$, a b.) eset annak, hogy $y < x$.) Egyszerű geometriai meggondolás mutatja, hogy mind az a) mind a b) eset teljesülése azt jelenti, hogy az (x, y) pont az egységnégyzet egy $\frac{1}{2}$ befogókkal rendelkező szabályos derékszögű egyenlőszárú háromszögbe esik. Így a keresett valószínűség $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

3. Jelölje ξ_1 az első, ξ_2 a második feldobott érmén megjelenő szám értékét, $\xi = \xi_1 + \xi_2$ a számok összegét, $\eta = \xi_1\xi_2$ a számok szorzatát. Számítsuk ki ξ és η együttes eloszlását.

$$P(\xi = 0, \eta = 0) = \frac{1}{4}, \quad P(\xi = 1, \eta = 0) = \frac{1}{2}, \quad P(\xi = 2, \eta = 1) = \frac{1}{4}.$$

Innen $E\xi\eta = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, $E\xi = 1$, $E\eta = E\xi_1 E\xi_2 = \frac{1}{4}$, $\mathrm{Cov}\,(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta = \frac{1}{4}$, $\mathrm{Var}\,\xi = \frac{1}{2}$, $\mathrm{Var}\,\eta = \frac{3}{16}$ $\mathrm{Cor}\,(\xi, \eta) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. A ξ és η valószínűségi változók nem függetlenek.

4.) Jelölje ζ_1 azt, hogy hányszorosára nő a részvény árfolyama az 1 évben, ζ_2 azt, hogy hányszorosára nő a részvény árfolyama a 2. évben. Ekkor a részvény értéke két év múlva $\zeta_1\zeta_2$, és $E\zeta_1\zeta_2 = E\zeta_1 E\zeta_2$. $P(\zeta_j = 2) = P(\zeta_j = 1) = P(\zeta_j = \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$ mind $j = 1$ mind $j = 2$ esetben. Ezért $E\zeta_j = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + 1 + 2) = \frac{7}{6}$. Ezért a részvényár várható értéke két év múlva $E\zeta = \frac{49}{36}$.

5. Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 100$, valószínűségi változókat. Legyen $\xi_j = 2$, ha a j-ik dobás eredménye 2, $\xi_j = 4$, ha a j-ik dobás eredménye 4, $\xi_j = 6$, ha a j-ik dobás eredménye 6, $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye 1, 3 vagy 5. Ekkor a keresett összeg várható értéke $E\xi = E\left(\sum\limits_{j=1}^{100} \xi_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{100} E\xi_j = 100E\xi_1$, szórásnégyzete $\mathrm{Var}\,\xi = \mathrm{Var}\left(\sum\limits_{j=1}^{100} \xi_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{100} \mathrm{Var}\,\xi_j = 100\mathrm{Var}\,\xi_1 = 100(E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2)$. Ezért, $E\xi_1 = \frac{1}{6}(2 + 4 + 6) = 2$, $E\xi_1^2 = \frac{1}{6}(4 + 16 + 36) = \frac{56}{6}$, $\mathrm{Var}\,\xi_1 = \frac{16}{3}$. $E\xi = 200$, $\mathrm{Var}\,\xi = \frac{1600}{3}$.

Az október 31-i gyakorlaton tárgyalt feladatok

1.) Egy szabályos dobókockát feldobunk kétszer egymás után. Tekintsük az első dobás értékét és a két dobás maximumát. Határozzuk meg e két valószínűségi változó együttes eloszlását és kovarianciáját.

Megoldás. Jelölje ξ_1 az első, ξ_2 a második dobás eredményet, és legyen $\eta = \max(\xi_1, \xi_2)$. Ki kell számítanunk a (ξ_1, η) együttes eloszlását. A (ξ_1, η) véletlen vektor olyan (i, j) párokat vesz fel, amelyekre $1 \le i \le j \le 6$. Vezessük be a $P(\xi_1 = i, \eta = j) = P(i, j)$ jelölést. $P(i, i) = P(\xi_1 = i, \xi_2 \le i) = P(\xi_1 = i)P(\xi_2 \le i) = \frac{i}{36}$ minden $1 \le i \le 6$. Ha $1 \le i < j \le 6$, akkor $P(i, j) = P(\xi_1 = i, \xi_2 = j) = P(\xi_1 = i)P(\xi_2 = j) = \frac{1}{36}$. Ezek a képletek megadják a (ξ_1, η) együttes eloszlását. Innen $E\xi_1\eta = \sum\limits_{1\le i\le j\le 6} ijP(i, j) = \sum\limits_{i=1}^{6} i^2 \frac{i}{36} + \sum\limits_{1\le i<j\le 6} \frac{ij}{36} = \frac{441}{36} + \frac{175}{36} = \frac{617}{36}$. Továbbá $E\xi_1 = \frac{7}{2}$, és mivel $P(\eta = j) = \frac{2j-1}{36}$, ha $1 \le j \le 6$, ezért $E\eta = \sum\limits_{j=1}^{6} \frac{j(2j-1)}{36} = \frac{161}{36}$, és $E\xi_1 E\eta = \frac{1127}{72}$. Innen $\operatorname{Cov}(\xi_1, \eta) = E\xi_1\eta - E\xi_1 E\eta = \frac{1234}{72} - \frac{1127}{72} = \frac{107}{72}$.

2. Legyen egy urnában 20 piros és 30 fehér golyó. Húzzunk ki 20 golyót visszatevés nélkül. Számoljuk ki a kihúzott piros golyók számának várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 20$, valószínűségi változókat: $\xi_j(\omega) = 1$, ha a j-ik húzás eredménye piros, $\xi_j(\omega) = 0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér. Ekkor a $\xi = \sum\limits_{j=1}^{20} \xi_j$ összeg várható értékét és szórásnégyzetét kell kiszámolnunk. Továbbá $E\xi_j = E\xi_1 = \dfrac{2}{5}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \operatorname{Var}\xi_1 = \frac{2}{5} - \frac{4}{25} = \frac{6}{25}$, $E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 E\xi_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{19}{49} - \frac{4}{25} = -\frac{6}{1245}$, ha $j \ne k$. Innen a 20 dobásban kihúzott piros golyók számának várható értéke $20E\xi_1 = 20 \cdot \frac{2}{5} = 8$, és szórásnégyzete $20\operatorname{Var}\xi_1 + 20 \cdot 19 \cdot \operatorname{Cov}(\xi_1, \xi_2) = 20 \cdot \frac{6}{25} - 380 \cdot \frac{6}{1245} = \frac{144}{49}$.

3. Feldobunk egy szabályos pénzdarabot 100-szor egymás után. Tekintsük az egymást követő fej-fej dobássorozatok számát, és számítsuk ki ennek várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 99$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha a j-ik és $j+1$-ik dobások mindegyikének eredménye fej, $\xi_j = 0$ egyébként. Vegyük észre, hogy minket az $S = \sum\limits_{j=1}^{99} \xi_j$ valószínűségi változó várható értéke érdekel. Ezért $ES = E\left(\sum\limits_{j=1}^{99} E\xi_j\right) = \dfrac{99}{4}$, mivel $E\xi_j = \dfrac{1}{4}$. (Érdemes megjegyezni, hogy az ebben a feladatban tekintett ξ_j valószínűségi változók nem függetlenek, de a függetlenségre nincs szükség a várható érték additivításához.)

A szórásnégyzet kiszámításában viszont figyelembe kell vennünk azt, hogy nem csupa független valószínűségi változó összegét vizsgáljuk. Használjuk a szórásnégyzet kiszámolásánál a következő formulát.

$$\operatorname{Var} S = \operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^{99} \xi_j\right) = \sum_{j=1}^{99} \operatorname{Var} \xi_j + 2 \sum_{1 \le j < k \le 99} \operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k).$$

Továbbá $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_k) = 0$, ha $k \ge j+2$, mert ebben az esetben ξ_j és ξ_k függetlenek, és $E\xi_j\xi_{j+1} = \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$ minden $1 \le j \le 98$ számra. Ugyanis $E\xi_j\xi_{j+1} = \frac{1}{8}$, mivel $\xi_j\xi_{j+1} = 1$, ha a j-ik, $j+1$-ik és $j+2$-ik dobások mindegyike fej, aminek valószínűsége $\frac{1}{8}$, és $\xi_j\xi_{j+1} = 0$ egyébként. Továbbá $E\xi_j\xi_{j+1} = \frac{1}{8}$, $E\xi_j E\xi_{j+1} = \frac{1}{16}$, ahonnan $\operatorname{Cov}(\xi_j, \xi_{j+1}) = \frac{1}{16}$. Ezenkívül $\operatorname{Var} \xi_j = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$. Innen $\operatorname{Var} S = 99 \cdot \frac{3}{16} + 2 \cdot \frac{98}{16} = \frac{493}{16}$.