Az október 3-i gyakorlat témája

Megtárgyaljuk a valószínűségszámítás egyik fontos fogalmát, a feltételes valószínűséget, és néhány ezzel kapcsolatos feladatot. Szemléletesen a következőről van szó. Egy A esemény $P(A)$ valószínűsége azt fejezi ki, hogy mennyire valószínű ennek az A eseménynek a bekövetkezése. Viszont ennek a bizonyosságnak a mértéke megváltozik, ha tudjuk, hogy egy B esemény bekövetkezett-e vagy nem. Ezért definiáljuk az A esemény feltételes valószínűségét, feltéve, hogy a B esemény bekövetkezett. Ennek definiciója $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. Bár az alábbi azonosság triviális, fontossága miatt érdemes külön megfogalmazni.

$$P(A\cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(B), \quad \text{ha } P(A) > 0 \text{ és } P(B) > 0.$$

További egyszerű, de hasznos észrevételek:

Ha $B_1, \dots, B_n$ a valószínűségi mező egy particiója, azaz a $B_1, \dots, B_n$ események diszjunktak, és $\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k = \Omega$, akkor

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A\cap B_1) + P(A\cap B_2) + \cdots P(A\cap B_n) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n) \end{aligned}$$

minden A halmazra. Ezért

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)}.$$

Természetesen hasonló összefüggés írható fel a $P(B_j|A)$ feltételes valószínűségre tetszőleges j indexre. A fenti egyszerű összefüggés fontosságát az adja, hogy ez lehetővé teszi a $P(B_j|A)$ feltételes valószínűségek kiszámítását a 'fordított' $P(A|B_j)$ valószínűségek ismeretében, feltéve, hogy ismerjük a $P(B_j)$ valószínűségeket is.

1. Egy diák a feltett kérdésre (három lehetőség közül kell kiválasztani a helyeset) p valószínűséggel tudja a jó választ. Ha nem tudja, akkor tippel, és ez $\frac{1}{3}$ valószínűséggel ad helyes eredményt. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy tudja a választ feltéve, hogy jó választ adott?

   Megoldás: Jelölje A azt az eseményt, hogy tudja a jó választ, B azt az eseményt, hogy jó választ ad. A $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ feltételes valószínűség értékére vagyunk kiváncsiak. Ekkor $P(A\cap B) = P(A) = p$, $P(B) = P(A\cap B) + P(\bar{A}\cap B) = P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}) = P(A) + (1-P(A))P(B|\bar{A}) = \frac{1}{3} = p + \frac{1}{3}(1-p)$. Innen $P(A|B) = \frac{p}{p+\frac{1}{3}(1-p)}$.

2.) Egy urnában z zöld és s sárga golyó van. Egymás után kihúzunk négy golyót úgy, hogy minden húzás után a golyót visszadobjuk az urnába, és vele együtt az urnába dobunk 2 ellenkező színű golyót. Mi a valószínűsége egy zöld, zöld, zöld, sárga húzássorozatnak?

Megoldás: Számoljuk ki először annak a valószínűségét, hogy az első húzás eredménye Z=(zöld), annak feltételes valószínűségét, hogy a második húzás Z, feltéve, hogy az első húzás Z, annak a feltételes valószínűségét, hogy a harmadik húzás eredménye Z feltéve, hogy előtte Z, Z és annak feltételes valószínűségét, és hogy a negyedik húzás eredménye S feltéve, hogy előtte Z, Z, Z húzás történt. Ez a valószínűség, illetve ezek a feltételes valószínűségek $\frac{z}{z+s}$, $\frac{z}{z+s+2}$, $\frac{z}{z+s+4}$, $\frac{s+6}{z+s+6}$. A keresett valószínűség $\frac{z}{z+s} \cdot \frac{z}{z+s+2} \cdot \frac{z}{z+s+4} \cdot \frac{s+6}{z+s+6}$.

3.) Reggel valaki hazulról elmenve a lakáskulcsot elteszi, mégpedig úgy, hogy 0.5 valószínűséggel teszi a kabátzsebébe, 0.3 valószínűséggel a nadrágzsebébe és 0.2 valószínűséggel a mellényzsebébe. A nap folyamán mindenfelé jár, ezért a lakáskulcs a kabátzsebéből 0.1, a nadrágzsebéből 0.2, a mellényzsebéből viszont 0 valószínűséggel esik ki. Este hazatérve emberünk először a kabát majd a nadrágzsebében keresi a kulcsot, de egyik helyen sem találja. Mi annak a valószínűsége, hogy a lakáskulcs ott van a mellényzsebében?

Megoldás: Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy emberünk a lakáskulcsot a kabát A_2, hogy a nadrág és A_3, hogy a mellényzsebébe tette. Jelölje továbbá B azt az eseményt, hogy a kulcs nem veszett el. Ekkor feltételeink szerint az A_1, A_2 és A_3 események egymást kizáróak, $P(A_1) = 0.5$, $P(A_2) = 0.3$, $P(A_3) = 0.2$ továbbá $P(B|A_1) = 0.9$, $P(B|A_2) = 0.8$ és $P(B|A_3) = 1$. Vezessük be a $C = (\bar{B} \cap A_1) \cup (\bar{B} \cap A_2) \cup A_3$ eseményt. Ekkor C jelenti azt az eseményt, hogy emberünk este nem találta a lakáskulcsot sem a kabát sem a nadrágzsebében. Ezért minket a $P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)}$ feltételes valószínűség érdekel. Viszont $P(C) = P(A_1 \cap \bar{B}) + P(A_2 \cap \bar{B}) + P(A_3) = P(\bar{B}|A_1)P(A_1) + P(\bar{B}|A_2)P(A_2) + P(A_3) = 0.1 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.3 + 0.2 = 0.31$, és $P(B \cap C) = P(B \cap A_3) = P(A_3)P(B|A_3) = P(A_3) = 0.2$. Innen a minket érdeklő feltételes valószínűség értéke $\frac{0.2}{0.31} = \frac{20}{31}$.

4.) A Fazekas könyv egyik feladata (3.4 Példa a 32. oldalon) arról szól, hogy ha egy n létszámú csoportban r véletlenül kiválasztott diáknak dolgozatot kell írni, mi annak a feltételes valószínűsége, hogy a legrosszabb diáknak is dolgozatot kell írni, feltéve, hogy a legjobb diák is dolgozatot ír. Heurisztikusan úgy érvelhetünk, hogy ha a legjobb diák dolgozatot ír, akkor annak (feltételes) valószínűsége, hogy a legrosszabb diák is dolgozatot ír, azzal egyenlő, hogy a maradék $n-1$ diák közül őt is kiválasztják a maradék $r-1$ dolgozatíró közé, tehát $\frac{r-1}{n-1}$. Kissé pontosabban, annak valószínűsége, hogy mind a ketten dolgozatot írnak, $\frac{r(r-1)}{n(n-1)}$, annak, hogy a legjobb diák dolgozatot ír $\frac{r}{n}$, ahonnan következik az állítás. Ha a könyvben szereplő eredményt egyszerűbb alakra hozzuk, látjuk hogy az eredmény helyes. Adjunk közvetlen, a szemléletet követő precíz bizonyítást arra, hogy a fenti formulák az adott valószínűségekre helyesek.

Megoldás: Az urna visszatevés nélküli húzás modelljének érvelését alkalmazhatjuk ebben az esetben is. Tegyük fel, hogy egymás után kiválasztjuk a dolgozatot írókat, Minden lépésben az eddig ki nem választottak valamelyikét választjuk ki egyforma valószínűséggel. Ha kijelöljük (az urnából való húzásnál szereplő érvelést használva) egy külön (egy elemű) csoportba a legjobb, egy külön (egy elemű) csoportba a legrosszabb diákot, egy külön csoportba az összes többit, akkor rögzítve egy $1 \le j, k \le r$, $j \ne k$ számpárt kapjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy a j-ik választásnál választunk az első, a k-ik választáskor a második csoportból, megegyezik annak a valószínűségével, hogy az első választáskor választunk az első és a második választáskor a második csoportból. Ennek valószínűsége viszont $\frac{1}{n(n-1)}$. Mivel a fenti események különböző (j, k) számpárokra kizárják egymást, ezért annak valószínűsége, hogy a legjobb és alegrosszabb diák is dolgozatot ír $\frac{r(r-1)}{n(n-1)}$. Hasonlóan, látható, hogy annak a valószínűsége, hogy a legjobb diák dolgozatot ír az $\frac{r}{n}$ számmal egyenlő.

5.) Mi annak a valószínűsége, hogy egy (szabályos) dobókocka mindkét dobásának az eredménye hatos feltéve, hogy legalább az egyik dobás hatos?

Megoldás: Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy az első dobás eredménye hatos, A_2 azt az eseményt, hogy a második dobás eredménye hatos. Akkor minket a $P(A_1 \cap A_2 | A_1 \cup A_2)$ feltételes valószínűség érdekel. Viszont

$$P(A_1 \cap A_2 | A_1 \cup A_2) = \frac{P((A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cup A_2))}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1 \cup A_2)}.$$

Másrészt $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{36}$, $P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$. Innen a keresett feltételes valószínűség $\frac{1}{11}$.

A következő (egyszerű) feladat célja az, hogy összehasonlítsuk annak eredményét az előbb tárgyalt feladattal, és megbeszéljük, hogy mást jelent az a feltétel, hogy két kockadobás közül az egyik előírt (például az első) dobás hatos, és az hogy adódott hatos dobás. Képesek vagyunk-e szemléletünk alapján számolás nélkül megmondani, melyik feltevés mellett nagyobb annak a feltételes valószínűsége, hogy mind a két dobás hatos?

6.) Egy szabályos dobókockát feldobunk kétszer egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy mind a két dobás hatos, feltéve hogy az első dobás hatos?

Megoldás: Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy az első dobás hatos, A_2 pedig azt az eseményt, hogy a második dobás hatos. Ekkor $A_1 \cap A_2$ az az esemény, hogy mind a két dobás hatos, és minket a $P(A_1 \cap A_2 | A_1)$ feltételes valószínűség értéke érdekel. Viszont, $P(A_1 \cap A_2 | A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \frac{P(A_1)P(A_2)}{P(A_1)} = P(A_2) = \frac{1}{6}$.

Házi feladat:

Egy szabályos pénzdarabot feldobunk háromszor egymás után. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy mind a három dobás fej, feltéve, hogy legalább két fejdobás történt?

7.) Három gép gyárt csavarokat, az egyik 0.01 a második 0.02 a harmadik 0.03 valószínűséggel gyárt hibás csavarokat. A csavarokat egy raktárba viszik, és összekeverik őket. Egy gyártott csavar 0.5 valószínűséggel készült az első 0.3 valószínűséggel a második és 0.2 valószínűséggel készült a harmadik gépen. Kiveszünk egy csavart, megnézzük, és azt találjuk, hogy az hibás. Milyen valószínűséggel készült a csavar eme feltételek mellett az első gépen?

Megoldás: Jelölje A_1, A_2 illetve A_3 azt az eseményt, hogy a csavar az első, második vagy harmadik gépen készült, B azt az eseményt, hogy a csavar hibás. Ekkor minket a $P(A_1|B)$ feltételes valószínűség érdekel. Tudjuk, hogy $P(A_1) = 0.5$, $P(A_2) = 0.3$, $P(A_3) = 0.2$, továbbá $P(B|A_1) = 0.01$, $P(B|A_2) = 0.02$, és $PB(B|A_3) = 0.03$. Ekkor

$$\begin{aligned} P(A_1|B) = \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} &= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)} \\ &= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)} \\ &= \frac{0.01 \cdot 0.5}{0.01 \cdot 0.5 + 0.02 \cdot 0.3 + 0.03 \cdot 0.2}. \end{aligned}$$

8. Egy teszt-vizsgán, ahol három lehetőség közül kell kiválasztani a helyes választ ketten vesznek részt. Az első résztvevő p_1, a második résztvevő pedig p_2 valószínűséggel tudja a helyes választ, továbbá a vizsga két résztvevője egymástól függetlenül tudja vagy nem tudja, hogy mi a helyes válasz. Mindkét résztvevő a jó választ jelöli meg, ha tudja azt, ellenkező esetben pedig mindentől függetlenül egyforma valószínűséggel véletlenül bejelöli a három lehetséges válasz valamelyikét. Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy mind a két résztvevő a helyes választ jelölte be, feltéve, hogy ugyanazt a választ adta?

   Megoldás: Jelölje A azt az eseményt, hogy az első diák jól válaszol, B azt az eseményt, hogy a második diák jól válaszol, D_1 azt az eseményt, hogy mind a két jelölt az elsőként felsororolt feltüntetett rossz választ D_2 pedig azt az eseményt, hogy mind a két jelölt a másodiknak felsorolt rossz választ adja. Ekkor $C = (A \cap B) \cup D_1 \cup D_2$ jelöli azt az eseményt, hogy a két diák egyformán válaszol. Bennünket a $P(A \cap B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A \cap B)}{P((A \cap B) \cup D_1 \cup D_2)}$ feltételes valószínűség érdekel. Viszont $P(A) = p_1 + \frac{1}{3}(1 - p_1) = \frac{1+2p_1}{3}$, $P(B) = \frac{1+2p_2}{3}$, és az A és B események függetlenek. Innen $P(A \cap B) = \frac{1+2p_1}{3} \cdot \frac{1+2p_2}{3}$, $P(C) = R(A \cap B) + P(D_1) + P(D_2) = \frac{1+2p_1}{3} \cdot \frac{1+2p_2}{3} + 2\frac{1-p_1}{3} \cdot \frac{1-p_2}{3}$. Ugyanis $P(D_1) = P(D_2) = \frac{(1-p_1)}{3} \cdot \frac{(1-p_2)}{3}$, mivel az első jelölt akkor válaszol rosszul, ha nem tudja a helyes választ, és a három lehetőség közül az első rossz választ jelöli ki, aminek a valószínűsége $(1-p_1)\frac{1}{3}$, annak a valószínűsége, hogy a második jelölt ugyanezt a választ adja $(1 - p_1)\frac{1}{3}$, a két jelölt egymástól függetlenül válaszol, ahonnan $P(D_1) = \frac{(1-p_1)}{3} \cdot \frac{(1-p_2)}{3}$. Hasonlóan, a $P(D_2)$ valószínűségre ugyanazt az értéket kapjuk. Innen

$$P(A \cap B|C) = \frac{(1 + 2p_1)(1 + 2p_2)}{(1 + 2p_1)(1 + 2p_2) + 2(1 - p_1)(1 - p_2)}.$$

9.) Adott két város, az igazmondók és hazugok városa. Az igazmondók városában egy kérdésre 0.9 valószínűséggel helyes a hazugok városában pedig 0.8 valószínűséggel hamis választ adnak. Megérkezünk véletlenül az egyik városba, egyforma, azaz $\frac{1}{2}$ valószínűséggel az igazmondók vagy a hazugok városába. Megkérdezzük az első embert, akivel találkozunk, hogy az igazmondók városába értünk-e. Azt a választ kapjuk, hogy nem. Mi a valószínűsége annak, hogy az igazmondók városába érkeztünk?

Megoldás: Jelölje A azt az eseményt, hogy az igazmondók városába érkeztünk, és B azt az eseményt, hogy a véletlenül megkérdezett ember azt válaszolja kérdésünkre, hogy nem az igazmondók városába érkeztünk. Ekkor minket a $P(A|B)$ feltételes valószínűség értéke érdekel. Tudjuk továbbá, hogy $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B|A) = 0.1$, $P(B|\bar{A}) = 0.2$. (Az első esetben az igazmondók városában megkérdezett ember hazudik, a másodikban a hazugok városában megkérdezett ember igazat mond.) Ezért

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})} = \frac{0.1 \cdot 0.5}{0.1 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.5} = \frac{1}{3}.$$

Házi feladat:

Egy háromnapos nyaraláson veszünk részt a Balatonnál. Minden nap a többi naptól függetlenül $\frac{2}{3}$ valószínűséggel kisüt a nap, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel nem süt ki. Azokon a napokon, amikor kisüt a nap, $\frac{2}{3}$ valószínűséggel megfürdünk a Balatonban és fagylaltot is eszünk, $\frac{1}{6}$ valószínűséggel megfürdünk a Balatonban, de nem eszünk fagylaltot, $\frac{1}{6}$ valószínűséggel nem fürdünk meg a Balatonban, de eszünk fagylaltot, és nulla annak a valószínűsége, hogy nem fürdünk és fagylaltot sem eszünk. Ha nem süt a nap, akkor $\frac{1}{4}$ annak a valószínűsége, hogy eszünk fagylaltot, és fürdünk, $\frac{1}{4}$ annak a valószínűsége, hogy eszünk fagylaltot, de nem fürdünk, $\frac{1}{4}$ annak a valószínűsége, hogy nem eszünk fagylaltot, de fürdünk, és ugyancsak $\frac{1}{4}$ annak a valószínűsége, hogy sem fagylaltot nem eszünk, sem a Balatonban nem fürdünk meg. Mi annak a feltételes valószínűsége, hogy megfürödtünk a Balatonban, feltéve hogy nem ettünk fagylaltot?

10.) Bizonyítsuk be a következő azonosságot, amelyet teleszkóp szabálynak is szoktak nevezni: Ha adva vannak $A_1, \dots, A_k$ események egy valószínűségi mezőn, amelyekre $P(A_1 \cap \dots \cap A_k) > 0$, akkor

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_k|A_1 \cap \dots \cap A_{k-1})$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} &P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_k|A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}) \\ &\quad = P(A_1)\frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}\frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{P(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_{k-1} \cap A_k)}{P(A_1 \cap \dots \cap A_{k-1})} \\ &\quad = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k). \end{aligned}$$

11.) Két különböző fáról leszednek 100 almát, és beteszik két különböző (megkülönböztethetetlen) ládába. Ez egyik fáról szedett almák (egymástól függetlenül) $\frac{1}{4}$

a másik fáról szedett almák pedig (szintén egymástól függetlenül) $\frac{1}{10}$ valószínűséggel férgesek. Kiveszünk az egyik (véletlenül kiválasztott) ládából két almát és mind a kettő férges. Ezek után kiveszünk a másik ládából egy almát. Mi annak a valószínűsége, hogy ez az alma már nem férges?

Megoldás: Értsük meg először pontosabban a feladatot. Jelölje B azt az eseményt, hogy első alkalommal a rosszabb fáról leszedett almákat tartalmazó ládához nyúlunk. Ekkor egyrészt $P(B) = \frac{1}{2}$. Másrészt, ha egymás után, esetleg váltogatva a ládákat kiveszünk egymás után a ládákból almákat, definiáljuk a $j_1, \dots, j_k$ húzássorozatot, ahol mindegyik $j_s = \pm 1$, $j_1 = 1$, $j_s = 1$ azt jelenti, hogy a s-ik húzás során az elsőnek kiválasztott ládából, $j_s = -1$ pedig azt, hogy a másik ládából választottunk almát, akkor $A(j_1, \dots, j_n)$-nel jelölve azt az eseményt, hogy minden kiválasztott alma férges, felírhatjuk, hogy

$$P(A(j_1, \dots, j_n)|B) = \left(\frac{1}{4}\right)^{u(j_1,\dots,j_n)} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-u(j_1,\dots,j_n)},$$
$$P(A(j_1, \dots, j_n)|\bar{B}) = \left(\frac{1}{10}\right)^{u(j_1,\dots,j_n)} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-u(j_1,\dots,j_n)},$$

ahol $u(j_1, \dots, j_n)$ jelöli a $j_1, \dots, j_n$ sorozatban szereplő $+1$ jelek számát. Hasonlóan fel tudjuk írni annak feltételes valószínűségét, hogy egy előírt húzássorozat esetén, amelyikben megmondjuk, hogy mikor melyik ládából húztunk almát a férges és jó almahúzásoknak előírt sorozata jelenik meg, feltéve a B eseményt vagy annak komplementerét, a $\bar{B}$ eseményt. Jelölje C azt az eseményt, hogy az első két húzásban férges almát húzunk, D pedig azt, hogy a harmadik húzásban (a láda megváltoztatása után) jó almát húzunk. Ekkor a $P(D|C) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)}$ feltételes valószínűséget akarjuk kiszámolni. Viszont,

$$P(C) = P(C|B)P(B) + P(C|\bar{B})P(\bar{B}) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2\right) = \frac{29}{800},$$

$$\begin{aligned} P(C \cap D) &= P(C \cap D|B)P(B) + P(C \cap D|\bar{B})P(\bar{B}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{9}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 \frac{3}{4}\right) = \frac{51}{1600}. \end{aligned}$$

Innen $P(D|C) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{51}{58}$.