A december 12-i gyakorlat témája

A hipotézisvizsgálat fontos problémája a következő két kérdés vizsgálata.

a) Egy véletlen mennyiség várható értékének nagyságáról van bízonyos feltevésünk. Ellenőrizni akarjuk e feltevés helyességét. Ennek érdekében méréseket végzünk, és ezek alapján kívánunk dönteni. Ez formálisan azt jelenti, hogy ellenőrizni akarjuk, $X_1, \dots, X_n$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók egy sorozata (amit mintának is nevezünk), μ várható értékű valószínűségi változókból áll-e. Feltételezzük, hogy ezek a valószínűségi változók normális eloszlásúak. (E feltételezés mögött a műszaki életben hibatörvénynek nevezett jelenség van.)

b) Két különböző véletlen mennyiség van, és ezek μ_1 és μ_2 várható értékét akarjuk összehasonlítani. Van amikor arra vagyunk kiváncsiak, hogy egyenlőek-e ezek a várható értékek, van amikor arra, hogy igaz-e, hogy $\mu_1 \ge \mu_2$. A kérdés eldöntése érdekében független méréseket végzünk. Bizonyos $X_1, \dots, X_n$ μ_1 várható értékű, és $Y_1, \dots, Y_m$ μ_2 várható értékű független méréseket végzünk, és ezek alapján kívánunk döntést hozni. Most is feltesszük, hogy a mért értékek normális eloszlásúak.

Mind a két feladat vizsgálatában megkülönböztetünk két különöző esetet. Az első (egyszerűbb) eset az, amikor ismerjük a megfigyelt véletlen mérések ingadozását mérő szórásnégyzetet, a második (bonyolultabb) eset az, amikor ezt nem ismerjük. Az első esetben a centrális határeloszlástétel segítségével tudjuk megadni az eljárást. Akkor, amikor ismerjük a megfigyelt valószínűségi változó szórásnégyzetét, az a) kérdésre adott eljárást egymintás U-próbának, a b) kérdésre adott eljárást kétmintás U-próbának nevezzük. (Van, ahol ezeket az eljárásokat Z-próbának hívják.)

Egymintás U-próba. *Legyen adva független normális eloszlású μ várható értékű és (ismert) σ^2 szórásnégyzetű valószínűségi változók $X_1, \dots, X_n$ sorozata. Készítsük el e valószínűségi változók $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ átlagát és a*

$$U(X_1, \dots, X_n) = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$$

próbafüggvényt. Az $U(X_1, \dots, X_n)$ próbafüggvény a fenti tulajdonságok teljesülése esetén standard normális eloszlású. Ezen összefüggés alapján tudunk előírt ε elsőfajú hibával rendelkező jó döntést hozni arról, hogy elfogadjuk-e az $EX_1 = \mu$ vagy $EX_1 \ge \mu$ feltevést.

Kétmintás U-próba. *Legyen adva független normális eloszlású valószínűségi változók $X_1, \dots, X_n$ sorozata μ_1 várható értékkel és (ismert) σ_1^2 szórásnégyzettel, illetve független normális eloszlású valószínűségi változók $Y_1, \dots, Y_m$ sorozata μ_2 várható értékkel és (ismert) σ_2^2 szórásnégyzettel. Tegyük fel azt is, hogy az $X_1, \dots, X_n$ és $Y_1, \dots, Y_m$ valószínűségi változók sorozata független egymástól. Vezessük be az $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ és $\bar{Y}_m = \frac{Y_1 + \dots + Y_m}{m}$ átlagokat valamint az*

$$U(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m) = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}$$

próbafüggvényt. Az $U(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m)$ próbafüggvény a fenti tulajdonságok teljesülése esetén standard normális eloszlású. Ezen összefüggés alapján tudunk előírt ε elsőfajú hibával rendelkező jó döntést hozni arról, hogy elfogadjuk-e a $\mu_1 = \mu_2$ vagy $\mu_1 \geq \mu_2$ feltevést.

Ha nem ismerjük a szórásnégyzetet, akkor érdemes azt jól megbecsülni, és a(z ismeretlen) szórásnégyzet helyett annak becsült értékével számolni. Ezen alapul az egy és kétmintás U-statisztika eljárása. Ennek kidolgozása érdekében oldjuk meg először a következő feladatot.

1.) Legyen adva független $F(x)$ eloszlású valószínűségi változók $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sorozata. Legyen $\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$. Mutassuk meg, hogy az $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum\limits_{j=1}^{n} (\xi_j - \bar{\xi})^2$ kifejezés a szórásnégyzet torzítatlan becslése, azaz $ES_n^2 = \sigma^2$. Továbbá

$$\operatorname{Var} S_n = \frac{1}{n} \left(E(\xi_1 - E\xi_1)^4 - \frac{n-3}{n-1} (\operatorname{Var} \xi_1)^2 \right).$$

Megoldás: Írjuk át az S_n^2 kifejezést számunkra alkalmasabb alakban.

$$\begin{aligned} S_n^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (\xi_j - \bar{\xi})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (\xi_j^2 + \bar{\xi}^2 - 2\bar{\xi}\xi_j) \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 - n\bar{\xi}^2 \right) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 - \frac{1}{(n-1)n} \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j \right)^2. \end{aligned}$$

Továbbá, $E \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j^2 = nE\xi_1^2$, $E \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j \right)^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} E\xi_j^2 + 2 \sum\limits_{1 \leq j < k \leq n} E\xi_j \xi_k = nE\xi_1^2 + n(n-1)E\xi_1\xi_2 = nE\xi_1^2 + n(n-1)(E\xi_1)^2$. Innen $ES_n^2 = \frac{1}{n-1} nE\xi_1^2 - \frac{1}{n-1} E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2 = E\xi_1^2 - (E\xi_1)^2 = \operatorname{Var} \xi_1$.
A $\operatorname{Var} S_n$ szórásnégyzetet számoljuk ki először abban a speciális esetben, amikor $E\xi_1 = 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} \operatorname{Var} S_n &= \operatorname{Var} \left[\frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \xi_i \xi_j \right] \\ &= \operatorname{Var} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_j \right) + \operatorname{Var} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{2}{n(n-1)} \xi_i \xi_j \right), \end{aligned}$$

mert a $\frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$ és $\sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} \frac{2}{n(n-1)} \xi_i \xi_j$ valószínűségi változók korrelálatlanok. A további korrelálatlanságok miatt $\operatorname{Var} \left(\frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j \right) = \frac{1}{n} \operatorname{Var} \xi_1^2 = \frac{1}{n} (E\xi_1^4 - (E\xi_1^2)^2)$, és

$\mathrm{Var}\left(\sum_{1\le i<j\le n} \frac{2}{n(n-1)}\xi_i\xi_j\right) = \frac{2}{n(n-1)}(E\xi_1^2)^2$, ahonnan

$$\mathrm{Var}\, S_n = \frac{1}{n}\left(E\xi_1^4 - \frac{n-3}{n-1}(E\xi_1^2)^2\right).$$

Innen következik a feladat állítása abban a speciális esetben, ha $E\xi_1 = 0$. Az általános eset visszavezethető erre a speciális esetre a $\tilde\xi_j = \xi_j - E\xi_j$, $\hat\xi = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde\xi_j$ változók bevezetésével az $\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(\xi_j-\bar\xi)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(\tilde\xi_j-\hat\xi)^2$ azonosság felhasználásával.

Abban az esetben, ha nem ismerjük a megfigyelt véletlen mennyiségek szórásnégyzetét, a szórásnégyzet helyett annak becslését, az úgynevezett tapasztalati szórásnégyzetet használjuk. Ismertetem a tapasztalati szórásnégyzet definicióját, illetve azt a tételt, amely a vizsgált kérdések megoldására javasolt módszerek hátterében van akkor, ha a a szórásnégyzetet nem ismerjük. Ezeket a módszereket egymintás és kétmintás t-próbának hívják.

Tapasztalati szórásnégyzet definiciója. *Legyen $X_1,\dots,X_n$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata. Az*

$$S_n^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\bar X)^2, \quad \textit{ahol } \bar X = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_k \tag{A}$$

képlettel megadott kifejezést e valószínűségi változók tapasztalati szórásnégyzetének nevezik.

Az előző feladat célja annak megmagyarázása volt, hogy miért érdemes a tapasztalati szórásnégyzet fent bevezetett alakját használni. Ez azt mutatja, hogy a tapasztalati szórásnégyzet a valódi szórásnégyzet olyan torzítatlan becslése, amelynek a szórásnégyzete nagy minta esetében kicsi, $\frac{1}{n}$ nagyságrendű. Független standard normális valószínűségi változók esetében további tartalmas eredményeket lehet bizonyítani a tapasztalati szórásnégyzet viselkedését. Ezt mondja ki a következő tétel, amely a t-statisztikák hátterében van.

Tétel. *Legyen $X_1,\dots,X_n$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók sorozata. Ekkor az általuk az (A) képletben definiált S_n^{*2} valószínűségi változó és az $\tilde X_n = \frac{1}{\sqrt n}\sum_{j=1}^{n}X_j$ valószínűségi változók egymástól függetlenek. Továbbá az $(n-1)S_n^{*2}$ valószínűségi változó eloszlása az $n-1$ szabadságfokú χ-négyzet, az $\tilde X_n$ valószínűségi változó eloszlása a standard normális eloszlás.*

A későbbi eredmények megfogalmazása érdekében érdemes bevezetni a Student eloszlás definicióját.

Student eloszlás definiciója. *Legyen X és Y két független valószínűségi változó, amelyek közül X standard normális eloszlású, Y pedig n szabadságfokú χ-négyzet eloszlású. Ekkor az $\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ hányados eloszlása az n szabadságfokú Student eloszlás.*

Megfogalmazom az egy és kétmintás t-próbák alapjául szolgáló eredményeket.

Egymintás t-próba. *Legyen adva független normális eloszlású μ várható értékű és (ismeretlen) σ^2 szórásnégyzetű valószínűségi változók $X_1, \dots, X_n$ sorozata. Készítsük el e valószínűségi változók $\bar{X}_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ átlagát és a*

$$t_{n-1}(X_1, \dots, X_n) = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^{*2}}}\sqrt{n}$$

próbafüggvényt, ahol az S_n^{*2} kifejezést az (A) képletben definiáltuk. A $t_{n-1}(X_1, \dots, X_n)$ próbafüggvény eloszlása a fenti tulajdonságok teljesülése esetén az $n-1$ szabadságfokú Student eloszlás. Ezen összefüggés alapján tudunk előírt ε elsőfajú hibával rendelkező jó döntést hozni arról, hogy elfogadjuk-e az $EX_1 = \mu$ vagy $EX_1 \ge \mu$ feltevést.

Kétmintás t-próba. *Legyen adva független normális eloszlású valószínűségi változók $X_1, \dots, X_n$ sorozata μ_1 várható értékkel és (ismeretlen) σ^2 szórásnégyzettel, illetve független normális eloszlású valószínűségi változók $Y_1, \dots, Y_m$ sorozata μ_2 várható értékkel és (ismeretlen) σ^2 szórásnégyzettel. (Feltettük, hogy a két sorozat ismeretlen szórásnégyzete megegyezik.) Tegyük fel azt is, hogy az $X_1, \dots, X_n$ és $Y_1, \dots, Y_m$ valószínűségi változók sorozata független egymástól. Vezessük be az $\bar{X}_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ és $\bar{Y}_m = \frac{Y_1+\cdots+Y_m}{m}$ átlagokat valamint az*

$$t_{n+m-2}(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m) = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\sqrt{(n-1)S_n^{*2} + (m-1)S_m^{*2}}}\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

próbafüggvényt, ahol az S_n^{*2} valószínűségi változót az (A) képletben definiáltuk, és az S_m^{*2} valószínűségi változót szintén hasonlóan definiáljuk az (A) formula segítségével azzal a különbséggel, hogy az $Y_1, \dots, Y_m$ mintát használjuk az $X_1, \dots, X_m$ minta helyett. A $t_{n+m-2}(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m)$ próbafüggvény eloszlása a fenti tulajdonságok teljesülése esetén az úgynevezett $n-m-2$ szabadságfokú Student eloszlás. Ezen összefüggés alapján tudunk előírt ε elsőfajú hibával rendelkező jó döntést hozni arról, hogy elfogadjuk-e az $\mu_1 = \mu_2$ vagy $\mu_1 \ge \mu_2$ feltevést.

A következő, a MobiDIÁK könyvtár 'Feladatok a hipotézisvizsgálat témaköréből' származó 1.2 példa az egy és kétmintás U-próbára mutat példát.

2.) Egy kiterjedt népegészségügyi vizsgálat során megállapították, hogy az egészséges felnőtt populáció esetén a diasztolés (alsó) vérnyomás értékek átlaga 84.8 higanymilliméter, szórása pedig 12.8 higanymilliméter. Az Alsóbezgenyei Atlétikai Klub hat véletlenszerűen kiválasztott versenyzőjénél a klub sportorvosa az alábbi diasztolés értékeket jegyezte fel:

$$79.2,\ \ 64.6,\ \ 86.8,\ \ 73.7,\ \ 74.9,\ \ 62.3.$$

a) A sportorvos ezek alapján úgy gondolta, hogy az atléták átlagos diasztolés vérnyomása alacsonyabb, mint 84.8. Feltételezve, hogy az atléták diasztolés vérnyomása normális eloszlást követ, szórása pedig megegyezik a teljes populációra kapott értékkel (12.8 higanymilliméter), döntsön 95%-os szinten arról, hogy igaza van-e a doktornak.

Az Alsóbezgenyei Sakk Klub versenyzői szintén meglátogatták a fent említett doktort, aki az ő esetükben is feljegyezte hat véletlenszerűen kiválasztott sportoló diasztolés vérnyomás értékét, amelyek az alábbiak:

$$84.6,\ \ 93.2,\ \ 104.6,\ \ 106.7,\ \ 76.3,\ \ 78.2.$$

b.) Hipotéziseit pontosan megfogalmazva döntsön 95%-os szinten arról, hogy a sakkozók diasztolés vérnyomása magasabb-e, mint az atlétáké! A sakkozók diasztolés vérnyomásáról szintén feltehetjük, hogy normális eloszlást követ, szórása pedig megegyezik a teljes népesség körében mért értékkel.

Megoldás a) rész A feladat így fogalmazható meg:

$$\begin{aligned} &H_0\colon\ \mu_x = 84.8;\\ &H_1\colon\ \mu_x < 84.8. \quad \text{egyoldali ellenhipotézis}\\ &\alpha = 0.05. \end{aligned}$$

Ekkor $n = 6$, az átlag $\bar{x} = 73.5833$, $\sigma_x = 12.8$.
A próbastatisztika: $U = \frac{\bar{x}-\mu_{x,0}}{\sigma_x} = \frac{73.5833-84.8}{12.8}\sqrt{6} = -2.1465$.
A kritikus tartomány $U \le U(0.05) = -1.645$. A kapott érték, -2.1465 kisebb ennél, ezért elvetjük a H_0 hipotézist.

Megoldás b) rész A feladat így fogalmazható meg:

$$\begin{aligned} &H_0\colon\ \mu_x = \mu_y;\\ &H_1\colon\ \mu_x < \mu_y. \quad \text{egyoldali ellenhipotézis}\\ &\alpha = 0.05. \end{aligned}$$

Ebben az esetben $n = m = 6$, $\bar{x} = 73.5833$, $\bar{y} = 90.6$, $\sigma_x = \sigma_y = 12.8$.
A próbastatisztika: $U = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}+\frac{\sigma_y^2}{m}}} = \frac{73.58.33-90.6}{12.8}\sqrt{3} = -2.3026$.
A kritikus tartomány $U \le U(0.05) = -1.645$. A kapott érték, -2.3026 kisebb ennél, ezért elvetjük a H_0 hipotézist.

Az előbbi feladatsor 1.5 példája az egymintás t-statisztikára mutat példát.

3.) Egy üzem gyártósorán az egyik szerelési feladatra megadott szintidő 9 perc. Az e ponton dolgozó alkalmazottak már több kérvényben kérték a szintidő felemelését, mivel véleményük szerint az nem elegendő a feladat elvégzésére.

Az üzem vezetősége egy ellenőrt küldött ki, aki 12 véletlenszerűen kiválasztott alkalommal megmérte a feladat elvégzéséhez szükséges időt. Az eredmények az alábbiak:

$$9.4,\ 8.8,\ 9.3,\ 9.1,\ 9.4,\ 8.9,\ 9.3,\ 9.2,\ 9.6,\ 9.3,\ 9.3,\ 9.1.$$

Hipotéziseit és az adatokra vonatkozó feltételeit pontosan megfogalmazva döntsön 99%-os szinten, hogy igazuk van-e a munkásoknak!

Megoldás: A feladat így fogalmazható meg:

$$\begin{aligned} &H_0\colon\ \mu = 9; \\ &H_1\colon\ \mu > 9. \quad \text{egyoldali ellenhipotézis} \\ &\alpha = 0.01. \end{aligned}$$

Feltételezzük, hogy a feladat elvégzéséhez szükséges idő normális eloszlású. Ekkor a minta elemszáma $n = 12$, az átlag $\bar{x} = 9.2250$, a tapasztalati szórásnégyzet $s^{*2} = 0.0493$, $s^* = 0.221$,

A próbastatisztika: $t = \frac{\bar{x}-\mu}{s^*}\sqrt{12} = 3.5093$.

Ha igaz a H_0 null-hipotézis, akkor a próbastatisztika eloszlása t-statisztika $\nu = 11$ szabadságfokkal, amelynek értéke $t_{11}(0.99) = 2.718$. A mért érték ennél nagyobb, ezért elvetjük a null-hipotézist.

4.) Legyen ξ és η két független, a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen ξ és η sűrűségfüggvénye $f(x) = 1$, ha $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$, és $f(x) = 0$ egyébként. Számoljuk ki $\xi + \eta$ sűrűségfüggvényét.

Megoldás: A $\xi+\eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a $g(x) = \int f(y)f(x-y)\,dy$ függvény, ahol $f(x)$ a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ intervallumban egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye. Ezért $f(y)f(x-y) = 1$, ha $-\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}$, és $-\frac{1}{2} \le x-y \le \frac{1}{2}$, azaz $-\frac{1}{2}+x \le y \le \frac{1}{2}+x$, és nulla egyébként. Ez azt jelenti, hogy a $\xi + \eta$ összeg $g(x)$ sűrűségfüggvénye az x pontban megegyezik a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cap \left[-\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + x\right]$ intervallum hosszával. Ha $|x| > 1$, akkor a fenti metszet üres, ezért ebben az esetben $g(x) = 0$. Ha $0 \le x \le 1$, akkor ez a metszet a $\left[-\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2}\right]$ intervallum, és ennek hossza $1 - x$, azaz ebben az esetben $g(x) = 1 - x$. Ha $-1 \le x \le 0$, akkor ez a metszet a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + x\right]$ intervallum, amelynek hossza $1 + x = 1 - |x|$, azaz $g(x) = 1 + x = 1 - |x|$. Ez azt jelenti, hogy $g(x) = 1 - |x|$, ha $|x| \le 1$, és $g(x) = 0$, ha $x > 1$.

5.) Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó. Számoljuk ki a ξ valószínűségi változó negyedik momentumát. Legyen $\bar{\xi}$ egy várható értékű és kettő szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó. Számoljuk ki $\bar{\xi}$ sűrűségfüggvényét és negyedik momentumát.

Megoldás:

$$\begin{aligned}
E\xi^4 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} -x^3 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right) dx \\
&= \left[-x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} 3x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx \\
&= 3\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = 3.
\end{aligned}$$

A $\tilde{\xi} = \frac{\bar{\xi}-1}{\sqrt{2}}$ valószínűségi változó standard normális eloszlású, és $\bar{\xi} = \sqrt{2}(\tilde{\xi}+1)$, ahol $\tilde{\xi}$ standard normális eloszlású, ha $\bar{\xi}$ normális eloszlású 1 várható értékű és 2 szórásnégyzetű valószínűségi változó. Ezért, mint azt az előző órán megtárgyaltuk $\bar{\xi}$ sűrűségfüggvénye $\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-1)^2/4}$. Ezért

$$E\bar{\xi}^4 = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-(x-1)^2/4}\, dx,$$

ahonnan $u = \frac{x-1}{\sqrt{2}}$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}
E\bar{\xi}^4 = &\int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}u+1)^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/4}\, du = 4\int_{-\infty}^{\infty} u^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/4}\, du \\
&+ 8\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} u^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/4}\, du + 12\int_{-\infty}^{\infty} u^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/4}\, du \\
&+ 4\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/4}\, du + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/4}\, du \\
= &\, 12 + 0 + 12 + 0 + 1 = 25
\end{aligned}$$

Valójában az $E\bar{\xi}^4$ negyedik momentumot egyszerűbben is kiszámolhattuk volna. $E\bar{\xi}^4 = E(\sqrt{2}\tilde{\xi}+1)^4 = 4E\tilde{\xi}^4 + 8\sqrt{2}E\tilde{\xi}^3 + 12E\tilde{\xi}^2 + 4\sqrt{2}\tilde{\xi} + 1 = 4\cdot 3 + 0 + 12\cdot 1 + 1 = 25.$