

A november 16.-i gyakorlat témája

Megismétlem néhány fontos fogalom és eredmény ismertetését, és ismertetem azok fontos általánosításait. Szó volt eloszlásfüggvények és sűrűségfüggvények fogalmáról. Ezek segítségével ki lehet számolni valószínűségi változók várható értékét. Ezen eredményeken kívül felidézek bizonyos korábbi eredményeket és fogalmakat, pontosabban meg tárgyaljuk, hogy a korábban tanult diszkrét eloszlású valószínűségi változókról szóló eredmények hogyan szólnak az általános esetben. Az általánosabb eredmények ismertetéséhez szükséges a többváltozós eloszlásfüggvény fogalmának az ismertetése is.

Többdimenziós eloszlásfüggvény definíciója. *Legyen adva k valós értékű ξ_1, \dots, ξ_k valószínűségi változó egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn. Ezek (együttes) eloszlásfüggvénye az*

$$F(x_1, \dots, x_k) = P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_k < x_k),$$

k változós függvény, ahol $-\infty < x_j < \infty$ minden $1 \leq j \leq k$ indexre.

Hasonlóan az egyváltozós eloszlásfüggvényekhez hasonlóan lehet jellemezni a többdimenziós eloszlásfüggvényeket is. Erről szól a következő tétel.

Tétel. *Egy $F(u_1, \dots, u_k)$ függvény akkor és csak akkor eloszlásfüggvénye alkalmas ξ_1, \dots, ξ_k valószínűségi változóknak valamely (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn, ha ez az F függvény teljesíti a következő (i)–(iv) tulajdonságokat.*

(i) $F(u_1, \dots, u_k)$ minden változójának balról folytonos függvénye.

(ii)
$$\lim_{\substack{u_j \rightarrow \infty \\ \text{minden } j=1, \dots, k \text{ számra}}} F(u_1, \dots, u_k) = 1.$$

(iii)
$$\lim_{\substack{u_j \rightarrow -\infty \\ \text{valamely } 1 \leq j \leq k \text{ számra}}} F(u_1, \dots, u_k) = 0. \quad (\text{Ez úgy értendő, hogy az összes } u_s, \\ 1 \leq s \leq k, s \neq j \text{ koordinátát rögzítjük, és } u_j \rightarrow -\infty.)$$

Végül definiáljuk egy az R^k téren definiált F függvényre és egy $\mathbf{K} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k]$ téglatestre a

$$\mu(\mathbf{K}) = \mu_F(\mathbf{K}) = \sum_{\substack{u_j = a_j \text{ vagy } b_j \\ j=1, \dots, k}} (-1)^{\chi(u_1, \dots, u_k)} F(u_1, \dots, u_k)$$

ennyiséget, ahol $\chi(u_1, \dots, u_k)$ jelöli az a_j -k számát az u_1, \dots, u_k sorozatban. Ekkor

(iv) $\mu_F(\mathbf{K}) \geq 0$ minden \mathbf{K} téglatestre.

Hasonlóan az egydimenziós eloszlás sűrűségfüggvényéhez definiálhatjuk a többdimenziós eloszlás sűrűségfüggvényét is. Az egyváltozós esethez hasonlóan ennek is megadhatjuk a jellemzését. Erről szól az alábbi definíció és tétel.

Több-dimenziós eloszlásfüggvény sűrűségfüggvényének definíciója. Azt mondjuk, hogy egy $F(x_1, \dots, x_k)$ többváltozós eloszlásfüggvénynek létezik $f(u_1, \dots, u_k)$ sűrűségfüggvénye, ha teljesül az

$$F(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_k} f(u_1, \dots, u_k) du_1 \dots du_k$$

azonosság minden $-\infty < x_j < \infty$, $1 \leq j \leq k$ számra.

Tétel. Egy k -változós $f(u_1, \dots, u_k)$ függvény akkor és csak akkor sűrűségfüggvénye egy alkalmas k -dimenziós eloszlásfüggvénynek, ha $f(u_1, \dots, u_k) \geq 0$ majdnem minden (u_1, \dots, u_k) pontban, és

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1, \dots, u_k) du_1 \dots du_k = 1.$$

A többdimenziós eloszlásfüggvény fogalmának a segítségével definiálhatjuk valószínűségi változók függetlenségét az általános esetben is. Kimondok egy a független valószínűségi változók fontos tulajdonságát kimondó tételt. Hangsúlyozom, hogy korábban csak diszkrét eloszlású valószínűségi változók függetlenségéről beszéltünk. Hasznos megérteni a két fogalom kapcsolatát is. Ebben is segít az alább ismertetett tétel.

Valószínűségi változók függetlenségének a definíciója. Legyenek ξ_1, \dots, ξ_n valószínűségi változók egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy ezek a valószínűségi változók függetlenek, ha minden x_1, \dots, x_n valós számra

$$P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) = P(\xi_1 < x_1) \cdots P(\xi_n < x_n).$$

Tétel. Legyenek ξ_1, \dots, ξ_k független valószínűségi változók, B_1, \dots, B_k a számegyenes Borel mérhető részhalmazai. Ekkor

$$P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_k \in B_k) = P(\xi_1 \in B_1) \cdots P(\xi_k \in B_k).$$

Ugyancsak fontos a következő eredmény, amely független valószínűségi változók szorzatának a várható értékéről szól. Korábban ennek az eredménynek csak a független, diszkrét eloszlású valószínűségi változók szorzatáról szóló speciális esetét tárgyaltuk.

Tétel. Legyenek ξ_1, \dots, ξ_k független valószínűségi változók, amelyek mindegyikének létezik várható értéke, azaz $E|\xi_j| < \infty$. Ekkor a $\xi_1 \cdots \xi_k$ szorzatnak is létezik várható értéke, és

$$E\xi_1 \cdots \xi_k = E\xi_1 \cdots E\xi_k.$$

Fontos eredmény volt az, amely megadta, hogy egy egyváltozós függvény eloszlás vagy sűrűségfüggvényének az ismeretében hogyan lehet kiszámítani e valószínűségi változó valamely függvényének a várható értékét. Létezik ennek az állításnak a többváltozós megfelelője, és az szintén fontos szerepet játszik.

Tétel. *Ha (ξ_1, \dots, ξ_k) valószínűségi változók $F(x_1, \dots, x_k)$ eloszlásfüggvényének létezik $f(u_1, \dots, u_k)$ sűrűségfüggvénye, akkor ez teljesíti minden $g(\cdot)$ k -változós (mérhető) függvényre a következő azonosságot:*

$$\begin{aligned} Eg(\xi_1, \dots, \xi_k) &= \int g(u_1, \dots, u_k) \mu_F(du_1, \dots, du_k) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(u_1, \dots, u_k) f(u_1, \dots, u_k) du_1 \dots du_k, \end{aligned}$$

ahol μ_F jelöli az F eloszlásfüggvény által meghatározott Stieltjes mértéket. Ez az azonosság úgy értendő, hogy az annak két oldalán szereplő kifejezés egyszerre létezik vagy nem létezik, ha mind a két kifejezést mint Lebesgue integrált értelmezzük. Ha a jobb-oldalon szereplő integrál létezik mint (közönséges) Riemann integrál, akkor ez az integrál tekinthető úgy is mint (egy a Riemann integrál értékével megegyező) Lebesgue integrál. Tehát az azonosság ebben a fontos speciális esetben is érvényes.

Ennek az eredménynek a speciális egyváltozós esete az alábbi, már korábban tárgyalt eredmény: Egy F eloszlásfüggvénnyel rendelkező ξ valószínűségi változó $E\xi$ illetve adva egy $g(x)$ függvény a ξ valószínűségi változó $g(\xi)$ függvényének az $Eg(\xi)$ várható értékét az

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} u dF(u), \quad Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) dF(u) \quad (a)$$

képletek segítségével számíthatjuk ki. A fenti képletben úgynevezett Stieltjes integrál szerepel, amely közvetlenül nehezen számolható. Ezért fontos megérteni, hogyan egyszerűsödik a képlet bizonyos fontos speciális esetekben. Ezek egyike az az eset, amikor létezik sűrűségfüggvény. Meg kell értenünk, hogyan tudjuk megállapítani, hogy létezik sűrűségfüggvény, és sűrűségfüggvény létezése esetén hogyan számíthatjuk ki az (a) formulában szereplő képletet. Ezért érdemes a következő tényeket tudni:

Tétel sűrűségfüggvény létezéséről. *Legyen $F(x)$, monoton, minden pontjában folytonos függvény, amely véges sok pont kivételével deriválható. Tegyük fel továbbá azt is, hogy $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$. Definiáljuk az $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ függvényt azokban a pontokban, ahol $F(x)$ differenciálható, és tetszőleges módon abban a (véges sok) pontban, ahol $F(x)$ nem differenciálható. Ekkor $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$ minden $-\infty < x < \infty$ pontban, és*

$$\int_{-\infty}^{\infty} u dF(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u f(u) du, \quad Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) dF(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) f(u) du.$$

Megjegyzés: A fenti tételben szereplő $F(x)$ függvény akkor eloszlásfüggvény, ha a fent említett tulajdonságok mellett teljesíti az $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ feltételt. Ezt a feltételt azért nem követeltük meg, mert mint látni fogjuk a fenti kissé általánosabban megfogalmazott tétel jobban használható bizonyos esetekben.

Feladatok:

- 1.) Dobjunk le egy pontot egyenletes eloszlással valamely $[a, b]$ intervallumba, azaz annak valószínűsége, hogy a pont valamely $[u, v] \subset [a, b]$ intervallumba esik legyen $\frac{v-u}{b-a}$. Ekkor a ledobott pont ξ helyének az eloszlásfüggvénye $F(x) = 0$, ha $x \leq a$, $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$, ha $a \leq x \leq b$, $F(x) = 1$, ha $x \geq b$. Mutassuk meg, hogy $E\xi = \frac{1}{b-a} \int_a^b u \, du$, és $Eg(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(u) \, du$ tetszőleges $g(x)$ függvényre.

Megoldás: Nem nehéz ellenőrizni, hogy a fenti ξ valószínűségi változónak a feladatban definiált $F(x)$ függvény az eloszlásfüggvénye. Ez az $F(x)$ függvény minden pontjában folytonos, és két pont, $x = a$ és $x = b$ pontok, kivételével differenciálható, $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{b-a}$, ha $a < x < b$, és $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = 0$, ha $x < a$ vagy $x > b$. Ezért az előző tétel alapján $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} u f(u) \, du = \int_a^b \frac{1}{b-a} u \, du$, és $Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) f(u) \, du = \int_a^b \frac{1}{b-a} g(u) \, du$.

A másik külön tárgyalandó eset az, amikor diszkrét eloszlású valószínűségi változó várható értékét akarjuk kiszámolni. Ezen eset vizsgálata érdekében fogalmazzuk meg a következő korábban már tárgyalt eredményt.

Tétel diszkrét eloszlású valószínűségi változó várható értékének a kiszámolásáról. Legyen ξ olyan valószínűségi változó, amelyik véges sok $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ értéket vesz fel, $P(\xi = a_j) = p_j$, $1 \leq j \leq k$, $\sum_{j=1}^k p_j = 1$. Ekkor a ξ valószínűségi változó

$F(x)$ eloszlásfüggvénye a következő alakú: $F(x) = 0$, ha $x \leq a_1$, $F(x) = \sum_{l=1}^j p_l$, ha $a_j < x < a_{j+1}$, $1 \leq j \leq k-1$, $F(x) = 1$, ha $x > a_k$.

Kissé általánosabban, legyen $F(x)$ olyan függvény, amely megadható valamilyen $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ és $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, \dots , $p_k > 0$ sorozatok segítségével úgy, hogy $F(x) = 0$, ha $x \leq a_1$, $F(x) = \sum_{l=1}^j p_l$, ha $a_j < x < a_{j+1}$, $1 \leq j \leq k-1$, $F(x) = \sum_{l=1}^k p_l$, ha $x > a_k$. Ekkor $\int u \, dF(u) = \sum_{l=1}^k a_l p_l$, és $\int g(u) \, dF(u) = \sum_{l=1}^k g(a_l) p_l$.

Megjegyzés: A fenti tétel második bekezdésében nem követeltük meg a $\sum_{j=1}^k p_j = 1$ feltételt. Ez az enyhe általánosítás lehetővé teszi, hogy az előző tétel és az alább kimondott lemma segítségével ki tudjuk számítani a várható értéket kissé általánosabb, de szintén érdekes esetekben. Ennek hasznosságára mutat példát az alábbi 2. feladat, amelynek egyik lehetséges megoldásához szükségünk van még az alábbi eredményre is.

Lemma. Legyen F_1 és F_2 két olyan monoton függvény a számegeyenesen, amelyekre $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_j(x) = 0$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} F_j(x) < \infty$, $j = 1, 2$. Ekkor léteznek az $\int_{-\infty}^{\infty} g(u) dF_j(u)$, $j = 1, 2$ és $\int_{-\infty}^{\infty} g(u) d(F_1(u) + F_2(u))$ integrálok minden szép $g(u)$ függvényre. Továbbá,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(u) d(F_1(u) + F_2(u)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) dF_1(u) + \int_{-\infty}^{\infty} g(u) dF_2(u)$$

A következő példában olyan valószínűségi változóra mutatunk példát, melynek $F(x)$ eloszlásfüggvénye felírható $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ alakban úgy, hogy $F_1(x)$ és $F_2(x)$ teljesíti a fenti két tétel feltételeit. Ezért ki tudjuk számolni a ξ valószínűségi változó függvényeinek a várható értékét.

- 2.) Dobjunk le egy pontot egyenletes eloszlással a $[0, 4]$ intervallumra. Írjuk fel e pont értékét, ha a ledobott pont a $[0, 2]$ intervallumba esik, írjuk le a 2 számot, ha a pont a $[2, 3]$, a 3 számot, ha a pont a $(3, 4]$ intervallumba esik. Mutassuk meg, hogy a ξ valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvénye a következő: $F(x) = 0$, ha $x \leq 0$, $F(x) = \frac{x}{4}$, ha $0 \leq x \leq 2$, $F(x) = \frac{3}{4}$, ha $2 < x \leq 3$, és $F(x) = 1$, ha $x > 3$. Mutassuk meg továbbá, hogy $F(x)$ felírható $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ alakban a következő módon: $F_1(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$, $f(u) = \frac{1}{2}$, ha $0 \leq u \leq 2$, $f(u) = 0$, ha $u < 0$ vagy $u > 2$, és $F_2(x) = 0$, ha $x \leq 2$, $F_2(x) = \frac{1}{4}$, ha $2 < x \leq 3$, $F_2(x) = \frac{1}{2}$, ha $x > 3$. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $g(x)$ függvényre $Eg(\xi) = \frac{1}{4} \int_0^2 g(u) du + \frac{1}{4}g(2) + \frac{1}{4}g(3)$.

Első megoldás: Hasonlóan a múlt órán tárgyalt 2. feladathoz ellenőrizhetjük, hogy a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a feladatban megadott $F(x)$ eloszlásfüggvény. Az $F(x)$ függvényt felírhatjuk $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ alakban, ahol $F_1(x) = 0$, ha $x \leq 0$, $F_1(x) = \frac{1}{4}x$, ha $0 \leq x \leq 2$, $F_1(x) = \frac{1}{2}$, ha $x > 2$, és $F_2(x) = 0$, ha $x \leq 2$, $F_2(x) = \frac{1}{4}$, ha $2 < x \leq 3$, $F_2(x) = \frac{1}{2}$, ha $x > 3$. Tulajdonképpen azt tettük, hogy leválasztottuk a tisztán ugró függvény részt az $F(x)$ eloszlásfüggvényről, így kaptuk az $F_2(x)$ függvényt, a maradék $F_1(x) = F(x) - F_2(x)$ függvény pedig mindenütt folytonos. Az $F_1(x)$ függvény minden pontban folytonos, és 0 és 2 pont kivételével mindenütt deriválható. Ezért a sűrűségfüggvény létezéséről szóló tétel segítségével felírhatjuk, hogy $F_1(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$, valamint $\int g(u) dF_1(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(u) du$ minden $-\infty < x < \infty$ számra, ahol $f(x) = \frac{1}{4}$, ha $0 \leq x \leq 2$, és $f(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 2$. Másrészt a diszkrét eloszlású valószínűségi változó várható értékének a kiszámolásáról szóló tétel alapján $F_2(x)$ felírható az ott megadott módon $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $p_1 = p_2 = \frac{1}{4}$ paraméterekkel. Ezért $\int_{-\infty}^{\infty} g(u) dF_2(u) = \frac{1}{4}g(2) + \frac{1}{4}g(3)$. Ezután a Lemma segítségével kapjuk a feladat végső állítását.

Második megoldás: Jelölje η a ledobott pont helyét, ami egy a $[0, 4]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Ennek a valószínűségi változónak a sűrűségfüggvénye a következő $f(x)$ függvény: $f(x) = \frac{1}{4}$, ha $0 \leq x \leq 4$, $f(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 4$ függvény. Továbbá definiáljuk a következő $y = h(x)$ függvényt a $[0, 4]$ intervallumon: $h(x) = x$, ha $0 \leq x \leq 2$, $h(x) = 2$, ha $2 < x \leq 3$, $h(x) = 3$,

ha $3 < x \leq 4$. Ekkor $\xi = h(\eta)$, ezért $g(\xi) = g(h(\eta))$, és $Eg(\xi) = Eg(h(\eta)) = \int_0^4 \int g(h(x)) \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4} \int_0^2 2g(x) dx + \frac{1}{4}g(2) + \frac{1}{4}g(3)$.

A fenti feladat első megoldási módszere azt jelzi, hogy az eloszlásfüggvény felbontásának segítségével egy tisztán ugró és folytonos részre a kívánt várható értéket ki lehet számolni a fenti két tétel és lemma segítségével. Felmerülhet a kérdés, hogy van-e olyan eloszlásfüggvény, amelynek esetében a fenti ismeretek nem elegendők a várható érték kiszámolásához. A válasz az, hogy lehet rosszindulatú és mesterkéltnél is ilyen példákat konstruálni, de a gyakorlatban előforduló összes feladat megoldásához elegendő a fenti eredmények használata (és a megfelelő integrálok és összegek kiszámítása).

Házi feladat:

Feldobunk egy szabályos dobókockát. Ha a dobás értéke 1, 2, 3, 4 vagy 5 akkor felírjuk a dobás értékét egy papírlapra. Ha dobás értéke 6, akkor ledobunk egy pontot véletlenül egyenletes eloszlással a $[0, 2]$ intervallumra, és a ledobott pont helyének az értékét írjuk fel a papírlapra. Számoljuk ki a felírt pont várható értékét és szórásnégyzetét.

- 3.) Legyen ξ valószínűségi változó $f(u)$ sűrűségfüggvénnyel, a és b valós számok. Határozzuk meg az $a\xi + b$, $a > 0$, és ξ^2 valószínűségi változók sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Legyen $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$ ξ eloszlásfüggvénye. Ekkor $\eta = a\xi + b$ $G(x)$ eloszlásfüggvénye $G(x) = P(a\xi + b < x) = P(\xi < \frac{x-b}{a}) = F(\frac{x-b}{a})$ sűrűségfüggvénye pedig ennek deriváltja, $\frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}F(\frac{x-b}{a}) = \frac{1}{a}f(\frac{x-b}{a})$. A ξ^2 valószínűségi változó $H(x)$ eloszlásfüggvénye $H(x) = P(\xi^2 < x) = P(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}) = P(\xi < \sqrt{x}) - P(\xi \leq -\sqrt{x})$, ha $x \geq 0$, és $H(x) = P(\xi^2 < x) = 0$, ha $x < 0$. A ξ^2 valószínűségi változó $h(x)$ sűrűségfüggvénye pedig a $H(x)$ függvény deriváltja, $h(x) = 0$, ha $x < 0$, $h(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x}))$.

Megtárgyaljuk a többváltozós eloszlásfüggvény fogalmát, és az ezzel kapcsolatos legfontosabb fogalmakat és eredményeket. Ezek közül külön felhívom a figyelmet a valószínűségi változók függetlenségének fogalmára az általános (nem feltétlenül diszkrét eloszlású) valószínűségi változók esetében.

Valószínűségi változók kovarianciájának a definíciója. Legyen ξ és η két valószínűségi változó ugyanazon a valószínűségi mezőn, (amelyekre teljesül az $E\xi^2 < \infty$, $E\eta^2 < \infty$ feltétel.) A ξ és η valószínűségi változók kovarianciafüggvénye

$$\text{Cov}(\xi, \eta) = E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)].$$

Lemma.

$$\text{Cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta.$$

Ha ξ és η független valószínűségi változók, akkor $\text{Cov}(\xi, \eta) = 0$.