A szeptember 16.-i gyakorlat témája

Először összefoglalom azokat az eredményeket, amelyeket az előző előadason felidéztem a végtelen halmazokról. Arról volt szó, hogy két halmaz azonos elemszámú, ha létezik elemeik között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. Ezt az észrevételt Georg Cantor továbbfejlesztette, és kidolgozott egy a végtelen halmazok nagyságának összehasonlítását lehetővé tevő elméletet.

Két (véges vagy végtelen) halmazt azonos szánosságúnak nevezünk, ha létezik elemeik között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. Speciálisan egy végtelen halmazt megszámlálhatónak nevezzünk, ha létezik kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés e halmaz és a természetes számok halmazának elemei között. Ez úgy is megfogalmazható, hogy a halmaz elemei egymás után felsorolhatóak úgy, hogy előbb vagy utóbb mindegyik elem sorra kerül. Megjegyzem, hogy Cantor definiálta azt is, hogy mikor nevezünk egy halmazt nagyobb számosságúnak, mint egy másikat. Azt mondjuk, hogy egy A halmaz számossága nagyobb mint egy B halmaz számossága, vagy egyenlő vele, ha létezik a B halmaznak egy olyan leképezése az A halmazra, amelyikben a B halmaz minden elemének az A halmaz különböző elemét feleltetjük meg, de nem követeljük meg, hogy az A halmaz mindegyik eleme megjelenjen képként. Be lehet látni, hogy az így definiált 'nagyobb vagy egyenlő' fogalom rendelkezik azokkal a tulajdonságokkal, amelyeket elvárunk, de ennek bizonyítása nem egyszerű.

Felidéztem, hogy végtelen halmazok nagyságának összehasolításakor olyan eredmények jelennek meg, amelyek első hallásra kissé meglepőek. Így megtárgyaltuk, hogy a racionális számok halmaza megszámlálható, azaz e halmaz számossága megegyezik a természetes számok halmazával, noha a természetes számok halmaza csak egy kis részét képezi ennek a halmaznak. Viszont a valós számok halmazának számossága nagyobb, mint a természetes számok számossága, tehát vannak különböző számosságú végtelen halmazok. A valós számok számosságát kontinumnak nevezik az irodalomban. Végül megjegyeztem, hogy a sík halmazainak vagy a folytonos függvények számossága szintén kontinum, viszont a $[0,1]$ intervallumon definiált függvények számossága még a kontinumnál is nagyobb.

A köovetkező kombinatorikai eredményeket is megtárgyaltuk.

Egy urnában golyók vannak, amelyek tartalmazzák az $1,\dots,n$ számokat. Kihúzunk egymás után k golyót. Hány különböző húzáseredmény lehetséges?

Ha visszatevés nélkül húzzuk ki a golyókat, és különbséget teszünk két húzássorozat között, amelyekben ugyanazokat a számokat húztuk ki, de más sorrendben, akkor $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ lehetőség van, ha nem teszünk különbséget közöttük, akkor $\binom{n}{k}$.

Ha visszatevéssel húzzuk a golyókat és különbséget teszünk különböző sorrendben kihúzott ugyanazokat a számokat (ugyanolyan multiplicitással) tartalmazó húzássorozatok között, akkor a lehetséges húzások száma n^k.

Ha visszatevéssel húzzuk a golyókat, és azokat húzás után nagyság szerint sorba rakjuk, akkor ilyen módon $\binom{n+k-1}{k}$ különböző húzássorozat keletkezhet.

1. Egy tóban 10000 hal van. Véletlenül kihalásznak belőle 1000 darabot, ezekre piros pöttyöt festenek és visszaengedik őket a tóba. Ezután ismét kifognak véletlenül 1000 halat. Mi annak a valószínűsége, hogy a kifogott halak között 100 megfestett van?

   Megoldás: $\dfrac{\binom{1000}{100}\binom{9000}{900}}{\binom{10000}{1000}}$. Ugyanis a második fogásban összesen $\binom{10000}{1000}$ féle fogáseredmény lehetséges, és minden fogáseredmény egyformán valószínű. (A halakat megkülönböztetjük.) Az olyan fogáseredmények száma, amelyekben az 1000 pirossal megjelölt halból 100-t a 9000 meg nem jelölt halból pedig 900-t fogtak ki $\binom{1000}{100}\binom{9000}{900}$.

   Megjegyzés: A gyakorlatban előforduló kérdés ennek fordítottja. Elvégezzük a fenti kisérletet, összeszámláljuk a megfestett halakat, és ebből próbálunk következtetni a tóban levő halak számára. Hogyan érdemes ezt csinálni? Ez a későbbiek témája lesz.

2. Egy házibulira 50 embert hívnak meg. Mindenki egymástól függetlenül 0.5 valószínűséggel megy el. Mi annak a valószínűsége, hogy lesznek vendégek a házibulin?

   Megoldás: Mint sok egyéb esetben, most is érdemes az esemény be nem következésének a valószínűségét kiszámolni. Ez $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$. Így annak valószínűsége, hogy valaki eljön $1-\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$.

3. Egy házibulira 50 embert hívnak meg. Mindenki egymástól függetlenül 0.5 valószínűséggel megy el.

   a) Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan 3 ember jön el?

   b) Mi annak a valószínűsége, hogy Annak, hogy legalább három ember jön el?

   Megoldás: a) $\binom{50}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$, b) $1-\left(1+\binom{50}{1}+\binom{50}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$.

4. Valaki játékra hív fel. Egy állítólag szabályos pénzdarabot dob fel egymás után 10 000-szer. Fejdobás esetén ő nyer egy forintot írás dobás estén mi. A dobások eredményeként 5500 fejdobás történt. Mi annak a valószínűsége, hogy egy szabályos pénz feldobása esetén a fejdobások száma legalább 5500?

   Megoldás: Ez a valószínűség $\sum\limits_{k=5500}^{10000}\binom{10000}{k}2^{-10000}$.

   Valójában, ezzel a feladat megoldásával nem vagyunk kész. Arra is kiváncsiak vagyunk, hogy ez a szám körülbelül mekkora. Ki tudjuk-e ezt számolni kevés számolással viszonylag rövid idő alatt? Az igazi, minket érdeklő kérdés az, hogy pechünk volt-e, vagy a játékot javasló személy csalt, a pénzdarab nem volt szabályos. Ehhez a kérdéshez később még visszatérünk.

Megbeszéltük, hogy az a kérdés, hogy az adott dobássorozat esetén elhisszük-e azt, hogy a pénzdarab szabályos-e a matematikai statisztika egy fontos kérdésének a hipotézésvizsgálatnak speciális esete. Az áltlalános kérdés az, hogy egy elvégzett a véletlentől is függő kisérletsorozat alapján elfogadjuk-e, hogy egy adott feltételezés (hipotézis) helyes-e. Ha a hipotézis érvényes és mi mégis elvetjük azt nevezzük első fajú hibának. Ha a hipotézis nem teljesül és mi mégis igaznak fogadjuk el, azt másodfajú hibának nevezzük. Azt a feladatot szokták vizsgálni, hogy megengedve előirt elsőfajú hibát (ezt általában 0.05 vagy 0.01-nek szokás választani) hogyan tudjuk a másodfajú hibát minimalizálni. Megjegyeztük azt is, hogy a valószínűségszámítás egyik alapvető eredménye a centrális határeloszlástétel segítségével meg lehet határozni egyszerűen az ebben a feladatban tekintett valószínűség jó közelítő értékét. Ennek alapján a fenti esemény bekövetkezése rendkivül valószínűtlen.

5. Egy gyakorlatra véletlenszerűen 24 hallgató jön el. Mi annak a valószínűsége, hogy van közöttük két ember, akiknek ugyanazon a napon van a születésnapjuk?

   Megoldás: Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy nincs ilyen ember. Képzeljük el, hogy egymásután megjelennek a hallgatók, valaki felírja a születésnapjukat, és minden egyes lépésben más dátumot ír fel. Az első hallgató megjelenésekor biztos, hogy új számot ír fel, a második hallgató megjelenésekor $\left(1-\dfrac{1}{365}\right)$, a harmadik hallgató megjelenésekor, (feltéve, hogy az első két hallgató esetében különböző számokat írt fel $\left(1-\dfrac{2}{365}\right)$, a negyedik hallgató esetében $\left(1-\frac{3}{365}\right)$ valószínűséggel írt fel különböző számokat, és így tovább. Annak a valószínűsége, hogy mind a 24 esetben különböző számokat írt fel $\prod\limits_{k=1}^{23}\left(1-\dfrac{k}{365}\right)$, a keresett valószínűség pedig $1-\prod\limits_{k=1}^{23}\left(1-\dfrac{k}{365}\right)$.

   Kiváncsiak lehetünk, hogy ez a szám mekkora. Nagyon kicsi vagy nagyon nagy, azaz majdnem 1. Meg tudjuk-e ezt határozni viszonylag kevés számolással? A következő számolás tanulságos lehet. A vizsgálandó szorzatot felírhatjuk mint

$$1-\prod_{k=1}^{23}\left(1-\frac{k}{365}\right)=1-\exp\left\{\sum_{k=1}^{23}\log\left(1-\frac{k}{365}\right)\right\}.$$

   Használjuk fel a $\log(1+x)\sim x$ kis x számokra való közelítést. Ez azt sugallja, hogy $\log\left(1-\dfrac{k}{365}\right)\sim-\dfrac{k}{365}$, és a vizsgált valószínűség közelítőleg

$$1-\exp\left\{-\sum_{k=1}^{23}\frac{k}{365}\right\}=1-\exp\left\{-\frac{12\cdot 23}{365}\right\}=1-e^{-276/365}.$$

6. Egy szabályos dobókockát sokszor feldobunk egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy a 17. dobásban jelenik meg a 3. hatos?

   Megoldás: Ez azt jelenti, hogy az első 16 dobásban pontosan két hatos jelenik meg, a 17. dobás eredménye pedig szintén hatos. Ennek valószínűsége $\binom{16}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{14}\left(\frac{1}{6}\right)^{3}$.

   Házi feladat:

   Egy szabályos dobókockát feldobunk egymás után többször. Mi annak a valószínűsége, hogy a 20. dobásban jelenik meg az ötödik hárommal osztható szám?