

A Valószínűségszámítás I. előadássorozat tizenegyedik előadása.

2003. április 15.

Először néhány további példát mutatunk a centrális határeloszlástétel alkalmazására.

1. feladat:

Egy szabályos dobókockát és egy szabályos érmét feldobunk 3300 alkalommal egymástól függetlenül. (Az érme és kockadobások eredményei is függetlenek egymástól.) Ha a kockadobás eredménye páros és az érme a fej oldalra esett, akkor annyi forintot nyerünk, amennyi a kockadobás eredménye. Ha az érme az írás oldalra esett vagy a kockadobás eredménye páratlan szám, akkor nem nyerünk, és nem is veszünk semmit. Mi a valószínűsége annak, hogy az össznyereményünk 3190 és 3520 forint közé esik? Adjunk erre jó közelítő becslést a centrális határeloszlástétel és egy normális eloszlástáblázat segítségével.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j , és η_j $1 \leq j \leq 3300$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 2$, ha a j -ik kockadobás eredménye 2, $\xi_j = 4$, ha a j -ik kockadobás eredménye 4, $\xi_j = 6$, ha a j -ik kockadobás eredménye 6, $\xi_j = 0$, ha a j -ik kockadobás eredménye 1, 3 vagy 5. Legyen $\eta_j = 1$, ha a j -ik érmédobás eredménye fej, és $\eta_j = 0$, ha a j -ik érmédobás írás. Legyen $\zeta_j = \xi_j \eta_j$. Ekkor a j -ik dobásnál a nyereményünk ζ_j lesz, $1 \leq j \leq 3300$, és a $P\left(3190 \leq \sum_{j=1}^{3300} \zeta_j \leq 3520\right)$ valószínűséget kell jól megbecsülnünk. Ennek érdekében számoljuk ki a független ζ_j valószínűségi változók várható értékét és szórásnégyzetét. $E\zeta_j = E\xi_j \eta_j = E\xi_j E\eta_j = \frac{1}{6}(2+4+6) \cdot \frac{1}{2} = 1$, $E\zeta_j^2 = E\xi_j^2 E\eta_j^2 = \frac{1}{6}(4+16+36) \cdot \frac{1}{2} = \frac{14}{3}$, $\text{Var } \zeta_j^2 = E\zeta_j^2 - (E\zeta_j)^2 = \frac{11}{3}$. Innen a centrális határeloszlástétel alapján

$$P\left(3190 \leq \sum_{j=1}^{3300} \zeta_j \leq 3520\right) = P\left(\frac{-110}{\sqrt{3300 \frac{11}{3}}} \leq \frac{\sum_{j=1}^{3300} \zeta_j - \sum_{j=1}^{3300} E\zeta_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{3300} \text{Var } \zeta_j}} \leq \frac{220}{\sqrt{3300 \frac{11}{3}}}\right) \\ \sim \Phi(2) - \Phi(-1) = 0.9772 + 0.8413 - 1 = 0.9285.$$

2. feladat:

Legyen birtokunkban 100 lámpa, amelyek mindegyike egymástól független időtartamig működik, élettartamuk pedig exponenciális eloszlású $\lambda = \frac{1}{10}$ paraméterrel. (A lámpák élettartamának exponenciális eloszlása természetes feltételezés.) Egy termet bevilágítunk ezen lámpák valamelyikével, majd amikor az kiégett új lámpát használunk fel. Adjunk jó becslést arra, hogy a lámpák összélettartama legalább 1150 óra.

Megoldás: Jelölje ξ_j a j -ik lámpa élettartamát, $1 \leq j \leq 100$. Ekkor a $P(\xi_1 + \dots + \xi_{100} > 1150)$ valószínűsége kell jó becslést adnunk, ahol az összegben független exponenciális

eloszlású valószínűségi változók szerepelnek $\lambda = \frac{1}{10}$ paraméterrel. Vezessük be az $\eta = \xi_1 + \dots + \xi_{100}$ jelölést.

Kiszámoltuk, hogy jelen esetben $E\eta = mE\xi_1 = \frac{m}{\lambda} = 1000$, $\text{Var } \eta = \frac{m}{\lambda^2} = 10000$ ($m = 100$ és $\lambda = \frac{1}{10}$ választással). Ezért a centrális határeloszlástétel szerint $\frac{\eta - E\eta}{\sqrt{\text{Var } \eta}} = \frac{\eta - 1000}{100}$ jó közelítéssel standard normális eloszlású valószínűségi változó, és $P(\xi_1 + \dots + \xi_{100} > 1150) = P\left(\frac{\eta - E\eta}{\sqrt{\text{Var } \eta}} > 1.5\right) \sim 1 - \Phi(1.5)$.

A centrális határeloszlástétel nagy segítséget ad a matematikai statisztika két fontos problémakörében, a becslésméletben és a hipotézisvizsgálatban. A becslésméletben olyan kérdésekkel foglalkozunk mint például a következő kérdések: Mennyi egy lámpa várható élettartama, mennyi annak a valószínűsége, hogy egy kocka a hatos oldalra esik, mi a valószínűsége, hogy egy (életbiztosítást kötni akaró ember) megéli a hetvenedik életét? Általában a kérdés a következő: Egy esemény eloszlása függ valamilyen ismeretlen paraméter(ek)től, és ez(eke)t a paraméter(eke)t akarjuk megbecsülni. Ennek érdekében kísérleteket végzünk, és valamilyen jó módszer segítségével próbáljuk megbecsülni az ismeretlen paramétert e kísérletek eredményének a függvényében.

A hipotézisvizsgálatban a feladat az, hogy bizonyos hipotézisünk van arról, hogy mennyi az élettartama egy lámpának, mennyire népszerű egy vélemény a választók között, hogy egy gyógyszer hatásosabb mint egy másik vagy valamilyen hasonló problémáról van valamilyen ellenőrizendő feltételezésünk. Annak érdekében, hogy eldöntsük, helyes-e a hipotézisünk kísérleteket végzünk. Ha kísérleteink eredménye nagyon valószínűtlen hipotézisünk teljesülése esetén, akkor hipotézisünket elutasítjuk, ha pedig valószínű, akkor elfogadjuk azt. De mikor tekintjük a bekövetkezett eredményt valószínűnek és mikor valószínűtlennek? E kérdés eldöntésében sokszor a centrális határeloszlástétel segít. Erre mutatunk néhány példát. E példák tárgyalása előtt bevezetjük a matematikai statisztika néhány egyszerű és természetes fogalmát. Jelen előadássorozatban csak a hipotézisvizsgálattal foglalkozunk, az ehhez kapcsolódó fogalmakat vezetjük be.

Azt a feltételezést, amelyet ellenőrizni akarunk nevezik null-hipotézisnek, annak ellenkezőjét pedig ellenhipotézisnek. Vannak olyan feladatok, amelyekben a null-hipotézis egyetlen elemből áll, például, ha azt tételezzük fel, hogy egy dobókocka szabályos. Az ilyen hipotéziseket nevezik egyszerű hipotézisnek. Vannak olyan feladatok, amelyekben a null-hipotézis több elemből áll, például az a feltételezés, hogy egy javaslatot az emberek legalább fele támogat. Az ilyen hipotéziseket hívják összetett hipotézisnek. Két fajta hibát követhetünk el. Az egyik hiba az, hogy a hipotézis teljesül, mi mégis elutasítjuk azt. Ezt nevezik elsőfajú hibának. Ha a hipotézis nem teljesül, mi mégis úgy döntünk, hogy az teljesül, akkor ezt másodfajú hibának nevezzük. Az elsőfajú hiba csökkentése érdekében minél többször kell elfogadni, a másodfajú hipotézis csökkentése érdekében pedig minél többször kell elutasítani a hipotézist. A gyakorlatban általában úgy szokták a feladatokat megfogalmazni, hogy az elsőfajú hibára előírunk egy felső korlátot, és eme feltétel mellett próbáljuk a másodfajú hibát minél kisebbé tenni. Az elsőfajú hibára adott felső korlát összetett null-hipotézis esetén azt jelenti, hogy az elsőfajú hiba min-

den a null-hipotézis teljesülése esetén előfordulható eloszlás esetén legyen kisebb mint az előírt felső korlát.

3. feladat

Egy pénzdarabról ellenőrizni akarjuk, hogy igaz-e az a hipotézis, amely szerint ez az érme legalább $\frac{3}{4}$ valószínűséggel esik a fej és legfeljebb $\frac{1}{4}$ valószínűséggel az írás oldalára. Ennek érdekében feldobjuk a pénzdarabot 30 000 alkalommal, és a következő döntési szabályt hozzuk. Választunk egy k számot, és akkor fogadjuk el a hipotézist helyesnek, ha legalább k fejdobás történt. Legalább mekkorának kell válassztanunk ezt a k számot, ha azt akarjuk, hogy egy a hipotézist teljesítő pénzdarab esetén legalább 0.9 valószínűséggel döntsünk úgy, hogy a hipotézis teljesül?

Megoldás: Vezessük be a következő valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha a j -ik dobás eredménye fej, $\xi_j = 0$, ha a j -ik dobás eredménye írás, $1 \leq j \leq 30\,000$, $S = S_{30\,000} = \sum_{j=1}^{30\,000} \xi_j$. Ha a fejdobás eredményének valószínűsége pontosan $\frac{3}{4}$, akkor $E\xi_j = \frac{3}{4}$, $E\xi_j^2 = \frac{3}{4}$, $\text{Var } \xi_j = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \frac{3}{16}$, $ES = 30\,000E\xi_j = 22\,500$, $\text{Var } S = 30\,000\text{Var } \xi_j = 5625 = 75^2$. Innen és a centrális határeloszlástételből,

$$P(S > k) = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{\text{Var } S}} > \frac{k - 22\,500}{75}\right) = 1 - P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{\text{Var } S}} \leq \frac{k - 22\,500}{75}\right) \\ \sim 1 - \Phi\left(\frac{k - 22\,500}{75}\right).$$

Válasszuk a k számot úgy, hogy a fenti valószínűség körülbelül 0.9 legyen. Ekkor a $\Phi\left(\frac{k - 22\,500}{75}\right) = 0.1$ vagy ami ezzel ekvivalens, a $\Phi\left(\frac{22\,500 - k}{75}\right) = 0.9$ egyenletet kell kielégítenünk. A normális eloszlás-táblázat alapján $\frac{22\,500 - k}{75} \sim 1.28$, ami azt jelenti, hogy $k = 22\,500 - 75 \cdot 1.28$ és $p = \frac{3}{4}$ esetén annak valószínűsége, hogy a fejdobások száma nagyobb mint $k = 22\,500 - 75 \cdot 1.28 = 22\,212$ és $p = \frac{3}{4}$ esetében annak valószínűsége, hogy legalább ennyi fejdobás történik körülbelül 0.9. Ha $p \geq \frac{3}{4}$, akkor ez a valószínűség nagyobb. Ezért a $k = 22\,212$ helyes választás.

4. feladat:

Ledobunk egymástól függetlenül 24 000 pontot a $[0, 2]$ intervalumra egyenletes eloszlással, (azaz annak a valószínűsége, hogy egy ledobott pont értéke x -nél kisebb $\frac{x}{2}$ -vel egyenlő, ha $0 \leq x \leq 2$, eggyel egyenlő, ha $x \geq 2$, és nulla, ha $x \leq 0$.) Őrizzük meg azokat a ledobott pontokat, melyek értéke 1-nél kisebb, és hagyjuk el azokat, melyek értéke, nagyobb mint egy. Mi annak a valószínűsége, hogy a megőrzött pontok értékeinek az összege 5900 és 6075 közé esik? Adjunk erre a valószínűségre jó közelítő becslést a mellékelt normális eloszlástáblázat segítségével.

Megoldás: Vezessük be a következő ξ_j , $1 \leq j \leq 24\,000$, valószínűségi változókat: $\xi_j = x$, ha a j -ik ledobott pont értéke x , és $0 \leq x \leq 1$, és $\xi_j = 0$, ha a j -ik ledobott pont értéke az $(1, 2]$ intervallumba esik. Ekkor a megőrzött pontok összege $S = \sum_{j=1}^{24\,000} \xi_j$, továbbá a ξ_j valószínűségi változók függetlenek és egyforma eloszlásúak. Ezért a centrális határeloszlástétel segítségével jó becslést tudunk adni a minket érdeklő $P(5900 < S < 6075)$ valószínűségre. Ennek érdekében ki kell számolnunk a ξ_1 valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét. Vegyük észre, hogy ugyan a ξ_1 valószínűségi változónak nincs sűrűségfüggvénye, és nem diszkrét eloszlású, viszont annak F eloszlásfüggvénye felírható $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ alakban, ahol $F_1(x)$ nek van sűrűségfüggvénye, ami az $f(x) = \frac{1}{2}$ függvény a $[0, 1]$ intervallumon, és $f(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > 1$, és $F_2(x)$ olyan mértéket határoz meg, amelyik a nullába van koncentrálna, és a nulla mértéke $\frac{1}{2}$. Pontosabban, tetszőleges A halmaz valószínűsége $P(A) = \int_A F(dx) = \int_A F_1(dx) + \int_A F_2(dx) = \int_A \frac{1}{2} dx + \int_A F_2(dx)$, ahol $\int_A F_2(dx) = \frac{1}{2}$, ha $0 \in A$, és $\int_A F_2(dx) = 0$, ha $0 \notin A$. Ekkor tetszőleges $h(x)$ függvényre $Eh(\xi) = \int h(x)F(dx) = \int h(x)F_1(dx) + \int h(x)F_2(dx) = \int_0^1 \frac{1}{2}h(x) dx + \frac{1}{2}h(0)$. Ezért $E\xi_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 x dx = \frac{1}{4}$, $E\xi_1^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{6}$, $\text{Var } \xi_1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{16} = \frac{5}{48}$, és $ES = 6000$, $\text{Var } S = 2500$. Innen

$$P(5900 < S < 6075) = P\left(-2 < \frac{S - ES}{\sqrt{\text{Var } S}} < 1.5\right) \\ \sim \Phi(1.5) - \Phi(-2) = \Phi(1.5) + \Phi(2) - 1.$$

Házi feladat.

Egy szabályos dobókockát feldobunk 2700 alkalommal egymástól függetlenül, és összeszámoljuk a páros értékű dobások eredményét. Adjunk jó közelítő becslést a centrális határeloszlástétel és egy normális eloszlástáblázat segítségével arra, hogy ez az összeg 420 és 720 közé esik.

Eloszlások konvergenciájáról.

A centrális eloszlástétel formális megfogalmazása úgy szól, hogy bizonyos valószínűségi változók eloszlásának sorozata konvergál a normális eloszlásfüggvényhez. Annak érdekében, hogy ezt bebizonyítsuk először tisztázni kell a következő kérdést: Mikor mondjuk azt, hogy valószínűségi változók eloszlásai konvergálnak egy határeloszláshoz? Ez a kérdés nem annyira egyszerű mint azt az első pillanatban gondolnánk. E fogalom helyes definíciója a centrális határeloszlástétel bizonyításának az első természetes lépése. A problémát az okozza, hogy egy általános elvet kell kidolgoznunk, amelyik viszonylag jól ellenőrizhető feltételt ad arra, hogy eloszlásfüggvények egy sorozata konvergáljon egy eloszlásfüggvényhez. Ehhez viszont az eloszlásban való konvergencia jó definícióját kell megadni, és ezt olyan határeloszlások esetében is meg kell tennünk, amelyek bonyolultabbak, mint a normális eloszlásfüggvény. Ezért olyan az eloszlások konvergenciájával kapcsolatos problémákat is tárgyalnunk kell, amelyek abban a szép esetben, amikor normális eloszlás a határeloszlásfüggvény nem merülnek meg. (Magának a centrális határeloszlástétel részletes bizonyítását időhiany miatt elhagyjuk.)

Eloszlásban való konvergencia definíciója. Legyen $F_n(\cdot)$, $n = 1, 2, \dots$, eloszlásfüggvények sorozata a számegegyesen. Azt mondjuk, hogy az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak egy $F(\cdot)$ eloszlásfüggvényhez, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$ az $F(\cdot)$ (határ)eloszlásfüggvény minden folytonossági pontjában.

Legyen ξ_n , $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók sorozata. Azt mondjuk, hogy a ξ_n valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak egy $F(\cdot)$ eloszlásfüggvényhez, ha az $F_n(x) = P(\xi_n < x)$, $-\infty < x < \infty$, eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az $F(x)$ eloszlásfüggvényhez.

Legyen ξ_n , $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók sorozata. Azt mondjuk, hogy a ξ_n valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak egy ξ valószínűségi változóhoz, ha az $F_n(x) = P(\xi_n < x)$, $-\infty < x < \infty$, eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az $F(x) = P(\xi < x)$, $-\infty < x < \infty$ eloszlásfüggvényhez.

1. megjegyzés: A normális eloszlásfüggvény minden pontban folytonos. Ezért a centrális határeloszlásfüggvény azt mondja ki, hogy független, egyforma eloszlású valószínűségi változók normalizáltjai eloszlásban konvergálnak a standard normális eloszlásfüggvényhez. Ebben az esetben nincs jelentősége annak, hogy a határeloszlásfüggvény (jelen esetben nem létező) szakadási pontjaiban nem követeljük meg a konvergenciát.

2. megjegyzés: A fenti definícióban van bizonyos önisméltés. Sokszor előfordul, hogy ugyanazt a fogalmat némileg eltérő szóhasználatban használják. Ezért egymás mellett felsoroltuk a különböző lehetséges megfogalmazásokat. Tulajdonképpen csak arról van szó, hogy valószínűségi változók eloszlásban való konvergenciáján e valószínűségi változók eloszlásának az eloszlásban való konvergenciáját értjük. Továbbá azt mondhatjuk, hogy az eloszlásban való konvergencia limesze egy ξ valószínűségi változó, ha a limesz ennek a valószínűségi változónak az eloszlása.

Felmerül a kérdés, miért van kitüntetett szerepe a határeloszlásfüggvény szakadási pontjainak az eloszlásfüggvény konvergenciájának definíciójában. Természetes-e, hogy ezekben a pontokban nem követeltük meg a konvergenciát? E kérdés megértésének érdekében tegyük a következő megjegyzést.

Egy a számegegyesen megadott F eloszlásfüggvény indukál egy valószínűségi mértéket a számegegyesen. Ez az a Stieltjes mérték, amelyet μ_F -fel jelöltünk, és amelynek létezését csak kimondtuk, de az állítás bizonyítását elhagytuk, mert az a mértékelmélet feladata. Az eloszlásban való konvergencia definíciójában valójában nem az F_n eloszlásfüggvények konvergenciáját követeljük meg az F eloszláshoz, hanem az F_n eloszlások által indukált μ_{F_n} Stieltjes mértékek konvergenciáját az F eloszlás által indukált μ_F mértékhez. Szemléletesen a μ_{F_n} mértékek elképzelhetőek mint olyan tömegeloszlások a számegegyesen, amelyekben egy $A \subset R$ halmaz „súlya” a $\mu_{F_n}(A)$ mérték. Az eloszlásban való konvergencia azt jelenti, hogy a μ_{F_n} tömegeloszlások nagy n indexre közel vannak a μ_F tömegeloszláshoz.

Az eloszlásban való konvergencia definíciójának jobb megértése érdekében tekintsük a következő egyszerű példát. Legyen $x_0 = 0$, és x_n , $n = 1, 2, \dots$, olyan számsorozat, amelyre $x_n < 0$, $n = 1, 2, \dots$, és $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Legyen μ_{F_n} , $n = 0, 1, 2, \dots$, az a mérték, amely az x_n pontba van koncentrálna, azaz $\mu_{F_n}(\{x_n\}) = 1$, részletesebben $\mu_{F_n}(A) = 1$,

ha $x_n \in A$, és $\mu_{F_n}(A) = 0$, ha $x_n \notin A$. A μ_{F_n} eloszlás azon F_n eloszlásfüggvény által meghatározott Stieltjes mérték, amelyre $F_n(x) = 0$, ha $x \leq x_n$, $F_n(x) = 1$, ha $x > x_n$. Természetes azt várni, hogy az eloszlásfüggvény alkalmas definíciója esetén a most definiált példában az F_n eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az F_0 eloszláshoz. Másrészt vegyük észre, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F_0(x)$ minden $x \neq 0$ számra. De az $x = 0$ pontban, azaz az F_0 függvény szakadási pontjában ez a konvergencia nem teljesül, mert $F_n(0) = 1$, ha $n \geq 1$, és $F_0(0) = 0$. Tehát az általunk megadott definíció szerint az F_n eloszlások eloszlásban konvergálnak az F_0 eloszláshoz, de annak érdekében, hogy ez teljesüljön szükség volt arra, hogy az eloszlásban való konvergencia definíciójában ne követeljük meg az eloszlásfüggvények konvergenciáját a határfüggvény szakadási pontjaiban.

Be lehet látni, hogy az eloszlásban való konvergencia kifejezi azt a szemléletes tartalmat, amelyet a tömegeloszlásokkal való reprezentáció sugall, ezt azonban nem tesszük. Ehelyett egy olyan eredményt fogalmazok meg, amely az eloszlásban való konvergencia egy ekvivalens jellemzését adja meg. Ennek az eredménynek csak bizonyításvázlatát adom meg, bár a bizonyítás nem nehéz. Utána röviden leírom, miért hasznos ez az eredmény határeloszlástételek vizsgálatában.

Tétel. $F_n(u)$, $n = 1, 2, \dots$ eloszlásfüggvények sorozata akkor és csak akkor konvergál eloszlásban egy $F(u)$ eloszlásfüggvényhez, ha minden a számegyenesen értelmezett folytonos, korlátos $g(u)$ függvényre teljesül a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g(u) dF_n(u) = \int g(u) dF(u) \quad (a)$$

azonosság.

1. *megjegyzés:* Az eloszlásban való konvergenciájának két jellemzését adtuk meg. Az egyik a definícióban megadott leírás, a másik a tételben megadott ekvivalens jellemzés. Ez a tételben adott jellemzés azért hasznos, mert amikor bizonyítani akarjuk eloszlások konvergenciáját, akkor azt egyszerűbb úgy megtenni, hogy korlátos és folytonos függvények ezen eloszlások szerinti integráljának a konvergenciáját bizonyítjuk be. Visszont, mint a centrális határeloszlástételéhez kapcsolódó példáink is mutatják, a határeloszlástételek gyakorlati alkalmazásaiban majdnem mindig eloszlásfüggvények konvergenciájának az eredeti definíciójában megadott tulajdonságát használjuk.

2. *megjegyzés:* Az eloszlásban való konvergenciát szokás gyenge konvergenciának is nevezni. Erdemes megjegyezni, hogy a funkcionálanalízisben is szokás Banach terek funkcionáljainak gyenge konvergenciájáról beszélni, és az előbb kimondott tétel azt is jelenti, hogy a gyenge konvergenciának a valószínűségi számításban és funkcionálanalízisben használt értelmezése összhangban van egymással. Ugyanis egy a számegyenesen definiált μ (valószínűségi) mértéket fel lehet fogni, mint a korlátos és folytonos függvények Banach terén értelmezett (korlátos és lineáris) funkcionált. Nevezetesen a μ mérték az $f(\cdot)$ korlátos és folytonos függvényhez hozzárendeli a $\mu(f) = \int f(u) \mu(du)$ számot. A funkcionálanalízisben definiált fogalomrendszer szerint a μ_n mértékek gyenge konvergenciája a μ mértékhez azt jelenti, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(u) \mu_n(du) = \int f(u) \mu(du)$ minden folytonos és korlátos függvény esetében, ez pedig a fent kimondott tétel szerint

a μ_n mértékeknek, pontosabban az általuk meghatározott $F_n(x) = \mu_n(\{u: u < x\})$ eloszlásfüggvények gyenge (azaz eloszlásbeli) konvergenciáját jelenti a μ mértékhez, pontosabban az általa meghatározott $F(x) = \mu(\{u: u < x\})$ eloszlásfüggvényhez.

Binonyításvázlat: Tegyük fel először azt, hogy az F_n eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak egy F eloszlásfüggvényhez, és tekintsünk egy folytonos és korlátos $g(\cdot)$ függvényt a számegyenesen. Ekkor a g függvény folytonossága és az F illetve F_n eloszlásfüggvények viselkedése miatt $\pm\infty$ pontok környezetében minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan elég nagy $K = K(\varepsilon) > 0$, amelyre $\int_{u: |u| > K} |g(u)| dF_n(u) < \varepsilon$ minden $n = 1, 2, \dots$ indexre, és ez az állítás érvényes akkor is, ha az F_n eloszlásfüggvényt az F eloszlásfüggvénnyel helyettesítjük. Továbbá a folytonos $g(\cdot)$ függvény a $[-K, K]$ intervallumban egyenletesen folytonos. Ennek az észrevételnek és annak a ténynek a segítségével, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$ az $F(\cdot)$ minden folytonossági pontjában be lehet látni, véve a $[-K, K]$ intervallumnak egy olyan elég finom felosztását, amelynek az osztópontjai az F függvény folytonossági pontjai, hogy

$$\left| \int_{u: |u| \leq K} g(u) dF_n(u) - \int_{u: |u| \leq K} g(u) dF(u) \right| < \varepsilon, \quad \text{ha } n \geq n_0(\varepsilon).$$

(E lépésben kihasználjuk azt, hogy egy monoton függvénynek csak megszámlálható sok szakadási pontja van. Miért?) Innen $\varepsilon \rightarrow 0$ határátmenettel megkapjuk az (a) állítás bizonyítását.

Megfordítva tegyük fel, hogy teljesül az (a) reláció, és legyen x az F függvény folytonossági pontja. Rögzítve egy kis $\varepsilon > 0$ számot definiáljuk a következő $g^\pm(u) = g_{x,\varepsilon}^\pm(u)$, $-\infty < u < \infty$ folytonos és korlátos függvényeket: $g^+(u) = 0$, ha $u \geq x + \varepsilon$, $g^+(u) = 1$, ha $u \leq x$, $g^+(u) = \frac{x + \varepsilon - u}{\varepsilon}$, ha $x \leq u \leq x + \varepsilon$, $g^-(u) = 0$, ha $u \geq x$, $g^-(u) = 1$, ha $u \leq x - \varepsilon$, $g^-(u) = \frac{x - u}{\varepsilon}$, ha $x - \varepsilon \leq u \leq x$. Alkalmazva az (a) állítást kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F(x - \varepsilon) &\leq \int g_{\varepsilon,x}^-(u) F(du) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_{\varepsilon,x}^-(u) F_n(du) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_{\varepsilon,x}^+(u) F_n(du) = \int g_{\varepsilon,x}^+(u) F(du) \leq F(x + \varepsilon), \end{aligned}$$

és véve az $\varepsilon \rightarrow 0$ határátmenetet kapjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$, feltéve, hogy az x pont az F függvény folytonossági pontja.

Sok vizsgálatban az eloszlásban való konvergenciának a tételben megadott jellemzése jobban használható mint az eredeti definíció.

Mellékesen megjegyzem, hogy ennek az eredménynek egy másik haszna az, hogy ezt a definíciót jobban tudjuk általánosítani, ha eloszlások konvergenciáját akarjuk definiálni általánosabb terekben. Az ilyen kérdések természetes módon felmerülnek, ha nemcsak valószínűségi változók viselkedését akarjuk vizsgálni, hanem véletlen folyamatokét egy véges időintervallumban. Itt az a probléma merül fel, hogy ebben az esetben

olyan valószínűségi változókkal kell dolgoznunk, amelyek értéküket a számegeyenesen értelmezett függvények terén veszik fel. Viszont az eloszlásfüggvények, illetve azok konvergenciája nem definiálható általános terekben, mert az eloszlásfüggvény definíciójában szereplő félegyenesek túlságosan erősen kötődnek a számegeyenes, a többdimenziós eloszlások definíciója pedig az euklidészi tér geometriájához. Ha eloszlásfüggvények helyett valószínűségi mértékeket tekintünk, akkor ezek konvergenciájának a definícióját természetes módon tudjuk definiálni nagyon általános terekben is az (a) reláció általánosítása segítségével.

Ha eloszlásfüggvények konvergenciáját az (a) tulajdonság vizsgálatának segítségével akarjuk bebizonyítani, akkor természetes módon felmerül az a kérdés, hogy nem lehetséges-e ezt a feltételt gyengíteni, nem elegendő-e az (a) reláció teljesülését a folytonos és korlátos függvényeknek csak egy elég gazdag részosztályára ellenőrizni, és ennek segítségével eldönteni, hogy teljesül-e az eloszlásban való konvergencia. Természetesen a folytonos és korlátos függvények olyan részosztályát kívánjuk tekinteni, amelyekre ez a feltétel könnyebben ellenőrizhető. Kiderült, hogy erre a kérdésre igenlő választ lehet adni, elegendő csak a trigonometrikus függvényeket tekinteni, azaz az $g_t(u) = e^{itu}$, $-\infty < t < \infty$, alakú függvényeket. Jegyezzük meg, hogy ezek a függvények komplex és nem valós értékűek, de mindazok az eredmények, amelyek valós értékű valószínűségi változókra érvényesek, természetes módon általánosíthatók komplex szám értékű valószínűségi változókra is. Annak oka, hogy a trigonometrikus függvényeket jól tudjuk használni az, hogy minden $-\infty < s, t < \infty$, paraméterre teljesül a $g_s(u)g_t(u) = e^{isu}e^{itu} = e^{i(s+t)u} = g_{s+t}(u)$ azonosság. Látni fogjuk, hogy ez az azonosság sok segítséget jelent, ha független valószínűségi változók összegeinek eloszlását vizsgáljuk. Megjegyzem, hogy az ilyen jellegű összefüggések alkalmazása nemcsak a valószínűségi számításban fontos. Ennek általánosításán alapul az algebra egy mély és fontos területe, a csoportreprezentációk elmélete.

A további vizsgálatokban hasznos a karakterisztikus függvények alább megadott definíciója.

Valószínűségi változó karakterisztikus függvényének a definíciója. *Legyen ξ valószínűségi változó valamely (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn, és jelölje $F(u) = P(\xi < u)$, $-\infty < u < \infty$, a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. A ξ valószínűségi változónak a karakterisztikus függvénye a*

$$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} F(du), \quad -\infty < t < \infty,$$

függvény. Adva egy F eloszlásfüggvény az F eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényét is definiálni fogjuk mint egy F eloszlású ξ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. (Mivel a karakterisztikus függvényt a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényének a segítségével ki lehet számolni, ezért jogunk van egy eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényéről beszélni.)

A következő egyszerű állításokat azok fontosságuk miatt külön Lemma formájában mondjuk ki.

Lemma valószínűségi változók karakterisztikus függvényének viselkedéséről.

Legyenek ξ_1, \dots, ξ_n független valószínűségi változók, jelölje $S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j$ e valószínűségi változók összegét és $\varphi_j(t)$, $1 \leq j \leq n$, a ξ_j valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. Ekkor az S_n összeg karakterisztikus függvénye a $\psi_n(t) = Ee^{itS_n} = \prod_{j=1}^n \varphi_j(t)$, $-\infty < t < \infty$ függvény. Ha A és $B \neq 0$ valós számok, akkor a $\frac{S_n - A}{B}$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye az

$$Ee^{it(S_n - A)/B} = e^{-itA/B} \psi_n\left(\frac{t}{B}\right) = e^{-itA/B} \prod_{j=1}^n \varphi_j\left(\frac{t}{B}\right)$$

függvény.

Legyen ξ olyan valószínűségi változó $F(\cdot)$ eloszlásfüggvénnyel, amelyre teljesül az $E|\xi|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^k F(du) < \infty$ egyenlőtlenség valamilyen k pozitív egész számra. Ekkor a ξ valószínűségi változó $\varphi(t)$ karakterisztikus függvényének a deriváltjai megadhatók a $\frac{d^j}{dt^j} \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i^j u^j e^{itu} F(du)$ képlettel minden $0 \leq j \leq k$ és $-\infty < t < \infty$ számra.

Speciálisan, $t = 0$ választással $\left. \frac{d^j \varphi(t)}{dt^j} \right|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} i^j u^j F(du) = i^j E\xi^j$ minden $0 \leq j \leq k$ számra.

Bizonyítás:

$$Ee^{itS_n} = E^{it(\xi_1 + \dots + \xi_n)} = Ee^{it\xi_1} e^{it\xi_2} \dots e^{it\xi_n} = Ee^{it\xi_1} Ee^{it\xi_2} \dots Ee^{it\xi_n} = \prod_{j=1}^n \varphi_j(t)$$

a ξ_j , $1 \leq j \leq n$, függetlensége miatt illetve az $e^{it\xi_j}$ valószínűségi változók ebből következő függetlensége miatt. Ezenkívül

$$Ee^{it(S_n - A)/B} = Ee^{i(t/B)S_n} e^{-itA/B} = e^{-itA/B} \psi_n\left(\frac{t}{B}\right),$$

ha az S_n valószínűségi változó karakterisztikus függvénye $\psi_n(t)$. Innen következnek a Lemma első paragrafusában kimondott állítások.

A Lemma második paragrafusában kimondott állítás bizonyítása érdekében írjuk fel a $\varphi(t) = Ee^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} F(du)$ azonosságot, és differenciáljuk j , $j \leq k$, alkalommal. Be lehet látni, hogy az $E|\xi|^k < \infty$ feltétel teljesülése esetén az azonosság jobboldalán az integrálás és differenciálás sorrendje felcserélhető. Innen kapjuk, hogy $\frac{d^j}{dt^j} \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i^j u^j e^{itu} F(du)$. Alkalmazva a $t = 0$ helyettesítést megkapjuk a Lemma utolsó bizonyítandó állítását is.

Megjegyzés: Legyenek ξ_1, ξ_2, \dots , független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyekre $E\xi_1 = 0$, és vezessük be a $\sigma^2 = \text{Var } \xi_1$, valamint az $Ee^{it\xi_1} = \varphi(t)$, $-\infty < t < \infty$ ($\varphi(t)$ a ξ_1 valószínűségi változó karakterisztikus függvénye) jelöléseket. Legyen továbbá $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ és $\bar{S}_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}\sigma}$ az S_n valószínűségi változó normalizáltja. Ekkor $Ee^{itS_n} = \varphi(t)^n$, $Ee^{it\bar{S}_n} = \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)^n$, és $\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) \sim 1 - \frac{t^2}{2n\sigma^2}$. Ez a formula lehetővé teszi, hogy viszonylag jó becslést adjunk a \bar{S}_n valószínűségi változó karakterisztikus függvényére. Azt kívánjuk vizsgálni, lehetővé teszi-e ez a formula egy jó határeloszlástétel bizonyítását független, egyforma eloszlású valószínűségi változók normalizáltjának az összegére.

Tekintsük először csak azt a speciális esetet, amikor olyan olyan ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét tekintjük, amelyik csak egész értékeket vesz fel. Legyen $P(\xi = k) = p_k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k = 1$. Ekkor a ξ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye az $\varphi(t) = Ee^{it\xi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt} P(\xi = k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{ikt}$, $-\infty < t < \infty$. Ekkor a $\varphi(t)$ függvény 2π szerint periódikus, és tulajdonképpen egy Fourier sor, amelynek k -ik (azaz az e^{ikt} trigonometrikus függvényhez tartozó Fourier együtthatója) p_k . A Fourier sorok elméletének egy egyszerű, de nagyon fontos eredménye alapján egy $\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}$, $-\pi < t \leq \pi$, függvény Fourier együtthatóit a $\varphi(t)$ Fourier sor ismeretében az

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi(t) dt \quad (*)$$

képlet segítségével ki lehet számolni. Az előbb kimondott Lemma alapján független valószínűségi változók normalizált összegének a karakterisztikus függvényére viszonylag egyszerű és jó közelítést lehet adni. Ez és a (*) formula azt is lehetővé teszi, hogy egész értékű valószínűségi változók esetében jó becslést adjunk arra, hogy független valószínűségi változók összegei egy adott értéket vesznek fel. Ez lehetővé teszi a centrális határeloszlástétel bizonyítását abban a speciális esetben, ha egész értékű valószínűségi változók összegét vizsgáljuk. Az általános eset vizsgálatának a vezérmotívuma tulajdonképpen az, hogy hogyan tudjuk ezt a módszert adaptálni az általános esetre, amikor nem áll rendelkezésünkre a * képlethez hasonló viszonylag egyszerű „inverziós formula”. Most az egész értékű valószínűségi változók vizsgálatánál a részletek kidolgozása helyett megmutatjuk a kiegészítésben azt, hogy hogyan lehet ennek a módszernek a segítségével az analízis egyik fontos képletét az úgynevezett Stirling formulát bebizonyítani. Ez a következő eredmény.

Stirling formula:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

azaz az első n egész szám szorzat $n!$ teljesíti az alábbi relációt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} = 1.$$

Ahhoz, hogy a karakterisztikus függvényekkel jól tudjunk számolni, szükségünk van olyan eredményre, amely szerint a trigonometrikus polinomok a folytonos függvények egy elég gazdag részosztályát alkotják. Ilyen jellegű eredmény Weierstrass második approximációs tétele, amely azt mondja ki, hogy folytonos és periodikus függvényeket tetszőleges pontossággal lehet közelíteni a szuprénum normában trigonometrikus polinomokkal. (Weierstrass első approximációs tétele hasonló állítást fogalmaz meg véges intervallumban folytonos függvények polinomokkal való approximálhatóságáról.) Megfogalmazzuk ezt az eredményt, és (vázlatosan) bebizonyítjuk annak néhány számunkra fontos következményét.

Weierstrass második approximációs tétele. *Tetszőleges folytonos és 2π szerint periodikus $f(t)$ függvényre és $\varepsilon > 0$ valós számra létezik olyan $P_n(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ikt}$ trigonometrikus polinom, amelyre*

$$\sup_{-\infty < t < \infty} |f(t) - P_n(t)| < \varepsilon.$$

Ahhoz, hogy eloszlásfüggvények karakterisztikus függvényeinek konvergenciájából következtetni tudjunk magunknak az eloszlásfüggvényeknek a konvergenciájára tudnunk kell azt, hogy az a karakterisztikus függvények meghatározzák az eloszlásfüggvényeket. Megfogalmazzuk ezt az eredményt, és megadjuk annak bizonyítását Weierstrass második approximációs tétele segítségével.

Tétel. *Legyen $F(\cdot)$ és $G(\cdot)$ két eloszlásfüggvény, amelyek karakterisztikus függvénye megegyezik. Ekkor $F(x) = G(x)$ minden $-\infty < x < \infty$ számra.*

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy Weierstrass második approximációs tételéből következik, hogy tetszőleges $K > 0$ és $\varepsilon > 0$ számokra és a K szám szerint periodikus $h(\cdot)$ függvényre igaz, hogy létezik olyan $P_n(t) = \sum_{j=-n}^n a_j e^{2\pi i j t / K}$ trigonometrikus polinom, amelyre teljesül a $\sup_{-\infty < t < \infty} |P_n(t) - h(t)| \leq \varepsilon$ becslés. Integrálva a $h(\cdot)$ és a $P_n(\cdot)$ függvényt a F és G eloszlásfüggvény szerint, a fenti approximációból kapjuk, hogy $\int |h(u) - P_n(u)| F(du) \leq \varepsilon$ és $\int |h(u) - P_n(u)| G(du) \leq \varepsilon$. Ezért $|\int h(u) F(du) - \int h(u) G(du)| \leq 2\varepsilon$. Mivel ez minden $\varepsilon > 0$ számra igaz, ezért $\int h(u) F(du) = \int h(u) G(du)$. Továbbá, innen következik az is, hogy ha $h(\cdot)$ kompakt tartójú, folytonos függvény, azaz ha létezik olyan A szám, amelyre $h(u) = 0$, ha $|u| \geq A$, akkor $\int h(u) F(du) = \int h(u) G(du)$. Valóban, definiáljuk minden $K > A$ számra azt a $h_K(\cdot)$ függvényt, amely a $h(\cdot)$

függvény $[-K, K]$ intervallumra vett megszorításának a $2K$ szerinti periodikus kiterjesztése, azaz $h_K(u) = h(u - 2lK)$, ahol l olyan egész szám, amelyre $-K \leq u < K$. Ekkor $\int h(u)F(du) = \lim_{K \rightarrow \infty} \int h_K(u)F(du) = \lim_{K \rightarrow \infty} \int h_K(u)G(du) = \int h(u)G(du)$.

Legyenek $-\infty < x < y < \infty$ olyan számok a számegyenesen, amelyek folytonossági pontjai mind az F mind a G eloszlásfüggvénynek. Belátjuk a fenti reláció segítségével, hogy $F(y) - F(x) = G(y) - G(x)$. Valóban, rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot, és definiáljuk a következő $h(\cdot) = h_\varepsilon(\cdot)$ függvényt: $h(u) = 1$, ha $x \leq u \leq y$, $h(u) = 0$, ha $y + \varepsilon \leq u$ vagy $u \leq x - \varepsilon$, $h(u) = \frac{y + \varepsilon - u}{\varepsilon}$, ha $y \leq u \leq y + \varepsilon$, $h(u) = \frac{u - x + \varepsilon}{\varepsilon}$, ha $x - \varepsilon \leq u \leq x$. Felhasználva az $\int h_\varepsilon^\pm(u)F(du) = \int h_\varepsilon^\pm(u)G(du)$ azonosságot, és azt hogy $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int h_\varepsilon(u)F(du) = F(y) - F(x)$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int h_\varepsilon(u)G(du) = G(y) - G(x)$, ha x és y az F és G függvény folytonossági pontjai, $\varepsilon \rightarrow 0$ határátmenettel kapjuk az $F(y) - F(x) = G(y) - G(x)$ azonosságot.

Ez utóbbi azonosságot felhasználva és alkalmazva az $x \rightarrow -\infty$ határátmenetet kapjuk, hogy $F(y) = G(y)$, ha y mind az $F(\cdot)$ mind a $G(\cdot)$ eloszlásfüggvénynek folytonossági pontja. Mivel az F és G eloszlásfüggvénynek csak megszámlálható sok szakadási pontja van, és mind a két függvény balról folytonos, innen következik, hogy az F és G eloszlásfüggvények megegyeznek.

Az előző tétel bizonyítási módszerének finomítása segítségével lehet bebizonyítani a következő eredményt, amelyet fontossága miatt alaptételnek nevezünk. Ennek bizonyítása azonban a Fourier analízis más módszereit is felhasználja. Emiatt, illetve időhiány miatt a bizonyítást elhagyom.

Eloszlások konvergenciájáról szóló Alaptétel. *Legyen $F_n(u)$, $-\infty < u < \infty$, eloszlásfüggvények egy sorozata $\varphi_n(t) = \int e^{itu} F_n(du)$ karakterisztikus függvényekkel, $n = 1, 2, \dots$. Ha a $\varphi_0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t)$ határérték létezik minden $-\infty < t < \infty$ számra, és a $\varphi_0(t)$ limeszfüggvény folytonos az origóban, akkor létezik olyan $F_0(u)$ eloszlásfüggvény, amelynek a $\varphi_0(t)$ függvény a karakterisztikus függvénye. Továbbá e feltétel teljesülése esetén az $F_n(u)$ eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az $F_0(u)$ eloszlásfüggvényhez.*

Megfordítva, ha $F_n(u)$, $n = 1, 2, \dots$, eloszlásfüggvényeknek egy olyan sorozata, amely egy $F_0(u)$ eloszlásfüggvényhez konvergál eloszlásban, $\varphi_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, jelöli az $F_n(u)$, $\varphi_0(t)$ pedig az $F_0(u)$ eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényét, akkor $\varphi_0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t)$ minden $-\infty < t < \infty$ számra. Továbbá, ez a konvergencia egyenletes minden véges intervallumban.

Megjegyzés: Az előadáshoz csatlakozó gyakorlatban kitűztem egy (elméleti jellegű) feladatot, amely fontos szerepet játszik a bizonyításban. E feladat eredményének a segítségével tudjuk kihasználni a tétel azon feltételét, hogy a karakterisztikus függvények határértéke folytonos a nullában.

A fent kimondott tétel a valószínűségszámítás rendkívül fontos eredménye, és az eloszlásbeli konvergencia vizsgálatában rendkívül fontos szerepet játszik. Ezért illik tudni ennek az eredménynek a pontos megfogalmazását. Viszont a minket érdeklő

határeloszlástétel bizonyításához e tétel alábbi gyengített változatát, amelynek bizonyítása egyszerűbb.

Eloszlások konvergenciájáról szóló Alaptétel gyengített változata. Legyen $F_n(u)$, $-\infty < u < \infty$, eloszlásfüggvények egy sorozata $\varphi_n(t) = \int e^{itu} F_n(du)$ karakterisztikus függvényekkel, $n = 1, 2, \dots$, és $F_0(u)$, $-\infty < u < \infty$, eloszlásfüggvény $\varphi_0(t) = \int e^{itu} F_0(du)$ karakterisztikus függvénnyel. Az F_n eloszlásfüggvények akkor és csak akkor konvergálnak eloszlásban az F_0 eloszláshoz, ha a $\varphi_n(t)$ karakterisztikus függvények konvergálnak a $\varphi_0(t)$ karakterisztikus függvényhez minden $-\infty < t < \infty$ számra.

Megjegyzés: Az alaptétel illetve annak gyengített változatának fő jelentősége abban áll, hogy lehetővé teszik eloszlásfüggvények konvergenciájának bizonyítását azok karakterisztikus függvényeinek segítségével. A lényeges különbség az Alaptétel, illetve annak gyengített változata között az, hogy az Alaptétel segít a határeloszlás megtalálásában akkor is, ha azt nem ismerjük a kezdet kezdetén, illetve annak vizsgálatában, hogy létezik-e egyáltalán valamilyen határeloszlás. Ha eleve megvan a jelölt a határeloszlásra, és annak ki tudjuk számítani a karakterisztikus függvényét, (a centrális határeloszlástételben ez a helyzet), akkor a konvergencia bizonyításához elegendő az Alaptétel gyengített változatának a használata. Jegyezzük meg továbbá, hogy minden karakterisztikus függvény folytonos mindenütt. Ezért az az eloszlásban való konvergencia számára az Alaptételben megfogalmazott követelmény, hogy a karakterisztikus függvények limesze egy nullában folytonos függvény természetes elvárás. Valójában ennek a limesznek mindenütt folytonosnak kell lennie, de a nullában való folytonosság az igazán fontos, és egyben legnehezebben bizonyítható tulajdonság. Felmerülhet az a kérdés, hogy miért olyan fontos ez a tulajdonság. Ennek megértése az előadásban elhagyott bizonyítás egyik kulcslépése. Az esetleges érdeklődők számára megfogalmazom feladat formájában azt az eredményt, amelyik megfogalmazza, milyen számunkra értékes következménye van a határfüggvénynek a nullában való konvergenciájának. Továbbá némi segítséget is adok e feladat megoldásához. Ugyancsak tárgyalok néhány további feladatot, amelyek segíthetnek az alaptételben szereplő feltételek jelentőségének jobb megértésében.

Feladat:

Legyen $F_n(\cdot)$, $n = 1, 2, \dots$, eloszlásfüggvények egy sorozata, amelyek $\varphi_n(\cdot)$ karakterisztikus függvényei az origó egy kis környezetében konvergálnak egy a nullában folytonos függvényhez.

a.) Lássuk be (a Lebesgue tétel segítségével), hogy ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon)$ szám, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \operatorname{Re} [1 - \varphi_n(t)] dt \leq \varepsilon$, ahol

$\operatorname{Re} z$ a z szám reális részét jelöli.

b.) Mutassuk meg, hogy amennyiben $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvények $\varphi_n(\cdot)$ karakterisztikus függvényei teljesítik az a) részben megfogalmazott tulajdonságot, akkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $K = K(\varepsilon)$ szám, amelyre $F_n(-K) + (1 - F_n(K)) \leq \varepsilon$ minden $n = 1, 2, \dots$ számra.

Feladat:

Mutassuk meg, hogy egy F eloszlásfüggvény $\varphi(t) = \int e^{itu} F(du)$ karakterisztikus függvénye folytonos minden pontban.

Annak érdekében, hogy lássuk annak a feltételnek a fontosságát, amely szerint a határfüggvény folytonos az origóban tekintsük a következő feladatban megadott példát.

Feladat:

Legyen $F_n(\cdot)$, $n = 1, 2, \dots$, a $[-n, n]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók sorozata, azaz legyen $F_n(\cdot)$ sűrűségfüggvénye az $f_n(u) = \frac{1}{2n}$, ha $-n \leq u \leq n$, $f_n(u) = 0$, ha $|u| > n$ képlet segítségével megadott függvény. Lássuk be, hogy az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvények karakterisztikus függvényei minden pontban konvergálnak az $\varphi(0) = 1$, $\varphi(t) = 0$, ha $t \neq 0$ képlettel megadott $\varphi(t)$ függvényhez, amelyek az origóban nem folytonos. Továbbá az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvények nem konvergálnak eloszlásban, mert minden véges $[a, b]$ intervallumra $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n([a, b]) = 0$.

Az alaptétel alapján a centrális határeloszlástétel bizonyításához elég kiszámolni a standard normális eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényét, és megmutatni, hogy ha vesszük független, egyforma eloszlású valószínűségi változók összegeinek a normalizáltjait, akkor ezek karakterisztikus függvényei a standard normális eloszlás karakterisztikus függvényéhez tartanak. Fogalmazzuk meg először azt az eredményt, amely megadja a standard normális eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényét.

Tétel a standard normális eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényéről. A $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$, $-\infty < u < \infty$, sűrűségfüggvénnyel rendelkező standard normális eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye a $g(t) = e^{-t^2/2}$ függvény, azaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = e^{-t^2/2}.$$

Magyarázat:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(u-it)^2/2} e^{-t^2/2} du \\ &= e^{-t^2/2} \int_{-\infty-it}^{\infty-it} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} e^{-t^2/2} du. \end{aligned}$$

A fenti számolásban a szokásos technikát alkalmaztuk, az exponensben szereplő kvadrátikus alakot teljes négyzetté alakítottuk át. Azt állítom, hogy

$$\int_{-\infty-it}^{\infty-it} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} e^{-t^2/2} du = 1.$$

Ez az integrál abban különbözik a standard normális sűrűségfüggvény integráljától, hogy a normális sűrűségfüggvény integrálját nem a valós tengelyen, hanem egy vele párhuzamos egyenesen tekintjük. Azt állítom, hogy ez az integrál ugyanannyi, mintha a valós tengelyen intergáltunk volna. Ezt nem nehéz belátni, ha szabad hivatkozni a komplex függvénytan talán legfontosabb eredményére, amely szerint egy analitikus függvény körintegrálja egy zárt görbén nulla. Azt kell kihasználni, hogy a $g(x) = e^{-z^2/2}$ függvény analitikus az egész számsíkon, és ezenkívül a $g(z)$ függvény olyan, hogy amennyiben a z argumentum imaginárius részének az abszolút értéke kisebb mint valamely fix K szám reális részének az abszolút értéke pedig nagyon nagy, akkor a $g(z)$ függvény nagyon kicsi. Mivel ez a bizonyítás a komplex függvénytani ismeretek felhasználása segítségével egyszerűen végrehajtható, viszont ez a komplex függvénytani rész, amelyet nem tanult mindenki elengedhetetlen a bizonyításban, ezért a részletek kidolgozását elhagyom.

Feladat:

Mutassuk meg, a karakterisztikus függvények segítségével, hogy amennyiben ξ és η két független, normális eloszlású valószínűségi változó m_1 és m_2 várható értékkel, σ_1^2 és σ_2^2 szórásnégyzettel, akkor $\xi + \eta$ normális eloszlású valószínűségi változó $m_1 + m_2$ várható értékkel, és $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ szórásnégyzettel.

Kiegészítés

A Stirling formula bizonyítása: Először azt mutatjuk meg, hogy

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{2\pi}{\int_{-\pi}^{\pi} e^{n(e^{it}-1-it)} dt}. \quad (\text{a})$$

Tekintsünk egy ξ Poisson eloszlású valószínűségi változót $\lambda = n$ paraméterrel, legyen azaz $P(\xi = k) = \frac{n^k}{k!} e^{-n}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Számítsuk ki a ξ valószínűségi változó $P_n(t) = Ee^{it\xi}$ karakterisztikus függvényét. Ez a következő $P_n(t)$ Fourier sor:

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) e^{itk} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} e^{-n+ikt} = e^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ne^{it})^k}{k!} = e^{-n+ne^{it}}.$$

Innen, illetve a (*) formulából $k = n$ választással kapjuk, hogy

$$P(\xi = n) = \frac{n^n}{n!} e^{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} P_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int-n+ne^{it}} dt.$$

Ez a formula ekvivalens az (a) formulával.

Az (a) formula alapján a Stirling formula bizonyításához elég megmutatni azt, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{n(e^{it}-1-it)} dt = 1,$$

amit úgyis írhatunk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{-\pi}^{\pi} e^{n(e^{it}-1-it)} dt}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2/2} dt} = 1.$$

Viszont tekintve az e^{it} függvény Taylor sorát kapjuk, hogy

$$n(e^{it} - 1 - it) = -n \left(\frac{t^2}{2} + \alpha(t)t^3 \right) = -\frac{nt^2}{2} + \beta(t)n^{-1/8},$$

alkalmas $|\alpha(t)| \leq \text{const.}$ és $|\beta(t)| \leq \text{const.}$ együtthatókkal, ha $|t| \leq n^{3/8}$, ahonnan $e^{n(e^{it}-1-it)} = e^{-nt^2/2} e^{\beta(t)n^{-1/8}} = e^{-nt^2/2} (1 + \gamma(t)n^{-1/8})$, $\gamma(t) \leq \text{const.}$, ha $t \leq n^{3/8}$, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{-n^{-3/8}}^{n^{-3/8}} e^{n(e^{it}-1-it)} dt}{\int_{-n^{-3/8}}^{n^{-3/8}} e^{-nt^2/2} dt} = 1.$$

Továbbá nem nehéz belátni, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{-n^{-3/8}}^{n^{-3/8}} e^{-nt^2/2} dt}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2/2} dt} = 1,$$

ezért elég megmutatni, hogy az $\int_{-\pi}^{-n^{-3/8}} e^{n(e^{it}-1-it)} dt$ és $\int_{n^{-3/8}}^{\pi} e^{n(e^{it}-1-it)} dt$ integrálok elég kicsik. Ennek bizonyításához jegyezzük viszont meg, hogy $|e^z| = e^{\text{Re } z}$ tetszőleges z komplex számra, ahol $\text{Re } z$ a z szám valós részét jelöli. Innen

$$|e^{n(e^{it}-1-it)}| = e^{n(\cos t - 1)} \leq e^{-\text{const. } n^{1/4}},$$

ha $n^{3/8} \leq |t| \leq \pi$, ahonnan következik a kívánt becslés.