A szeptember 10.-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai

Nem kötelező feladat:

Tekintsük az r-dimenziós euklidészi térnek azon halmazait, melyek előállnak, mint véges sok olyan téglatest uniója, melyek a koordinátatengelyekkel párhuzamos balról zárt jobbról nyílt intervallumok direkt szorzatai. (Ezek az intervallumok lehetnek félegyenesek vagy egyenesek is.) Mutassuk meg, hogy az ilyen halmazok algebrát alkotnak, de nem alkotnak σ-algebrát.

Tekintsük az összes végtelen fej–írás sorozatból álló halmaz olyan részhalmazait, melyek első n koordinátája valamely n számra előírt, $n = 1, 2, \dots$, a többi koordináta pedig tetszőleges. Azon halmazok, melyek előállnak véges sok ilyen halmaz uniójaként algebrát alkotnak alkotnak. Másrészt az összes olyan sorozatból álló halmaz, melyben a páros helyeken fej van, a páratlan helyeken szereplő dobások pedig tetszőlegesek nem elemei ennek az algebrának. Ezert ez az algebra nem σ-algebra.

Megoldás: (A megoldás során a szemléletre hagyatkozunk, nem dolgozunk ki formális jelölésrendszert, stb.) Ha adva van véges sok téglatest uniója, akkor vágjuk szét a teret az összes olyan síkkal, mely valamelyik téglatest lapja. Ekkor láthatjuk, hogy e téglalatestek uniója úgy is előállítható, mint téglalatestek diszjunkt uniója. Ennek felhasználásával ellenőrizhető, hogy a vizsgált halmazrendszer algebra. Az algebra csupa olyan elemből áll, melynek határa véges sok valamelyik koordinátatengelyre merőleges sík része. Másrészt egy gömb nem ilyen halmaz. Viszont egy gömb benne van az ilyen halmazok által generált σ-algebrában.

Hasolóan, könnyű ellenőrizni, hogy a második példában azok és csak azok a halmazok jelennek meg, melyekre létezik egy olyan n egész szám, melyre igaz, hogy egy fej–írás sorozat első n tagjának az ismerétében eldönthető, hogy a sorozat beletartozik-e a halmazba. Az ilyen halmazok algebrát alkotnak. Viszont a feladatban megadott halmaz nem tartozik bele ebbe az algebrába, de beletartozik ezen algebrába tartozó σ-algebrába. Azért tartozik bele ebbe a σ-algebrába, mert megszámlálható sok az algebrába tartozó elem metszeteként előáll.

1. Egy szabályos dobókockát végtelen sokszor feldobunk. Adjunk erre egy jó valószínűségi modellt.

   Megoldás: Megtárgyaljuk, hogy hogyan lehet ilyen modellt konstruálni a mértékek szorzatteréről szóló tétel illetve a valószínűéségszámítás alaptételének nevezett eredmény alapján.

   A mértékek szorzatáról szóló eredmény alapján a következő konstukciót végezhetjük: Definiáljuk minden $n = 1, 2, \dots$ számra a következő (n-től független) $(\Omega, \mathcal{A}_n, P_n)$ valószínűségi mezőt: $\Omega_n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{A}_n$ az Ω_n halmaz összes részhalmaza, $P_n(\{1\}) = P_n(\{2\}) = P_n(\{3\}) = P_n(\{4\}) = P_n(\{5\}) = P_n(\{6\}) = \frac{1}{6}$. Tekintsük e végtelen sok valószínűségi mező drirekt szorzatát, amelyik a következő: Ω az összes $\{j_1, j_2, \dots\}$ sorozat, ahol j_n az 1,2,3,5,6 jelek valamelyike. Adva egy n hosszúságú $j_1, j_2, \dots, j_n$ sorozat jelölje $A(j_1, \dots, j_n)$ az összes olyan végtelen

1—6 jelekből álló sozozatot, melynek első n jele $j_1, \dots, j_n$. Definiáljuk az $\mathcal{A}$ σ-algebrát úgy mint a legszűkebb σ-algebrát, amelyik tartalmazza az összes lehetséges $A_n(j_1, \dots, j_n)$ alakú halmazt, és legyen $P(A_n(j_1, \dots, j_n)) = \left(\frac{1}{6}\right)^n$. A mértékterek szorzatáról szóló tétel azt állítja, hogy létezik egyetlen P valószínűségi mérték az $\mathcal{A}$ σ-algebrán, mely teljesíti a kívánt feltételeket. Ezt a modellt tekinthetjük egy megfelelő modellnek, ahol az $\omega = \{j_1, j_2, \dots\}$ elemi esemény azt jelenti, hogy a végtelen $j_1, j_2, \dots$ dobássorozat következik be.

A valószínűségszámítás alaptétele alapján a következő módon érvelhetünk. Definiáljuk a következő F eloszlásfüggvényt: $F(x) = 0$, ha $x \le 1$, $F(x) = 1$, ha $x > 6$, $F(x) = \frac{k}{6}$, ha $k < x \le k+1$, $1 \le k \le 6$. (Ez olyan valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, mely a k értéket $\frac{1}{6}$ valószínűséggel veszi fel, $1 \le k \le 6$.) Definiáljuk az $F_n(x_1, \dots, x_n) = F(x_1)R(x_2)\dots F(x_n)$ eloszlásfüggvényt minden n-re. Célunk egy valószínűségi mező konstrukciója, és azon ξ_n, $n = 1, 2, \dots$ valószínűségi változók definiciója, melyekre $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ eloszlása az f_n eloszlásfüggvény minden n-re. Mivel ezek az eloszlásfüggvények konzisztensek, az alaptétel bizonyítása a következő konstukciót adja. Legyen $\Omega = R^\infty$, a számegyenes önmagával vett végtelen sok példányának direkt szorzata, $\mathcal{B}^\infty$ az ezen a téren értelmezett Borel σ-algebra, amelyiket az $A_n(x_1, \dots, x_n) = \{(u_1, u_2, \dots,)\, u_j < x_j, \text{ ha } 1 \le j \le n\}$ alakú halmazok generálnak, $P(A_n(x_1, \dots, x_n)) = F(x_1, \dots, x_n)$ minden ilyen alakú halmazra. Az alaptétel szerint létezik egyetlen ilyen R mérték. Legyen $\xi_n(x_1, x_2, \dots) = x_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Hogy viszonyul a fenti két konstrukció egymáshoz? Vegyük észre, hogy az alaptétel alapján végzett konstrukcióban az $\Omega_0 = \{j_1, j_2, \dots, j_n = 1, \dots, 6 \text{ minden } n = 1, 2, \dots$ számra halmazra $P(\Omega_0) = 1$. Ezért a valószínűségi mezőt módosíthatjuk úgy, hogy megszorítjuk az Ω_0 halmazra, ami azt jelenti, hogy az Ω_0 téren az $\mathcal{A}_0$ σ-algebrát tekintjük, amelyik az $A \cap \Omega_0$ alakú halmazokból áll, ahol $A \in CalA$. Ilyen módon ugyanazt a konstrukciót kapjuk mint az első konstrukcióban. A fő különbség abban áll, hogy más mértékelméleti eredmények segítségével adjuk meg a konstrukció jóságának bizonyításaát.

2. Egy szabályos dobókockát és egy szabályos pénzdarabot egymás után egymástól függetlenül feldobunk, egészen addig, míg meg nem jelenik három fejdobás. Azután a dobássorozatot abbahagyjuk. Adjunk erre egy jó valószínűségi modellt.

   Megoldás: Az előző feladathoz hasonlóan megkonstruálhatjuk egy szabályos dobókocka és érme végtelen sok egymási után végrehajtott (független) dobásának a modelljét. Tekinthetjük ezt is a feladat megoldásának, hiszen ez tartalmazza az összes a harmadik fejdobásig bekövetkezett eseményt. De ha úgy kívánjuk redukálhatjuk a modellt, és elhagyhatjuk annak ,,felesleges” részét. Jelölje A_n azt az eseményt, hogy az n-ik dobásnál jelenik meg a harmadik fejdobás, $n = 2, 2, \dots$, $\Omega_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ a fenti $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Ekkor $P(\Omega_0) = 1$. (Miért?)

   Definiáljuk az új valószínűsági mezót, mint a régi valószínűségi mező megszorítását az Ω_0 halmazra, azaz legyen $\mathcal{A}_0$ az $A \cap \Omega_0$ alakú halmazokból álló σ-algebra, ahol $A \in \mathcal{A}$. P_0 a P mérték megszorítása az A_0 σ-algebrára. Ekkor tekinthetjük az

$(\Omega_0, \mathcal{A}_0, P_0)$ valószínűségi mezőt is, mint megfelelő modellt.

3. Egy pontot véletlenül egyenletesen ledobunk az egységnégyzetre. Adjunk erre valószínűségi modellt.

   Megoldás: A természetes modell a következő. Legyen Ω a $[0,1] \times [0,1]$ egységnégyzet, azaz a pontdobás összes lehetséges (x,y) eredménye, $\mathcal{A}$ a „szép" halmazokból, ami azt jelenti, hogy a Borel mérhető halmazokból álló σ algebra. Ez azt jelenti, hogy a legkisebb σ-algebra a $[0,1] \times [0,1]$ egységnégyzeten, amelyik tartalmazza az egységnégyzetben lévő összes $[a,b] \times [c,d]$ téglalapot. A valószínűségi mérték a Lebesgue mérték, aminek létezése a mértékelmélet eredményei közé tartozik.

   Tárgyaljuk meg, hogy lényegében ezt a modellt kapjuk akkor is, ha alkalmazzuk azt az előaadáson megfogalmazott eredményt (illetve a hozzá tartozó konstrukciót), amelyik azt adja meg, hogyan lehet egy adott eloszlásfüggvényhez valószínűségi mezőt, és azon az előírt eloszlású valószínűségi változót. Esetünkben $F(x,y) = G(x)G(y)$, $C(x) = x$, ha $0 \le x \le 1$, $G(x) = 0$, ha $x \le 0$, $G(x) = 1$, ha $x \ge 1$. Az általunk ismertetett modellben Ω az (x,y) pontpárokból áll, ami azonosítható a síkkal, a $\mathcal{A}$ a Borel σ-algebra a síkon, P a $G(x,y)$ által meghatározott μ_G Lebesgue–Stieltjes mérték. Ez jelen esetben azt jelenti, hogy egy A halmaz valószínűsége az $A \cap ([0,1] \times [0,1]))$ metszet Lebesgue mértéke. Vegyük észre, hogy amennyiben ezt a modellt megszorítjuk az 1 mértékű $[0,1] \times [0,1]$ egységnégyzetre, akkor az előző modellt kapjuk meg.

   Házi feladat:

   Egy pontot véletlenül ledobunk az egységnégyzetre. Adjunk rá valószínűségi modellt.

4. Van két egy méter hosszú botunk, melyek mindegyikét véletlenül eltörünk egymástól függetlenül úgy, hogy minden töréspont egyformán valószínű. Az első bot hosszabb és a második bot rövidebb darabját összeragasztjuk. Mi annak a valószínűsége, hogy az így összeragasztott bot hossza kisebb, mint 0.9 méter?

   Megoldás: A feladatra két természetes megoldás adható. Az egyik az, hogy kiszámítjuk a két összeragasztandó botrész hosszának az eloszlását; ezek egyenletes eloszlásúak, az $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ illetve a $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ intervallumban, függetlenek egymástól, ezért konvolucióval kiszámíthatjuk összegüknek, az összeragasztott bot hosszának a sűrűségfüggvényét és eloszlásfüggvényét. A második megoldás geometriai meggondolásokon alapul.

   Első megoldás: Belátjuk, hogy a két összeragasztott bot hossza egyenletes eloszlású az $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ illetva a $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ intervallunban. Az első bot baloldali vége egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumbna. A nagyobb bot hossza mindig nagyobb, mint $1/2$, és akkor akkor nagyobb, mint x, $x > 1/2$, ha a baloldali bot hossza nagyobb, mint x vagy kisebb mint $1-x$, ennek a valószínűsége pedig $2(1-x)$. Ez azt jelenti, hogy az eltört bot hosszabb darabja egyenletes eloszlású az $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ intervallumban. Hasonlóan a rövidebb intervallum hossza egyenletes eloszlású a $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ intervallumban.

A két független valószínűségi változó összegének a sűrűségfüggvénye kiszámítható, sőt tulajdonképpen ez kiolvasható az előző félévben kiszámolt $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlás sűrűségfüggvényének önmagával vett konvoluciójának az értékéből. (Annak lineáris transzformációja.) Eredményként az kapjuk, hogy a sűrűségfüggvény $4\left(x-\frac{1}{2}\right)$, ha $\frac{1}{2}<x<1$, $4\left(\frac{3}{2}-x\right)$, ha $1\le x\le\frac{3}{2}$. Innen annak valószínűsége, hogy az összeg kisebb mint 0.9 $\int_{0,5}^{0.9}4\left(x-\frac{1}{2}\right)\,dx=\left[2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]_{0.5}^{0.9}=$ 0.32.

Megmutatjuk, hogy a vizsgált sűrűségfüggvény valóban olyan alakú, mint azt állítottuk. Két $f(x)$ és $g(x)$ sűrűségfüggvény konvolucióját kell kiszámítanunk, ahol $f(x)=2$, ha $\frac{1}{2}\le x\le 1$, és 0 egyébként, $g(x)=2$, ha $0\le x\le\frac{1}{2}$, és nulla különben. Ezért rögzített $\frac{1}{2}\le x\le 1$ esetén $f(y)g(x-y)=4$ $\frac{1}{2}\le y\le x$ esetén, ahonnan e két függvény konvoluciója $f*g(x)=\int f(y)g(x-y)\,dy=4\left(x-\frac{1}{2}\right)$, ha $\frac{1}{2}\le x\le 1$. Ha $1\le x\le\frac{3}{2}$, akkor $f(y)g(x-y)=4$, ha $x-\frac{1}{2}\le y\le 1$, ahonnan $f*g(x)=\frac{3}{2}-x$ ebben az esetben.

Második megoldás: Legyen az első bot baloldali végének a hossza x, a második bot baloldali végének a hossza y. Annak a valószínűsége, hogy az (x,y) pontpár a $[0,1]\times[0,1]$ négyzet egy $[a,b]\times[c,d]$ téglalap alakú részébe esik megegyezik e téglalap területének $(b-a)(d-c)$ területével, ezért, illetve a mérték kiterjesztésének egyértelműsége miatt annak valósszínűsége, hogy az (x,y) pontpár beleesik az egységnégyzet valamelyik szép tartományába megegyezik a tartomány területével.

Ezek után meg kell határozni, melyik tartományba kell esnie az (x,y) pontpárnak ahhoz, hogy a két összeragasztott bot összhossza kisebb legyen, mint 0.9. Az első botnak a hosszabb, a másodiknak pedig a rövidebb végét kell tekinteni. Talán a legegyszerűbb úgy számolni, hogy külön tekintjük a $\{0\le x\le\frac{1}{2},\,0\le y\le\frac{1}{2}\}$ négyzetet, ahol az $\{(x,y)\colon 1-x+y<0.9\}$ tartományt, a $\{0\le x\le\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\le y\le 1\}$ négyzetet, ahol az $\{(x,y)\colon x+y<0.9\}$ tartományt, a $\{\frac{1}{2}\le x\le 1,\,0\le y\le\frac{1}{2}\}$ négyzetet, ahol az $\{(x,y)\colon 1-x+1-y<0.9\}$ tartományt, és a $\{\frac{1}{2}\le x\le 1,\,\frac{1}{2}\le y\le 1\}$ négyzetet, ahol az $\{(x,y)\colon x+1-y<0.9\}$ tartományt kell tekinteni. Felrajzolva a tekintett tartományokat, kapjuk, hogy a következő két háromszög egyesítéséből álló tartomány területét kell tekinteni: Az egyik háromszüg csúcsai a (0, 0.1), (0, 0.9) és (0.5, 0.4) pontok, a másik háromszögé pedig az (1, 0.1), (1, 0.9) és (0.5, 0.6) pontok. Innen könnyű kiszámolni, hogy a keresett valószínűség 0.32.

A vizsgán született erre a feladatra egy váratlan megoldás, amelyik külön figyelmet érdemel. Ez a következő érvelésen alapult: Az első összeragasztandó bot hossza 0.5 és 1 között van. Törjünk le belőle 0.5-t, akkor annak hossza is 0 és 0.5 között lesz, tehát a keresett valószínűség megegyezik annak a valószínűségével, hogy a két rövidebb összeragasztott bot összhossza kisebb, mint 0.4. Ezután az (előbbi megoldűáshoz, hasonlóan, de egyszerűbb és egyszerűbben, áttekinthetőbb geometriai meggondolással megmutatható, hogy ennek valószínűsége 0.32. Mindegyik fent tekintett négyzet sarkában egy 0.4 befogójú háromszöget kell tekinteni. Ennek területe 0.08, és négy ilyen háromszög van.

Véletlenül ad-e ez az érvelés helyes eredményt vagy ez egy jó módszer? A válasz az, hogy meg lehet indokolni, hogy ez a módszer jó eredményt ad, de az külön érvelést igényel. Ugyanis a hosszabb botból letörve 0.5 métert egy más hosszúságú botot kapunk, mint akkor, ha a rövidebb botot vennénk. Ez azt sugallja, hogy ebben az esetben más megoldást kapunk, híszen két különböző feladat eredményét hasonlítjuk össze.

De ha alaposabban végiggondoljuk a helyzetet rájöhetünk arra, hogy mind a rövidebb bot hossza, mind a hosszabb bot hossza minusz 0.5 méter mennyiség ugyanolyan eloszlású, mind a kettő egyenletes eloszlású a $[0, 1/2]$ intervallumban. Ezenkívül ennek a botnak az eloszlása független attól, hogy mi a másik bot hossza. Tehát azért kaptunk helyes megoldást, mert az eredmény attól függött, hogy a két tekintett bot hosszának mi volt az eloszlása. Annak, hogy a vizsgált adott eloszlású valószínűségi változót milyen módon kaptuk meg nincs jeletnősége.

5. Adva egy tetszőleges T indexhalmaz meg akarjuk fogalmazni annak a feltételét, hogy adott előírt véges–dimenziós eloszllásfüggvényekhez létezzen egy valószínűségi mező és rajta a T indexhalmaz elemeivel indexelt valószínűségi változók rendszere úgy, hogy ezek az eloszlásfüggvények adják meg e valószínűségi változók véges dimenziós eloszlásait. Ehhez szükséges, hogy a véges–dimenziós eloszlások teljesítsenek bizonyos konzisztencia feltételt. Próbáljuk megfogalmazni ezt a konzisztencia feltevést.

   Megoldás: Először el kell döntenünk egy jelölérendszerbeli kérdésre a választ. Hogyan jelöljük a véges-dimenziós eloszlásokat. A T halmaz véges részhalmazait kell tekintenünk. Ha két $\{t_1, \dots, t_n\}$ és $\{t'_1, \dots, t{+}n'\}$ halmaz megegyezik csak más sorrendben soroljuk fel a halmaz elemeit teszünk-e a kett[között különbséget? Bár ez nem kötelező, különböztessük meg őket. Ekkor fel kell írnunk a következő feltételt is. $F_{t_1,\dots,t_n}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) = F_{\pi(t_1),\dots,\pi(t_n)}(x_{\pi(t_1)}, \dots, x_{\pi(t_n)})$, ahol $\pi(\cdot)$ a $\{t_1, \dots, t_n\}$ halmaz tetszőleges perturbációja. Ezek után egyszerűbben fogalmazhatjuk meg a feltételt. Azt kell megkövetelnünk, hogy ha az utolsó koordinátát elhagyjuk, ugyanazt az eloszlásfüggvény kapjuk, mint akkor, ha annak helyébe végtelent írunk. Képlettel felírva

$$F_{t_1,\dots,t_n,t_{n+1}}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}, \infty) = F_{t_1,\dots,t_n}(x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$$

   minden $\{t_1, \dots, t_{n+1}\} \subset T$ halmazra és $x_{t_1}, \dots\ x_{t_n}$ valós számokra.

Ha marad idő, tárgyaljuk a visszatevéses és visszatevés nélküli urnahúzás valószínűségi modelljét és annak bizonyítását hogy a húzások eredményei nem függnek attól, hogy hanyadik húzást tekintjük.