

## A Valószínűségszámítás I. előadássorozat tizenkettedik előadása.

2002 április 23.

A múlt előadáson a centrális határeloszlástétel bizonyításának magyarázatában bizonyos részeket túlságosan elhadartam. Bár teljes bizonyítást most sem adok, érdemes néhány részletet nyugodtabb körülmények között kifejteni. Megismétlünk néhány definíciót és eredményt.

Szerepelt az eloszlásban való konvergencia definícióját. De nem ezt a definíciót érdemes használni, hanem a következő eredményt.

**Tétel.**  $F_n(u)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  eloszlásfüggvények sorozata akkor és csak akkor konvergál eloszlásban egy  $F(u)$  eloszlásfüggvényhez, ha minden a számegegyenesen értelmezett folytonos, korlátos  $g(u)$  függvényre teljesül a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g(u) dF_n(u) = \int g(u) dF(u) \quad (\text{a})$$

azonosság.

Az eloszlásban való konvergenciát az e lemmában szereplő tulajdonság segítségével próbáljuk bebizonyítani. Felmerül a kérdés, hogy nem elég-e az (a) tulajdonságot folytonos és korlátos függvények egy kisebb, és jobban kezelhető függvényosztályának a segítségével bebizonyítani. Bevezetjük az úgynevezett karakterisztikus függvényeket, melyek az  $e_t(x) = e^{itx}$  függvények integrálja, és felidézünk néhány eredményt, amelyek megmagyarázza, miért érdemes ezeket használni.

**Valószínűségi változó karakterisztikus függvényének a definíciója.** Legyen  $\xi$  valószínűségi változó valamely  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn, és jelölje  $F(u) = P(\xi < u)$ ,  $-\infty < u < \infty$ , a  $\xi$  valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. A  $\xi$  valószínűségi változónak a karakterisztikus függvénye a

$$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} F(du), \quad -\infty < t < \infty,$$

*függvény. Adva egy  $F$  eloszlásfüggvény az  $F$  eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényét is definiálni fogjuk mint egy  $F$  eloszlású  $\xi$  valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. (Mivel a karakterisztikus függvényt a  $\xi$  valószínűségi változó eloszlásfüggvényének a segítségével ki lehet számolni, ezért jogunk van egy eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényéről beszélni.)*

A következő egyszerű állításokat azok fontosságuk miatt külön Lemma formájában mondjuk ki.

**Lemma valószínűségi változók karakterisztikus függvényének viselkedéséről.**

Legyenek  $\xi_1, \dots, \xi_n$  független valószínűségi változók, jelölje  $S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j$  e valószínűségi

változók összegét és  $\varphi_j(t)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , a  $\xi_j$  valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. Ekkor az  $S_n$  összeg karakterisztikus függvénye a  $\psi_n(t) = Ee^{itS_n} = \prod_{j=1}^n \varphi_j(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$  függvény. Ha  $A$  és  $B \neq 0$  valós számok, akkor a  $\frac{S_n - A}{B}$  valószínűségi változó karakterisztikus függvénye az

$$Ee^{it(S_n - A)/B} = e^{-itA/B} \psi_n\left(\frac{t}{B}\right) = e^{-itA/B} \prod_{j=1}^n \varphi_j\left(\frac{t}{B}\right)$$

függvény.

Legyen  $\xi$  olyan valószínűségi változó  $F(\cdot)$  eloszlásfüggvénnyel, melyre teljesül az  $E|\xi|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^k F(du) < \infty$  egyenlőtlenség valamilyen  $k$  pozitív egész számra. Ekkor a  $\xi$  valószínűségi változó  $\varphi(t)$  karakterisztikus függvényének a deriváltjai megadhatók a  $\frac{d^j}{dt^j} \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i^j u^j e^{itu} F(du)$  képlettel minden  $0 \leq j \leq k$  és  $-\infty < t < \infty$  számra.

Speciálisan,  $t = 0$  választással  $\left. \frac{d^j \varphi(t)}{dt^j} \right|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} i^j u^j F(du) = i^j E\xi^j$  minden  $0 \leq j \leq k$  számra.

*Megjegyzés:* Legyenek  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, melyekre  $E\xi_1 = 0$ , és vezessük be a  $\sigma_2 = \text{Var} \xi_1$ , valamint az  $Ee^{it\xi_1} = \varphi(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$  ( $\varphi(t)$  a  $\xi_1$  valószínűségi változó karakterisztikus függvénye) jelöléseket. Legyen továbbá  $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$  és  $\bar{S}_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}\sigma}$  az  $S_n$  valószínűségi változó normalizáltja. Ekkor  $Ee^{itS_n} = \varphi(t)^n$ ,  $Ee^{it\bar{S}_n} = \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)^n$ , és  $\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) \sim 1 - \frac{t^2}{2n\sigma^2}$ . Ez a formula lehetővé teszi, hogy viszonylag jó becslést adjunk a  $\bar{S}_n$  valószínűségi változó karakterisztikus függvényére. Azt kívánjuk vizsgálni, lehetővé teszi-e ez a formula egy jó határeloszlástétel bizonyítását független, egyforma eloszlású valószínűségi változók normalizáltjának az összegére.

Abból, hogy bizonyos  $F_n$  eloszlások  $\varphi_n(t)$  karakterisztikus függvényeinek a sorozata konvergál egy  $F$  eloszlásfüggvény  $\varphi(t)$  karakterisztikus függvényéhez minden  $-\infty < t < \infty$  számra, akkor  $\int (\sum c_k e^{itx}) F_n(dx) \rightarrow \int (\sum c_k e^{itx}) F(dx)$  minden ilyen típusú függvényre. Kérdés az, hogy elegendőek-e ezek az azonosságok ahhoz, hogy az (a) tulajdonság teljesüljön. Ennek tisztázása érdekében keressük azokat az eredményeket, amelyek azt mondják ki, hogy a trigonometrikus függvények lineáris kombinációi a folytonos függvények elég gazdag családját alkotják. Ilyen jellegű, és számunkra a továbbiakban nagyon hasznos az alább megfogalmazott Weierstrass második approximációs tétele.

**Weierstrass második approximációs tétele.** *Tetszőleges folytonos és  $2\pi$  szerint periodikus  $f(t)$  függvényre és  $\varepsilon > 0$  valós számra létezik olyan  $P_n(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ikt}$*

trigonometrikus polinom, melyre

$$\sup_{-\infty < t < \infty} |f(t) - P_n(t)| < \varepsilon.$$

Ez az eredmény a trigonometrikus függvényeknek a kívánt jellegű tulajdonságát fejezi ki, de csak periódikus folytonos függvényeket tudunk ilyen módon approximálni trigonometrikus polinomokkal. Vegyük észre, hogy a  $(-\pi, \pi]$  intervallumban értelmezett és a számegyenesre  $2\pi$  periódissal kiterjesztett folytonos függvényeket az  $\varepsilon_n(t) = e^{int}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , polinomjaival tudjuk tetszőleges pontossággal közelíteni. Ezt az eredményt felhasználva és átskálázva kapjuk, hogy tetszőleges az eredetileg  $(-T, T]$  intervallumban értelmezett és  $2T$  szerint periódikusan kiterjesztett folytonos függvények a szuprémum normában tetszőleges pontossággal meg lehet közelíteni az  $e_n(t) = e^{int/2\pi T}$  alakú függvények lineáris kombinációval. Ebből következik, hogy ha az  $F_n$  eloszlások  $\varphi_n(t)$  karakterisztikus függvényei konvergálnak minden pontban egy  $F$  eloszlás  $\varphi(t)$  karakterisztikus függvényéhez, akkor  $\int g(x)F_n(dx) \rightarrow \int g(x)F(dx)$  minden folytonos és periódikus függvényre. Kérdés, hogy elegendő-e ez az (a) reláció biztosításához?

Ahhoz, hogy eloszlásfüggvények karakterisztikus függvényeinek konvergenciájából következtetni tudjunk magunknak az eloszlásfüggvényeknek a konvergenciájára tudunk kell azt, hogy az a karakterisztikus függvények meghatározzák az eloszlásfüggvényeket. Ezt az állítást fogalmazza meg az alábbi eredmény, amelyet a Weierstrass második approximációs tétele segítségével be lehet bizonyítani. (Ennek bizonyítását leírtam az előző előadás anyagában.

**Tétel.** Legyen  $F(\cdot)$  és  $G(\cdot)$  két eloszlásfüggvény, melyek karakterisztikus függvénye megegyezik. Ekkor  $F(x) = G(x)$  minden  $-\infty < x < \infty$  számra.

Azt szeretnénk megmutatni, hogy minél erősebb eredményt kapjunk, amelyik a karakterisztikus függvények konvergenciájából következik az eloszlások konvergenciája. Felmerül a kérdés, hogy csak a karakterisztikus függvények konvergenciájából következik-e az eloszlások konvergenciája? A kérdés megfogalmazása érdekében jegyezzük meg először, hogy amennyiben eloszlások  $F_n$  sorozata konvergál egy eloszláshoz, akkor ezen eloszlások  $\varphi_n(t)$  karakterisztikus függvényei konvergálnak egy függvényhez, (a határeloszlás karakterisztikus függvényéhez). Kérdés, elegendő-e tudni azt, hogy a karakterisztikus függvények konvergálnak, de semmi többet. Azaz, ha még nem találtuk meg a határeloszlást, de a karakterisztikus függvények konvergálnak, akkor ez önmagában elegendő-e ez az eloszlások konvergenciájához. Ennek a problémának a megértése érdekében tekintsük először az alábbi példát: *Példa karakterisztikus függvények konvergenciájára:*

Legyen  $F_n(\cdot)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , a  $[-n, n]$  intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók sorozata, azaz legyen  $F_n(\cdot)$  sűrűségfüggvénye az  $f_n(u) = \frac{1}{2n}$ , ha  $-n \leq u \leq n$ ,  $f_n(u) = 0$ , ha  $|u| > n$  képlet segítségével megadott függvény. Ekkor az  $F_n(\cdot)$  eloszlásfüggvények karakterisztikus függvényei minden pontban konvergálnak az  $\varphi(0) = 1$ ,  $\varphi(t) = 0$ , ha  $t \neq 0$  képlettel megadott  $\varphi(t)$  függvényhez, amelyik az origóban nem

folytonos. Továbbá az  $F_n(\cdot)$  eloszlásfüggvények nem konvergálnak eloszlásban, mert minden véges  $[a, b]$  intervallumra  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n([a, b]) = 0$ .

Valóban, az  $F_n$  függvény karakterisztikus függvénye a fenti példában  $\varphi_n(t) = \int_{-n}^n \frac{1}{2n} e^{itu} du = \frac{e^{itn} - e^{-itn}}{i2nt} = \frac{\sin tn}{tn}$ , ha  $t \neq 0$ , és  $\varphi_n(0) = 1$ . Innen látható, hogy  $\varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$ , ha  $t \neq 0$ , és  $\varphi(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(0) = 1$  határérték létezik. Másrészt az  $F_n$  eloszlásfüggvények nem konvergálnak egy eloszlásfüggvényhez. Nem nehéz látni, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \frac{1}{2}$  minden  $x$  számra, azaz a határérték létezik, de az nem eloszlásfüggvény.

A fenti példában az eloszlások nem konvergálnak, bár karakterisztikus függvényeik igen. Viszont azt is tudjuk, hogy amennyiben az eloszlásfüggvények sorozata egy eloszlásfüggvényhez konvergál, akkor ezek karakterisztikus függvényeinek sorozata egy eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényéhez konvergál, amelyik folytonos minden pontban. A legfontosabb az, hogy a karakterisztikus függvények egy az origóban is folytonos függvényhez konvergáljanak. A valószínűségi számítás egyik alapvető eredménye azt mondja ki, hogy ez már elegendő az eloszlások konvergenciájához. Ezt az eredményt fogalmazzuk meg az alábbiakban.

**Eloszlások konvergenciájáról szóló Alaptétel.** *Legyen  $F_n(u)$ ,  $-\infty < u < \infty$ , eloszlásfüggvények egy sorozata  $\varphi_n(t) = \int e^{itu} F_n(du)$  karakterisztikus függvényekkel,  $n = 1, 2, \dots$ . Ha a  $\varphi_0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t)$  határérték létezik minden  $-\infty < t < \infty$  számra, és a  $\varphi_0(t)$  limeszfüggvény folytonos az origóban, akkor létezik olyan  $F_0(u)$  eloszlásfüggvény, melynek a  $\varphi_0(t)$  függvény a karakterisztikus függvénye. Továbbá e feltétel teljesülése esetén az  $F_n(u)$  eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az  $F_0(u)$  eloszlásfüggvényhez.*

*Megfordítva, ha  $F_n(u)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , eloszlásfüggvényeknek egy olyan sorozata, mely egy  $F_0(u)$  eloszlásfüggvényhez konvergál eloszlásban,  $\varphi_n(t)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , jelöli az  $F_n(u)$ ,  $\varphi_0(t)$  pedig az  $F_0(u)$  eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényét, akkor  $\varphi_0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t)$  minden  $-\infty < t < \infty$  számra. Továbbá, ez a konvergencia egyenletes minden véges intervallumban.*

## A nagy számok erős törvénye.

Tárgyaltuk a nagy számok gyenge törvényét, mely szerint ha tekintjük  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , független, egyforma eloszlású valószínűségi változók  $S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , összegét

és  $\frac{S_n}{n}$  átlagát, akkor az  $\frac{S_n}{n}$  átlagok sztochasztikusan konvergálnak egy determinisztikus számhoz, mely szám a  $\xi_1$  valószínűségi változó  $E\xi_1$  várható értéke. Beláttuk, (a Csebisev egyenlőtlenség segítségével), hogy a nagy számok gyenge törvénye érvényes akkor, ha a  $\xi_1$  valószínűségi változónak létezik szórásnégyzete. Valójában ez a feltétel lényegesen gyengíthető. Ezenkívül, független valószínűségi változók átlagai nagyon

általános feltételek mellett nemcsak sztochasztikusan, hanem egy valószínűséggel is konvergálnak a  $\xi_1$  valószínűségi változó  $E\xi_1$  várható értékéhez. Ezt az eredményt nevezik a nagy számok erős törvényének. Megfogalmazom az említett eredményeket és fogalmakat pontosan, és tárgyalni fogom ezen eredmények egymással való kapcsolatát. Sok fontos és tanulságos eredményt csak kimondok, de időhiány miatt a bizonyítását elhagyom.

Először felírom a (részben már korábban ismertetett) különböző konvergenciafogalmakat.

**Az egy valószínűségű konvergencia definíciója:** *Valószínűségi változók  $\xi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sorozata akkor konvergál egy valószínűséggel egy  $\xi$  valószínűségi változóhoz, ha (egyrészt ezek a valószínűségi változók ugyanazon az  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn vannak definiálva, másrészt)*

$$P\left(\omega: \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\right) = 1.$$

*Megjegyzés:* Az egy valószínűségi konvergenciát a valószínűségszámításban és mértékelméletben majdnem mindenütt való konvergenciának is hívják.

**A sztochasztikus konvergencia definíciója:** *Valószínűségi változók  $\xi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sorozata akkor konvergál sztochasztikusan egy  $\xi$  valószínűségi változóhoz, ha (egyrészt ezek a valószínűségi változók ugyanazon az  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn vannak definiálva, másrészt) minden  $\varepsilon > 0$  számra*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon) = 0.$$

**Az eloszlásban való konvergencia definíciója:** *Valószínűségi változók  $\xi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sorozata akkor konvergál eloszlásban egy  $F(u)$  eloszlásfüggvényhez vagy az ezen eloszlásfüggvény által meghatározott eloszláshoz, ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n < u) = F(u)$  minden olyan  $u$  számra, ahol az  $F(\cdot)$  eloszlásfüggvény függvény folytonos. (Azt mondjuk, hogy a  $\xi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , valószínűségi változók sorozata eloszlásban konvergál egy  $\xi$  valószínűségi változóhoz, ha ez a sorozat eloszlásban konvergál az  $F(u) = P(\xi < u)$  eloszlásfüggvényhez.)*

A továbbiakban tárgyalni fogjuk (részben kitűzött feladatok formájában) a különböző konvergenciafogalmak közötti kapcsolatot.

Igaz a következő kapcsolat: Egy valószínűségi konvergencia  $\Rightarrow$  Sztochasztikus konvergencia  $\Rightarrow$  Eloszlásban való konvergencia.

Tárgyaljuk először az egy valószínűségi és sztochasztikus konvergencia kapcsolatát.

Ha  $\xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega)$  egy valószínűséggel, akkor definiálva az

$$A_n = A_n(\varepsilon) = \left\{ \omega: \sup_{k \geq n} |\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon \right\}$$

halmazokat kapjuk, hogy az egymásba skatulyázott  $A_n$  halmazokra, (azaz  $A_1(\omega) \subset A_2 \subset \dots$ ),  $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$ . Ezért  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 1$ . Mivel  $\{\omega: |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon\} \supset A_n$ ,  $P(|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \varepsilon) \rightarrow 1$ , azaz  $P(|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ , ha  $n \rightarrow \infty$ . Ez azt jelenti, hogy az egy valószínűségű konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia.

Nem kötelező házi feladat:

Valószínűségi változók  $\xi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sorozata, akkor és csak akkor konvergál egy valószínűséggel egy  $\xi$  valószínűségi változóhoz, ha az  $\eta_n = \sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi|$  valószínűségi változók sorozata sztochasztikusan konvergál nullához, azaz minden  $\varepsilon > 0$  számra  $P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right) = 0$ .

Lássunk példát arra, hogy lehetséges olyan  $\xi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , és  $\xi$  valószínűségi változókat konstruálni, melyekre a  $\xi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sorozat sztochasztikusan tart  $\xi$ -hez, de a  $\xi_n$  sorozat nem konvergál egy valószínűséggel a  $\xi$  valószínűségi változóhoz.

Tekintsük a következő  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőt:  $\Omega$  a  $[0, 1]$  intervallum,  $\mathcal{A}$  a Borel mérhető halmazok  $\sigma$ -algebrája a  $[0, 1]$  intervallumon, a  $P$  valószínűségi mérték a Lebesgue mérték. Legyen

$$\xi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in [(n - 2^k)2^{-k}, (n + 1 - 2^k)2^{-k}] \\ 0 & \text{ha } x \notin [(n - 2^k)2^{-k}, (n + 1 - 2^k)2^{-k}] \end{cases}$$

akkor ha  $2^k \leq n < 2^{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,

és  $\xi(x) = 0$  minden  $0 \leq x \leq 1$  számra. Ekkor  $P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 2^{-k}$  minden  $\varepsilon > 0$  számra, ha  $2^k \leq n < 2^{k+1}$ . Tehát a  $\xi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sorozat sztochasztikusan konvergál a  $\xi$  valószínűségi változóhoz. Viszont mivel  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \xi_n(x) = 1$  minden  $0 \leq x \leq 1$  számra, ezért a  $\xi_n$  sorozat nem konvergál egy valószínűséggel a  $\xi$  valószínűségi változóhoz.

Másrészt a Borel-Cantelli lemmából következik, hogy amennyiben minden  $\varepsilon > 0$  számra  $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) < \infty$ , akkor a  $\xi_n$  sorozat egy valószínűséggel konvergál a  $\xi$  valószínűségi változóhoz. Miért?

A sztochasztikus konvergencia és eloszlásban való konvergencia közötti kapcsolatra érvényesek a következő nem kötelező házi feladatok formájában megfogalmazott állítások.

Nem kötelező házi feladat:

- a.) Ha  $\xi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , valószínűségi változók sztochasztikusan konvergálnak egy  $\xi$  valószínűségi változóhoz, akkor a  $\xi_n$  valószínűségi változók eloszlásban is konvergálnak ehhez a  $\xi$  valószínűségi változóhoz.

- b.) Ennek az állításnak a megfordítása nem igaz. Például, ha  $\xi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, melyek nem elfajultak, azaz nincs olyan konstans melyeket ezek a valószínűségi változók egy valószínűséggel vesznek fel, akkor a  $\xi_n$  valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak a  $\xi_1$  valószínűségi változóhoz, viszont nem konvergálnak sztochasztikusan.
- c.) Viszont igaz a következő állítás: Ha  $\xi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak egy  $a$  konstanshoz, (azaz egy olyan valószínűségi változóhoz, mely egy valószínűséggel az  $a$  konstanst veszi fel, akkor a  $\xi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sorozat sztochasztikusan is konvergál ehhez az  $a$  konstanshoz.

Most rátérünk annak tárgyalására, hogyan lehet a nagy számok gyenge törvényének a Csebisev egyenlőtlenségen alapuló bizonyítását finomítva a nagy számok erős törvényét is bebizonyítani alkalmas feltételek mellett. Az alább ismertetendő érvelésben valójában a tétel bizonyítása érdekében a szükségesnél sokkal erősebb kikötéseket teszünk. Idézzük fel a Csebisev egyenlőtlenséget, illetve a nagy számok gyenge törvényének a bizonyítását a Csebisev egyenlőtlenség segítségével.

**Csebisev egyenlőtlenség:** Ha a  $\xi$  valószínűségi változó második momentuma  $E\xi^2 = m^2$ , akkor tetszőleges  $x > 0$  számra

$$P(|\xi| > x) \leq \frac{m_2}{x^2}.$$

Innen következik, ha ezt az egyenlőtlenséget a  $\bar{\xi} = \xi - E\xi$  valószínűségi változóra alkalmazzuk, hogy

$$P(|\xi - E\xi| > x) \leq \frac{\text{Var } \xi}{x^2},$$

*Megjegyzés:* A Csebisev egyenlőtlenség a Markov egyenlőtlenség következménye, mely szerint  $P(|\xi| > x) \leq \frac{E|\xi|}{x}$ . Alkalmazva ezt az állítást a  $\xi^2$  valószínűségi változóra kapjuk a Csebisev egyenlőtlenséget. Hasonló módon, alkalmazva a Markov egyenlőtlenséget a  $\xi^{2k}$  valószínűségi változóra, ahol  $k$  tetszőleges pozitív egész szám,  $x > 0$ , kapjuk, hogy  $P(|\xi| > x) \leq \frac{E\xi^{2k}}{x^{2k}}$

A nagy számok gyenge törvényét úgy bizonyítottuk be, hogy megvizsgáltuk milyen becslést ad a Csebisev egyenlőtlenség annak valószínűségére, hogy független, egyforma eloszlású valószínűségi változók átlaga legalább  $\varepsilon$ -nal eltér e változók várható értékétől. Idézzük fel ezt a számolást, illetve ezzel párhuzamosan vizsgáljuk meg azt is, milyen becslést kapunk, ha továbbra is azt a valószínűségi változót vizsgáljuk, melyet úgy kapunk, hogy független, egyforma eloszlású valószínűségi változók átlaga mínusz azok várható értékét vesszük, de most ennek a valószínűségi változónak nemcsak a második momentumát számoljuk ki, mint tettük a Csebisev egyenlőtlenség alkalmazásában, hanem a negyediket is. Látni fogjuk, hogy ekkor érdekes új eredményeket kapunk.

Vezessük be a következő jelöléseket. Legyenek  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , független, egyforma eloszlású valószínűségi változók,  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ . Tegyük fel, hogy  $E\xi_1 = 0$ , és vizsgáljuk az

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right)^2, \quad E\left(\frac{S_n}{n}\right)^4 \quad \text{és} \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\xi_1\right| > \varepsilon\right), \quad \varepsilon > 0$$

kifejezéseket. Az utolsó valószínűség vizsgálatában nem jelent megszorítást az  $E\xi_1 = 0$  feltétel, mert a  $\xi_j$  valószínűségi változókat a  $\xi_j - E\xi_j$  valószínűségi változókkal helyettesítve az általános esetet erre a speciális esetre redukálhatjuk.

$$\text{Var} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n^2} \text{Var} S_n = \frac{n}{n^2} \text{Var} \xi_1 = \frac{1}{n} \text{Var} \xi_1, \quad P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\text{Var} \xi_1}{n\varepsilon^2}.$$

Innen következik, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = 0$ , tehát érvényes a nagy számok gyenge törvénye.

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right)^4 = \frac{1}{n^4} E(\xi_1 + \dots + \xi_n)^4,$$

$$\begin{aligned} E(\xi_1 + \dots + \xi_n)^4 &= \sum_{k=1}^n E\xi_k^4 + 6 \sum_{\substack{1 \leq j, k \leq n \\ j \neq k}} E\xi_j^2 E\xi_k^2 + 4 \sum_{\substack{1 \leq j, k \leq n \\ j \neq k}} \underbrace{E\xi_j^3 E\xi_k}_{=0} \\ &\quad + 4 \sum_{\substack{1 \leq j, k, l \leq n \\ j, k, l \text{ különböző számok}}} \underbrace{E\xi_j^2 E\xi_k E\xi_l}_{=0} \\ &\quad + \sum_{\substack{1 \leq j, k, l, m \leq n \\ j, k, l, m \text{ különböző számok}}} \underbrace{E\xi_j E\xi_k E\xi_l E\xi_m}_{=0} \\ &= nE\xi_1^4 + 6n(n-1)(E\xi_1^2)^2, \end{aligned}$$

ezért

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\frac{1}{n}E\xi_1^4 + 6\left(1 - \frac{1}{n}\right)(E\xi_1^2)^2}{n^2\varepsilon^4} \leq \frac{\text{const.}}{n^2\varepsilon^4}.$$

Innen következik, hogy  $\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) < \infty$  minden  $\varepsilon > 0$  számra, és a Borel–Cantelli lemma (könnyebbik feléből) következik, hogy minden  $\varepsilon > 0$  számra és majdnem minden  $\omega \in \Omega$  pontban teljesül, hogy  $\left|\frac{S_n(\omega)}{n}\right| \leq \varepsilon$ , ha  $n \geq n_0(\omega)$ . Alkalmazva ezt a relációt minden  $\varepsilon = \frac{1}{k}$  számra  $k = 1, 2, \dots$ , kapjuk a nagy számok erős törvényét, melyet az alábbi tételben fogalmazunk meg.

**A nagy számok erős törvényéről szóló tétel gyenge formája:** Legyen  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata egy  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi



mezőn, melyekre teljesül az  $E\xi_1^4 < \infty$  feltétel, és vezessük be az  $S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j$  valószínűségi változókat. Ekkor az  $\frac{S_n(\omega)}{n}$  valószínűségi változók majdnem minden  $\omega \in \Omega$ -ra konvergálnak az  $E\xi_1$ , számhoz, azaz ezek a valószínűségi változók teljesítik a nagy számok gyenge törvényét.

Megfogalmazom a nagy számok gyenge törvényét kimondó tételt eredeti, éles formájában is.

**A nagy számok erős törvényét kimondó tétel.** Legyen  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, és definiáljuk az  $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , részletösszegeket. Az  $\frac{S_n(\omega)}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sorozat akkor és csak akkor konvergál pozitív valószínűséggel, ha  $E|\xi_1| < \infty$ . Ha  $E|\xi_1| < \infty$ , akkor ez a sorozat teljesíti a nagy számok erős törvényét, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = E\xi_1 \quad \text{majdnem minden } \omega \in \Omega\text{-ra.}$$

Láttuk, hogy a nagy számok különböző törvényeit kimondó tételekben az összeadandók momentumairól teszünk fel bizonyos feltételeket. Sőt, az utoljára kimondott tétel a nagy számok erős törvényéről, egyben jelzi azt, hogy ez a feltétel nemcsak elégséges, hanem szükséges feltétel is. Felmerülhet a kérdés, miért játszik olyan fontos szerepet a momentumok létezése ezekben az eredményekben.

A nagy számok törvényei olyan állítást fogalmaznak meg, hogy független valószínűségi változók átlagai egyfajta tipikus viselkedést mutatnak, amelyekben az egyes összeadandók hatása önmagában nem jelentős, azaz nagy valószínűséggel nem fordulhat elő, hogy van az összegben olyan kiugróan nagy értéket felvevő tag, melynek hatása összemérhető az összes többi tag hatásával. Márpedig az, hogy egy valószínűségi változó valamely momentuma kisebb egy adott számnál olyan tulajdonságot fogalmaz meg, mely szerint a valószínűségi változó kis valószínűséggel vesz fel nagy értékeket. Ahhoz, hogy finomabb vizsgálatokat el tudjunk végezni, ki kell tudnunk fejezni a momentumok végességét az eloszlásfüggvények nyelvén. A következő lemma állítása érdekes lesz a nagy számok erős törvényének a bizonyításában.

**Lemma.** A  $\xi$  valószínűségi változó abszolút értékének akkor és csak akkor létezik várható értéke, azaz akkor és csak akkor teljesül az  $E|\xi| < \infty$  reláció, ha  $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi| > n) < \infty$ .

**Kiegészítés.** Az alább ismerttetendő bizonyítás finomításával be lehet látni, hogy a  $|\xi|$  valószínűségi változónak akkor és csak akkor van véges második momentuma, ha  $\sum_{n=1}^{\infty} nP(|\xi| > n) < \infty$ . Általánosabban  $E|\xi|^k < \infty$  valamilyen  $k = 1, 2, \dots$ , számra

akkor és csak akkor, ha  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} P(|\xi| > n) < \infty$ . De ezen állítások bizonyítását, melyekre nem lesz szükségünk elhagyjuk.

*A Lemma bizonyítása:* Tekintsük először azt a speciális esetet, amikor a  $\xi$  valószínűségi változó csak egész értékeket vesz fel. Ekkor az  $E|\xi| < \infty$  reláció definíció szerint akkor és csak akkor teljesül, ha  $\sum_{n=0}^{\infty} nP(|\xi| = n) < \infty$ . Ezt úgy is írhatjuk, hogy  $\sum_{n=0}^{\infty} n(P(|\xi| > n-1) - P(|\xi| > n)) < \infty$ , és bármely rögzített  $N$  egész számra

$$\sum_{n=0}^N nP(|\xi| = n) = \sum_{n=0}^N n(P(|\xi| > n-1) - P(|\xi| > n)) = \sum_{n=0}^{N-1} P(|\xi| > n) - NP(|\xi| > N). \quad (*)$$

Ha  $E|\xi| = \infty$ , akkor  $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi| > n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} P(|\xi| > n) \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N nP(|\xi| = n) = \infty$  a (\*) reláció alapján. Ha  $E|\xi| < \infty$ , akkor  $NP(|\xi| > N) \leq E|\xi|$  minden  $N$ -re, azaz az előző kifejezésnek van egy  $N$ -től független felső becslése. Ezért  $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi| > n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} P(|\xi| > n) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N nP(|\xi| = n) + \text{const.} < \infty$ , szintén a (\*) reláció alapján.

Egy általános  $\xi$  valószínűségi változó esetén definiáljuk a  $\xi_1$  és  $\xi_2$  valószínűségi változókat úgy, hogy  $k \leq |xi| < k+1$  esetén  $\xi_1 = k$ ,  $\xi_2 = k+1$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Ekkor  $\xi_1 \leq |\xi| \leq \xi_2$ , és  $\xi_2 - \xi_1 \equiv 1$ , ezért az  $E\xi_1$ ,  $E|\xi|$  és  $E\xi_2$  várható értékek egyszerre végesek vagy végtelenek. Továbbá  $\sum_{n=0}^{\infty} P(|xi| > n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi_2 > n)$ , ezért a Lemma állítása az általános esetben következik annak már bebizonyított speciális esetéből.

Megmutatjuk az előbbi feladat eredményének és a Borel–Cantelli lemma segítségével, hogy amennyiben  $E|\xi_1| = \infty$ , akkor a  $\xi_1$  valószínűségi változóval azonos eloszlású  $\xi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , független valószínűségi változók nem teljesítik a nagy számok erős törvényét. Pontosabban azt állítjuk, hogy ebben az esetben az  $S_n(\omega) = \sum_{j=1}^n \xi_j(\omega)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , összegekre az  $S_n(\omega)$  majdnem minden  $\omega \in \Omega$  pontban nem konvergensek.

Valóban, az előbb megfogalmazott eredmény, és a  $\xi_j$  valószínűségi változók azonos eloszlása miatt az  $E|\xi_1| = \infty$  feltételből következik, hogy  $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_1| > n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n| > n) = \infty$ . Ezért, és a  $\xi_n$  valószínűségi változók függetlensége miatt a Borel–Cantelli lemmából következik, hogy majdnem minden  $\omega \in \Omega$ -ra  $|\xi_n(\omega)| > n$  végtelen sok az ( $\omega$  elemi eseménytől függő)  $n$  indexre. Valóban, tegyük fel, hogy valamely  $\omega \in \Omega$  elemi eseményre  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = a$  valamilyen véges  $a$  számra, amelyik értéke függhet az  $\omega$  elemi eseménytől. Ekkor viszont a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n-1}(\omega)}{n} = a$  reláció is teljesül, ahonnan

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{S_n(\omega)}{n} - \frac{S_{n-1}(\omega)}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_n(\omega)}{n} = 0$ . Ez a reláció viszont, mint láttuk egy 1 valószínűségi halmazon nem teljesül.

Láttuk, hogy mind a nagy számok gyenge mind a nagy számok erős törvényének bizonyításához arra van szükségünk, hogy képesek legyünk független (és egyforma eloszlású), nulla várható értékű  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , valószínűségi változók  $S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , összegének eloszlásfüggvényére jó becslést tudjunk adni. Pontosabban arra van szükségünk, hogy jól meg tudjuk becsülni minden  $n$  indexre és rögzített  $\varepsilon > 0$  számra a  $P(|S_n| > \varepsilon n)$  valószínűségeket. Valójában a nagy számok erős törvényének a bizonyításában hasznosabb, ha a  $P\left(\sup_{1 \leq m \leq n} |S_m| > \varepsilon n\right)$  valószínűségeket tudjuk jól megbecsülni. Első látásra azt gondolhatnánk, hogy az ilyen valószínűségek becslésére alkalmazhatnánk a centrális határeloszlástételt. Valójában a helyzet bonyolultabb.

A centrális határeloszlástétel jó aszimptotikát ad a  $P(S_n > x\sqrt{n})$  valószínűségekre nagy  $n$  indexre, és rögzített  $x$  számra. De szabad-e rögzített  $x$  helyett  $n$ -től függő  $x_n = \varepsilon\sqrt{n}$  számot írni, és alkalmazni formálisan a centrális határeloszlásban szereplő képletet nem törődve az  $x_n$  számnak az  $n$  indextől való függésével? Az, hogy e kérdés felvetésénél nem formális kötőzkodésről van szó mutatja a következő egyszerű példa: Legyenek  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , független egyforma eloszlású valószínűségi változók, melyekre  $P(\xi_1 = 1) = P(\xi_1 = -1) = \frac{1}{2}$ ,  $S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j$ . Ekkor a  $p_n(x) = P(S_n \geq nx)$  valószínűsége  $p_n(x) = 0$ , ha  $x > 1$ , és  $p_n(x) = 2^{-n}$ , ha  $x = 1$ . (Az  $x < 1$  esetben is jó aszimptotikus formulát lehet adni a  $p_n(x)$  mennyiségre, de ahhoz külön vizsgálat lenne szükséges, ezért ezt most nem tesszük.) Ez a példa azt mutatja, hogy a  $p_n(x)$  függvény nem úgy viselkedik, ahogy a centrális határeloszlástételből adódó formális analógia sugallná. A  $P(S_n \geq nx)$  alakú valószínűségek vizsgálatával a valószínűségszámítás egyik fontos és érdekes fejezete a nagy eltérések elmélete foglalkozik. Ez az elmélet nem témája a jelen előadássorozatnak.

A nagy számok erős törvényének a bizonyítását nem dolgozom ki. Mindössze azt teszem, hogy megfogalmazom a valószínűségszámítás egy fontos egyenlőtlenségét, melynek az itt nem tárgyalt bizonyítása is tanulságos, és a részletek kidolgozása nélkül jelzem, hogyan következik a Kolmogorov egyenlőtlenségből a nagy számok erős törvénye.

**Kolmogorov egyenlőtlenség.** *Legyenek  $\xi_1, \dots, \xi_n$  független, (nem feltétlenül egyforma eloszlású) valószínűségi változók,  $E\xi_k = 0$ ,  $E\xi_k^2 = \sigma_k^2$ ,  $S_k = \sum_{p=1}^k \xi_p$ ,  $k = 1, \dots, n$ .*

*Ekkor*

$$P\left(\sup_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq x\right) \leq \frac{ES_n^2}{x^2} = \frac{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}{x^2}$$

*minden  $x > 0$ -ra.*

Érdemes megjegyezni, hogy a Kolmogorov egyenlőtlenség ugyanazt a felső becslést adja annak valószínűségére, hogy az  $S_k$  részletösszegek szuprémuma nagyobb mint

valamilyen  $x > 0$  szám, mint amit a Csebisev egyenlőtlenség ad annak az eseménynek a valószínűségére, hogy az utolsó tag  $S_n$  nagyobb, mint  $x$ . Természetesen

$$P\left(\sup_{1 \leq k \leq n} |S_k| > x\right) \geq P(S_n > x),$$

de mint ahogy a Kolmogorov és Csebisev egyenlőtlenség összehasonlítása is sugallja a fenti egyenlőtlenség baloldala nem sokkal nagyobb mint a jobboldala.

*A nagy számok erős törvényének bizonyításvázlata a Kolmogorov egyenlőtlenség segítségével.* Természetes gondolat szétválasztani a  $\xi_n$  valószínűségi változók túl nagy és nem túl nagy értékeinek a hatását a bizonyításban. Ez sugallja, hogy érdemes a  $\xi_n$  valószínűségi változók következő felbontását venni:  $\xi_n = \xi_n I(|\xi_n| \leq n) + \xi_n I(|\xi_n| > n) = \xi'_n + \xi''_n$ , ahol  $I(A)$  egy  $A$  halmaz indikátorfüggvényét jelöli. Azt, hogy a  $\xi_n$  valószínűségi változó értékeit az  $n$  szinten csonkítottuk az teszi természetessé, hogy az utolsó kitzűött feladat szerint az  $E|\xi_1| < \infty$  feltétel ekvivalens a  $\sum_{n=1}^{\infty} P(\xi''_n = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n| > n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_1| > n) < \infty$  feltétellel, ami azt jelenti, hogy egy valószínűséggel, a  $\xi''_n$  valószínűségi változók véges sok kivétellel nullával egyenlők. Ez azt jelenti, hogy elég a véges szórással rendelkező  $\xi'_n$  valószínűségi változók összegeinek maximumára jó becslést adni. Ez lehetséges a Kolmogorov egyenlőtlenség segítségével, ha jó becslést tudunk adni a  $\xi'_n$  valószínűségi változók várható értékére és szórásnégyzetére.

Némi nem túl nehéz, de itt nem tárgyalt számolás segítségével meg lehet mutatni, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E\xi'_k = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E\xi''_k = 0$ , és ez lehetővé teszi a feladat redukálását arra a problémára, hogy a  $\bar{\xi}_k = \xi'_k - E\xi'_k$  valószínűségi változók  $\bar{S}_n = \sum_{k=1}^n \bar{\xi}_k$  összegei teljesítik a  $\frac{\bar{S}_n}{n} \rightarrow 0$  relációt 1 valószínűséggel. Ez a redukció azért hasznos, mert ekkor független, nulla várható értékű valószínűségi változók átlagát kell vizsgálni, és ekkor alkalmazhatjuk a Kolmogorov egyenlőtlenséget. Némi (az integrálok átrendezésén múló, de itt nem tárgyalt) számolás segítségével megmutatható, hogy teljesül a  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{Var } \bar{\xi}_k}{k^2} < \infty$  azonosság. Ennek felhasználásával a Kolmogorov egyenlőtlenség segítségével a következő becsléseket hajthatjuk végre.

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{2^{n-1} < k \leq 2^n} |S_k - S_{2^{n-1}}| > \varepsilon 2^{n-1}\right) &= P\left(\sup_{1 \leq k \leq 2^{n-1}} \left|\sum_{j=1}^k \xi_{j+2^{n-1}}\right| > \varepsilon 2^{n-1}\right) \\ &\leq \frac{\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \text{Var } \xi_k}{\varepsilon^2 2^{2(n-1)}} \leq \text{const.} \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{\text{Var } \xi_k}{\varepsilon^2 k^2}, \end{aligned}$$

ahonnan a  $\bar{\xi}_k$  valószínűségi változók szórásnégyzetére felírt becslés alapján

$$\sum_{n=1}^{\infty} P \left( \sup_{2^{n-1} < k \leq 2^n} |S_k - S_{2^{n-1}}| > \varepsilon 2^{n-1} \right) < \infty.$$

Ezért a Borel–Cantelli lemma alapján egy valószínűséggel

$$\sup_{2^{n-1} < k \leq 2^n} |S_k(\omega) - S_{2^{n-1}}(\omega)| \leq \varepsilon 2^{n-1} \quad \text{véges sok } (\omega\text{-tól függő}) \ n \text{ index kivételével.}$$

Innen viszont  $S_N(\omega) \leq \sum_{n: 2^{n-1} \leq N} \sup_{2^{n-1} < k \leq 2^n} |S_k(\omega) - S_{2^{n-1}}(\omega)| \leq \text{const.} + 4N\varepsilon$  majd nem minden  $\omega$ -ra egy csak  $\omega$ -tól függő konstanssal. Mivel ez az állítás minden  $\varepsilon > 0$ -ra és  $N$ -re igaz, innen következik a nagy számok erős törvénye.

Annak szükséges és elégséges feltétele is ismert, hogy független egyforma eloszlású valószínűségi változók teljesítsék a nagy számok gyenge törvényét. Megfogalmazom ezt az eredményt, de az állítás bizonyítását elhagyom.

**Tétel.** *Legyen  $\xi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata  $F$  eloszlásfüggvénnyel. Ezek a valószínűségi változók akkor és csak akkor teljesítik a nagy számok gyenge törvényét, azaz a  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k$  átlag akkor és csak akkor konvergál sztochasztikusan  $n \rightarrow \infty$  esetében egy a számhoz,  $-\infty < a < \infty$ , ha*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x [F(-x) + (1 - F(x))] = 0, \quad \text{és} \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{-u}^u x F(dx) = a.$$

Ha összehasonlítjuk a nagy számok gyenge és erős törvényét azt látjuk, hogy a nagy számok gyenge törvénye némileg enyhébb megkötések mellett érvényes mint a nagy számok erős törvénye. Érdekes látni független, egyforma eloszlású valószínűségi változók olyan sorozatát, amelyik teljesíti a nagy számok gyenge, de nem teljesíti a nagy számok erős törvényét. Ilyen példát fogalmazok meg a következő nem kötelező házi feladatban. Egyben jelzem, hogyan lehet bebizonyítani azt, hogy ez a példa teljesíti a nagy számok gyenge törvényét anélkül, hogy felhasználnánk a nem bizonyított tételt a nagy számok gyenge törvényének szükséges és elégséges feltételéről.

Nem kötelező házi feladat

Legyen  $\xi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, az  $f(x) = \frac{C}{x^2 \log |x|}$ , ha  $|x| > 2$ .  $f(x) = 0$ , ha  $|x| \leq 2$ , képlettel megadott sűrűségfüggvénnyel.  $(\int_{|x|>2} \frac{C dx}{x^2 \log |x|} = 1.)$  Definiáljuk az  $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , részletösszegeket. Lássuk be, hogy  $E|\xi_1| = \infty$ , ezért ezek a valószínűségi

változók nem teljesítik a nagy számok erős törvényét. Másrészt az  $\frac{S_n}{n}$  átlagok sztochasztikusan tartanak nullához, azaz minden  $\varepsilon > 0$  számra  $P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \rightarrow 0$ , ha  $n \rightarrow \infty$ .

*Segítség:* Legyen  $\bar{\xi}_k = \bar{\xi}_k^{(n)} = \xi_k I(|\xi_k| \leq a_n)$ ,  $\bar{\bar{\xi}}_k = \bar{\bar{\xi}}_k^{(n)} = \xi_k I(|\xi_k| > a_n)$ , és  $\bar{S}_n = \sum_{k=1}^n \bar{\xi}_k$ ,  $\bar{\bar{S}}_n = \sum_{k=1}^n \bar{\bar{\xi}}_k$ . Ekkor  $P(|S_n| > \varepsilon n) \leq P\left(|\bar{S}_n| > \frac{\varepsilon}{2}n\right) + P\left(|\bar{\bar{S}}_n| > \frac{\varepsilon}{2}n\right) \leq \frac{\text{Var } \bar{S}_n}{\frac{\varepsilon^2}{4}n^2} + nP(\bar{\bar{\xi}}_1 \neq 0)$ . Adjunk az  $a_n$  konstans alkalmas megválasztásával (például  $a_n = n$ ) jó becslést a  $P(|S_n| > n\varepsilon)$  valószínűsége.

Természetesen felvetődik a következő kérdés: Legyenek  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , független egyforma eloszlású valószínűségi változók, melyekre  $E\xi_1 = 0$ . Legyen  $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Ekkor a nagy számok gyenge törvénye szerint a  $\frac{S_n}{n}$  átlagok sztochasztikusan tartanak nullához, a nagy számok erős törvénye szerint pedig egy valószínűséggel is nullához tartanak. Hogyan lehet élesíteni a nagy számok gyenge illetve erős törvényét? Pontosabban fogalmazva, milyen  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  sorozatokra mondhatjuk, hogy  $\frac{S_n}{a_n}$  sztochasztikusan tart nullához, ha  $n \rightarrow \infty$ ? Milyen  $b_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  sorozatokra mondhatjuk, hogy  $\frac{S_n}{b_n}$  egy valószínűséggel tart nullához, ha  $n \rightarrow \infty$ ? Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy olyan valószínűségi változókat tekintünk, melyeknek van második momentumuk.

Az első kérdésre a válasz viszonylag egyszerű következménye a centrális határeloszlástételnek, és ezt tartalmazza a következő feladat. A második kérdésre a választ nehezebb megadni. Erre a kérdésre az alább megfogalmazott bizonyítás nélkül közölt iterált logaritmustétel adja meg a választ.

*Feladat:*

Legyenek  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , független egyforma eloszlású valószínűségi változók, melyekre  $E\xi_1 = 0$  és  $E\xi_1^2 < \infty$ . Legyen  $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Ekkor pozitív valószínűségi változók valamely  $a_n$  sorozatára a  $\frac{S_n}{a_n}$  valószínűségi változók akkor és csak akkor tartanak sztochasztikusan nullához  $n \rightarrow \infty$  esetén, ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \infty$ .

Végül megfogalmazom a valószínűsége számítás egyik híres eredményét, az úgynevezett iterált logaritmus tételt

**Iterált logaritmus tétel.** *Legyenek  $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots$ , független, egyforma eloszlású valószínűségi változók valamilyen  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  valószínűségi mezőn, melyekre  $E\xi_1(\omega) = 0$ ,*

$\text{Var } \xi_1(\omega) = \sigma^2 < \infty$ . Ekkor

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1(\omega) + \cdots + \xi_n(\omega)}{\sqrt{2n\sigma^2 \log \log n}} = 1, \quad \text{majdnem minden } \omega \in \Omega \text{ elemi eseményre,}$$

és

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1(\omega) + \cdots + \xi_n(\omega)}{\sqrt{2n\sigma^2 \log \log n}} = -1, \quad \text{majdnem minden } \omega \in \Omega \text{ elemi eseményre.}$$