A szeptember 25-i gyakorlat témája
Rövid összefoglaló

Házi feladat

Egy szabályos pénzdarabot feldobunk százszor egymás után. Tekintsük a fej-dobások számńak a harmadik hatványát, és számítsuk ki annak várható értékét.

A feladat megoldása érdekében tekintsük a vizsgált valószínűségi változó természetes felbontását. Legyen $\xi_j = 1$, ha a j-ik dobás eredménye fej, és $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye írás, $1 \le j \le 100$. Ekkor $S = \sum\limits_{j=1}^{100} \xi_j$ harmadik momentumát kell kiszámolnunk. Az Ekkor $S^3 = \left(\sum\limits_{j=1}^{100} \xi_j \right)^3$ várható értékét kell kiszámolnunk. Fejtsük ki az S^3-t kifejező szorzatot, és az ES^3 kiszámolásban használjuk ki, hogy a várható érték additiv. A következő tipusú tagok fognak szerepelni: $E\xi_j^3$, $E\xi_j^2\xi_k = E\xi_j^2 E\xi_k$, $j \ne k$, $E\xi_j\xi_k\xi_l = E\xi_j E\xi_k E\xi_l$, ahol a j, k és l indexek különbözőek. Számítsuk ki, hogy az ilyen tipusú tagokból hány van, és oldjuk meg a feladatot.

1. Egy szabályos dobókockát feldobunk végtelen sokszor egymás után. Mi annak a valószínűsége, hogy a harmadik 6-os dobás az n-ik dobásban következik be, $n = 3, 4, 5, \cdots$?

   Megoldás: Ez az esemény akkor következik be, ha az első $n-1$ dobásban pontosan két hatost dobunk, és az n-ik dobús eredménye is hatos. Ennek valószínűsége, $\binom{n-1}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} \left(\frac{1}{6}\right)^3$.

Ezt a feladatot nem annyira önmaga miatt tárgyaltuk, (ez egyébként példa a negatív binomiális eloszlás megjelenésére), hanem azért, hogy megtárgyaljuk, hogyan lehet egy szabályos dobókocka végtelen sok egymás utáni dobásának a valószínűségi modelljét megadni. Ez remélhetőleg érthetőbbé teszi miért kell a valószínűségi mező fogalmában néhány első látásra túlkomplikált fogalmat bevezetni.

Természetes az elemi eseményeket a végtelen $\omega = (j_1, j_2, \dots)$ sorozatokként definiálni, ahol mindegyik j_n, $n = 1, 2, \dots$, szám az $1, 2, \dots, 6$ értékek valamelyikét veszi fel. A biztos Ω esemény az összes alább tekintett sorozatokból álló halmaz. Természetes lenne eseményeknek az Ω halmaz részhalmazait tekinteni. Utána meg kell adni az eseményeknek a valószínűségét. És itt jelennek meg a nehézségek. Ugyanis egyrészt minden ω elemi esemény valószínűsége nulla, másrészt Ω kontinum sok elemi eseményből áll. Hogyan kell definiálni a valószínűséget úgy, hogy az tükrözze azt, hogy egy szabályos dobókocka egymástól független dobásait írja le?

Legyen annak a valószínűsége, hogy az első n koordinátan előírt értékű $j_1, \dots, j_n$ számok, (azaz azon végtelen sorozatokból álló halmaz, melynek jelei a $j_1, \dots, j_n$ számokkal kezdődnek) $\left(\frac{1}{6}\right)^n$. A valószínűséget úgy szeretnénk definiálni, hogy ezek a feltételek teljesüljenek. Mivel a valószínűség σ-additiv ez sok egyéb esemény valószínűségét is meghatározza. Például hogyan határozza meg annak valószínűségét, hogy az ötödik dobás eredménye nagyobb mint a harmadik dobásé? Általában értelme van bizonyos események által meghatározott legszűkebb σ-algebráról beszélni. Halmazok egy $\mathcal{A}$ rendszerét σ-algebrának nevezzük, ha $A_n \in \mathcal{A}$ esetében, $n = 1, 2, \dots$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, $\Omega \setminus A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$. Be lehet látni, hogy az előbbi $j_1, \dots, j_n$ számokkal kezdődő sorozatok halmazát, $n = 1, 2, \dots$, tartalmazó σ-algebrák között van egy legszűkebb σ-algebra, azaz egy olyan σ-algebra, amelyik része egy tetszőleges ezeket a halmazokat tartalmazó σ-algebrának. Ennek az állításnak a bizonyítása viszonylag egyszerű. Lényegesen nehezebben, de szintén bizonyítható állítás az, hogy ezen a legszűkebb σ-algebrán megadható egyértelműen egy olyan σ-additiv halmazfüggvény, amelyiknek értéke a már megadott halmazokon az előírt értékkel egyezik meg. Ennek alapján az előbbi halmazokat tartalmazó legszűkebb σ-algebrát tekintjük az $\mathcal{A}$ σ-algebrának, az $A \in \mathcal{A}$ halmazok P valószínűségét pedig a következő módon definiáljuk. Tekintjük az első n koordinátájában előírt $j_1, \dots, j_n$ értéket felvevő sorozatokból álló halmazokat tartamazó legszűkebb $\mathcal{A}$ σ-algebrát, egy $j_1, \dots, j_n$ jegyekkel kezdődő sorozatokból álló halmaz valószínűsége $\left(\frac{1}{6}\right)^n$, (ahol n a rögzített értékű jegyek száma), és tekintjük azt az egyértelműen meghatározott P σ-additiv halmazfüggvényt az $\mathcal{A}$ σ-algebrán, melynek értéke az előbb definiált halmazokon a már definiált értékkel egyenlő. Egy $A \in \mathcal{A}$ halmaz valószínűsége ennek a P σ-additiv halmazfüggvénynek az A halmazon felvett értékével egyenlő.

Felmerül az a kérdés, hogy természetes-e a fenti definició. Miért nem definiáltuk például minden lehetséges halmaz valószínűségét? A válasz erre a kérdésre az, hogy ez nem lehetséges úgy, hogy megőrizzük a valószínűség σ-additiv tulajdonságát. Másrészt valójában nem vesztünk azzal, hogy csak a fenti σ-aalgebra halmazaira definiáltuk a valószínűséget. Ugyanis, amikor egy halmaz valószínűségét kérdezzük, akkor azt a halmazt valamilyen definicióval le kell írni. Viszont az összes definiálható halmaz része a fenti σ-algebrának.

Megjegyezzük, hogy a fent tárgyalt probléma általános. Mihelyt nem véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok külöböző értéket felvevő valószínűségi változóval dolgozunk, hasonló kérdések merülnek fel. Így például akkor, ha az egységintervallumon olyan valószínűségi mértéket akarunk definiálni, mely szerint egy intervallum mértéke megegyezik ennek az intervallumnak a hosszával. (Lebesgue mérték definiciója.)

Megmutatjuk, hogy a valószínűségszámítas általános elmélete segít bizonyos feladatok egyszerű megoldásában. Az alábbi két feladatban az egyik lehetséges (egyszerű) megoldási módszer az úgynevezett geometriai valószínűségek módszere. Annak hátterében, hogy ez a módszer alkalmazható ott van rejtve a mértékelmélet néhány eredménye. A feladat második lehetséges megoldása a konvolución alapul.

2. Két ember 8 és 9 óra között megjelenik egy téren egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással. Mind a kettő félórát vár a másikra, és ha az addig nem jön, akkor hazamegy. Mi a valószínűsége annak, hogy találkoznak?

3. Két botot véletlenszerűen, egyenletes eloszlással eltörünk. A két rövidebb darabot összeragasztjuk. Mi az így kapott új bot hosszának az $F(u)$ eloszlásfüggvénye?

Mind a két feladat megoldható formális számolással, azt felhasználva, hogy ismert sűrűségfüggvényű valószínűségi változók összegének a sűrűségfüggvényét ki tudjuk számítani konvolúció segítségével. Ugyanakkor egy jó valószínűségi modellben vizsgálva a problémákat egyszerűbb megoldást is tudunk adni. Tekintsük mind a két megoldást.

2. feladat a) megoldás: Tekintsük az egységnégyzetet, és válasszuk azt a véletlen pontot az egységnégyzeten, melynek x koordinátája megadja, hogy az első ember az y koordinátája pedig megadja, hogy a második ember ember mikor érkezett. Ekkor az így definiált pont egyenletes eloszlású az egységnégyzeten, azaz annak valószínűsége, hogy ez a pont az egységnégyzet egy (szép) részhalmazába esik megegyezik e halmaz területével. Miért? Az, hogy a két ember találkozik azt az eseményt jelenti, hogy az így definiált (x, y) pont az egységnégyzet

$$A = \left\{(x, y)\colon\ -\frac{1}{2} \le y - x \le \frac{1}{2}\right\} \cap [0,1] \times [0,1]$$

részhalmazába esik. Ennek a halmaznak a területe $1 - 2 \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{4}$, és ez a keresett valószínűség.

3. feladat a) megoldás: Ez a feladat is hasonló módon tárgyalható. Tekintsük az egységnégyzetet, és válasszuk azt a véletlen pontot az egységnégyzeten, melynek x koordinátája megadja, hogy hol törtük el az első botot az y koordinátája pedig azt, hogy hol törtük el a második botot. Ekkor az így definiált pont egyenletes eloszlású az egységnégyzeten. Az az esemény, hogy az összeragasztott bot hossza kisebb mint valamely u szám megegyezik annak az eseménynek a valószínűségével, hogy az (x, y) pont a következő $A_1(u)$, $A_2(u)$, $A_3(u)$ és $A_4(u)$ halmazok $A_1(u) \cup A_2(u) \cup A_3(u) \cup A_4(u)$ uniójába esik: $A_1(u) = \{(x, y)\colon x + y < u\} \cap [0,1] \times [0,1]$, $A_2(u) = \{(x, y)\colon x + (1 - y) < u\} \cap [0,1] \times [0,1]$, $A_3(u) = \{(x, y)\colon 1 - x + y < u\} \cap [0,1] \times [0,1]$ és $A_4(u) = \{(x, y)\colon 1 - x + 1 - y < u\} \cap [0,1] \times [0,1]$. Ha $u < \frac{1}{2}$, akkor ezek a halmazok diszjunktak, területük $\frac{u^2}{2}$, ezért $F(u) = 1 - 2u^2$, ha $u \le \frac{1}{2}$. Ha $\frac{1}{4} \le u \le \frac{1}{2}$, akkor az $A_1(u) \cup A_2(u) \cup A_3(u) \cup A_4(u)$ halmaz komplementere egy olyan négyzet, melynek átlója $(2 - 2u)$ hosszú. Ezért $F(u) = 1 - 2(1 - u)^2 = 4u - 2u^2 - 1$, ha $\frac{1}{2} \le u \le 1$. Ha $u \ge 1$, akkor $F(u) = 1$.

2. feladat második megoldása. Jelölje ξ_j, $j = 1, 2$, azt a valószínűségi változót, mely azt adja meg, hogy hány (0 és 1 közötti számmal kifejezhető) órával 8 óra után jelent meg a j-ik ember a helyszínen. Ekkor ξ_1 és ξ_2 független a $[0, 1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Minket a $-\frac{1}{2} \le \xi_1 - \xi - 2 \le \frac{1}{2}$ események valószínűsége érdekel. Az $F(u) = P(\xi_1 - \xi_2 < u)$ eloszás sűrűségf8ggvénye a $g(u) = f_1 * f_2(u)$ konvolúció, ahol $f_1(u) = 1$, ha $0 \le u \le 1$, $f_1(u) = 0$, különben, $f_2(u) = 1$, ha $-1 \le u \le 0$, $f_2(u) = 0$ különben. Ekkor a minket érdeklő mennyiség az $F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_{-1/2}^{1/2} g(u)\, du$. (Emlékeztetőül, ha f_1 és f_2 két sűrűségfüggvény, akkor ezek konvoluciója $f_1 * f_2$ a következő módon számolható ki.

$$f_1 * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u) f_2(x-u)\, dv = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-u) f_2(u)\, dv, \quad -\infty < x < \infty.$$

Továbbá, ha ξ_1 és ξ_2 két független valószínűségi változó $f_1(\cdot)$ és $f_2(\cdot)$ sűrűségfüggvényekkel, akkor a $\xi_1 + \xi_2$ összegnek is létezik sűrűségfüggvénye, és az az $f_1 * f_2(\cdot)$ konvolució.)

Némi számolás adja, hogy $g(u) = 1-u$, ha $0 < u < 1$ $g(u) = 1+u$, ha $-1 < u < 0$. Innen $F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_{-1/2}^{1/2}(1-|u|)\, du = \dfrac{3}{4}$.

2. feladat második megoldása. Jelölje ξ_j, $j = 1, 2$, azt a valószínűségi változót, mely azt adja meg, hogy a j-ik bot rövidebb végének mi a hossza. Ekkor ξ_1, és ξ_2 független valószínűségi változók $f(x) = 2$, ha $0 \le x \le \frac{1}{2}$, és $f(x) = 0$ egyébként sűrűségfüggvénnyel. Minket a $\xi_1 + \xi_2$ eloszlása érdekel. Viszont $\xi_1 + \xi_2$ sűrűségfüggvénye $g(x) = f * f(x)$, ahonnan $g(x) = 2 - |2 - 4x|$, ha $0 \le x \le 1$, $g(x) = 0$ különben. Ezt kiintegrálva megkapjuk az eredményt.

Házi feladat.

Legyen ξ_1 és ξ_2 független, a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen ξ_1 és ξ_2 sűrűségfüggvénye $f(x) = 1$, ha $0 \le x \le 1$, és $f(x) = 1$ egyébként. Számítsuk ki $\xi_1 + \xi_2$ sűrűségfüggvényét.

(Sűrűség)függvények konvoluciójának a definiciója. *Legyen $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ két sűrűségfüggvény a számegyenesen, általánosabban integrálható függvények, azaz tegyük fel, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|\, du < \infty$ és $\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|\, du < \infty$. Az $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ függvények $f * g(\cdot)$ konvoluciója az*

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x-u)\, du, \quad -\infty < x < \infty,$$

függvény.

Megjegyzés: Egyszerű (lineáris) transzformációval kapjuk, hogy a konvoluciót másképp is kiszámolhatjuk. Ez mutatja, hogy a konvolucióban résztvevő függvények szimmetrikus szerepet játszanak.

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x-u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) g(u)\, du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{2} - u\right) g\left(\frac{x}{2} + u\right) du, \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Tétel független valószínűségi változók összegének a sűrűségfüggvényéről. *Legyen ξ és η két független valószínűségi változó $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénnyel. Ekkor a $\xi + \eta$ összegnek is létezik sűrűségfüggvénye, és az az*

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x-u)\, du, \quad -\infty < x < \infty$$

függvény.