A február 13-i előadáshoz kapcsolódó gyakorlat feladatai.

Feladatok:

A következő feladat állítását gyakran hívják teleszkóp szabálynak.

1.) $P(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = P(B_1|B_2 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap B_n) \cdots P(B_{n-1}|B_n)P(B_n)$, ha $P(B_2 \cap \cdots \cap B_n) > 0$.

Házi feladat:

Két különböző fáról leszednek 10 almát, és beteszik két különböző (megkülönböztethetetlen dobozba.) Ez egyik fáról szedett almák (egymástól függetlenül) $\frac{1}{4}$ a másik fáról szedett almák pedig (szintén egymástól függetlenül) $\frac{1}{10}$ valószínűséggel férgesek. Kiveszünk az egyik dobozból két almát és mind a kettő férges. Ezek után kiveszünk a másik dobozból egy almát. Mi annak a valószínűsége, hogy ez az alma már nem férges?

2. Ha $A_1, \dots, A_n$ független események, és bevezetjük az $A_j^1 = A_j$ és $A_j^{-1} = \Omega \setminus A_j$ jelöléseket, akkor tetszőleges $\varepsilon_j = \pm$, $1 \le j \le n$ sorozatra az $A_1^{\varepsilon_1}, \dots, A_n^{\varepsilon_n}$ események függetlenek.

   Megoldás: Elég belátni, hogy egy A_j halmaz kicserélése az A_j^{-1} halmazra nem változtatja meg a halmazrendszer függetlenségét. Továbbá az indexek szimmetria tulajdonsága miatt elég a $j = 1$ esettel foglalkozni. Ezután a függetlenséget definiáló relációk közül elég azokat ellenőrizni, amelyekben az 1 index szerepel. Azt kell megmutatni. hogy az $A_1, \dots, A_n$ események függetlensége esetén teljesül az

$$P((\Omega \setminus A_1) \cap A_{l_1} \cap \cdots \cap A_{l_s}) = P(\Omega \setminus A_1)P(A_{l_1}) \cdots P(A_{l_s})$$

   azonosság minden $2 \le l_1 < \cdots < l_s$ indexre. Viszont ekkor

$$\begin{aligned} P((\Omega \setminus A_1) \cap A_{l_1} \cap \cdots \cap A_{l_s}) &= P(A_{l_1} \cap \cdots \cap A_{l_s}) - P(A_1 \cap A_{l_1} \cap \cdots \cap A_{l_s}) \\ &= P(A_{l_1}) \cdots P(A_{l_s}) - P(A_1)P(A_{l_1}) \cdots P(A_{l_s}) \\ &= (1 - P(A_1))P(A_{l_1}) \cdots P(A_{l_s}) \\ &= P(\Omega \setminus A_1)P(A_{l_1}) \cdots P(A_{l_s}). \end{aligned}$$

3. Legyenek $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$ események függetlenek egymástól. Lássuk be, hogy tetszőleges olyan C eseményre, amelyik előállítható az $A_1, \dots, A_k$ halmazokból metszet, unió és komplementerképzés segítségével igaz, hogy a $B_1, \dots, B_m$ és C halmazok függetlenek.

   Segítség: Lássuk be, hogy minden ilyen C helmaz felírható az előzű feladat jelölését használva $C = \bigcup_{(j_1,\dots,j_n) \in J} A^{\varepsilon_{j_1}} \cap \cdots \cap A^{\varepsilon_{j_n}}$ alakban, ahol J egy n hosszúságú ± 1

sorozatokból álló halmaz. Továbbá az ebben a kifejezésben szereplő $A^{\varepsilon_{j_1}} \cap \cdots \cap A^{\varepsilon_{j_n}}$ események diszjunktak, és függetlenek a $B_1, \dots, B_n$ eseményektől.

Javaslat: Beszéljék meg e feladat kapcsán a konjunktiv és diszjunktiv normálforma jelentését és hasznát.

4. Adjunk példát egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőre azon három A_1, A_2 és A_3 eseményre, melyekre $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$, de az A_1, A_2 és A_3 események nem függetlenek.

   Egy lehetséges konstrukció: Legyen $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{A}$ az Ω halmaz összes részhalmazaiból álló σ-algebra, $P(\{1\}) = x$, $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = y$, $P(\{5\}) = 1 - x - 3y$, alkalmas x és y számokkal, $P(A) = \sum\limits_{u \in A} P(\{u\})$ minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra. Definiáljuk az $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{1, 3\}$ és $A_3 = \{1, 4\}$ halmazokat. Ekkor $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{1\}$, ezért $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = x$. Másrészt $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = x + y$. Válasszuk meg az x és y számokat úgy, hogy $x = (x + y)^3$. Egy lehetőség erre, $x + y = \frac{1}{3}$, és ekkor $x = (x + y)^3 = \frac{1}{27}$, $y = \frac{8}{27}$, továbbá $P(\{5\}) = \frac{2}{27}$. Ebben a példában $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$. Viszont $A_1 \cap A_2 = \{1\} = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, így nyílván $P(A_1 \cap A_2) \neq P(A_1)P(A_2)$. Tehát a függetlenség nem teljesül.

4$'$. Adjunk példát minden $N > 2$ szám esetén egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőre azon N $A_1, \dots, A_N$, eseményre, melyekre

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_N),$$

   de az A_1, A_2, $\dots$, A_N események nem függetlenek.

   Az előző konstrukció módosítása: Legyen $\Omega = \{1, 2, \dots, N + 2\}$, $\mathcal{A}$ az Ω halmaz összes részhalmazaiból álló σ-algebra, $P(\{1\}) = x$, $P(\{j\}) = y$, ha $2 \le j \le N + 1$, $P(\{N + 2\}) = 1 - x - Ny$, alkalmas x és y számokkal, $P(A) = \sum\limits_{u \in A} P(\{u\})$ minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra. Definiáljuk az $A_j = \{1, j + 1\}$, $1 \le j \le N$, halmazokat. Ekkor $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N = \{1\}$, ezért $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N) = x$. Másrészt $P(A_j) = x + y$, $1 \le j \le N$. Válasszuk meg az x és y számokat úgy, hogy $x = (x + y)^N$. Egy lehetőség erre, $x + y = \frac{1}{N}$, és ekkor $x = (x + y)^N = \frac{1}{N}$, $y = \frac{1}{N} - \frac{1}{N^N}$, továbbá $P(\{N + 2\}) = 1 - x - Ny = \frac{N - 1}{N^N}$. Ebben a példában $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_N)$. Viszont az A_1, $\dots$ A_N, események nem függetlenek.

5. Egy szabályos pénzdarabot feldobunk $n \ge 5$ alkalommal. Mi a valószínűsége annak, hogy legalább 5 fejdobás történik? Mi a valószínűsége annak, hogy egy szabályos pénzdarab végtelen sok dobása során legfeljebb 5 fejdobás történik? Tekintsük ennek az utóbbi feladatnak egy valószínűségi modelljét és beszéljük meg a következő két tulajdonság kapcsolatát:

   a. Egy A esemény nem következhet be.

   b. Egy A esemény nulla valószínűséggel következik be.

Megoldás: Annak valószínűsége, hogy egy szabályos pénzdarab n egymástól független dobása során pontosan j darab fejdobás történik $\binom{n}{j}2^{-n}$, mert összesen $\binom{n}{j}$ ilyen dobássorozat van, és mindegyik dobássorozat valószínűsége 2^{-n}. Így annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 5 fejdobás történik $\sum_{j=0}^{5}\binom{n}{j}2^{-n}$. Annak a valószínűsége, hogy végtelen dobássorozat esetén legfeljebb 5 fejdobás történik $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{5}\binom{n}{j}2^{-n}=0$. Miért szabad határértéket venni? Megbeszélendő, hogy felhasználtuk a valószínűségi mérték folytonossági tulajdonságát, mely a valószínűség σ-additivitásából következik.

6. Egy 100 tagú társaság minden egyes tagja egymástól függetlenül $\frac{1}{1000}$ valószínűséggel betegszik meg. Mi annak a valószínűsége, hogy a társaságnak lesz beteg tagja? A kapott eredményről mit mondhatunk? Az nagyon nagy, majdnem 1 vagy nagyon kicsi majdnem nulla?

   Megoldás: Jelölje A_j azt az eseményt, hogy a társaság j-ik megbetegszik meg. Ekkor a $P(A_j)=\frac{1}{1000}$, és az A_j események függetlenek. Számoljuk ki először a minket érdeklő esemény komplementerének, azaz annak az eseménynek a valószínűségét, hogy mindenki egészséges. Ez az $\bigcap_{j=1}^{1000}(\Omega\setminus A_j)$ esemény. Mivel $P(\Omega\setminus A_j)=1-\frac{1}{1000}$, és az A_j események függetlenségéből következik az $\Omega\setminus A_j$ események függetlensége is, ezért $P\left(\bigcap_{j=1}^{1000}(\Omega\setminus A_j)\right)=\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{100}$. Innen a minket érdeklő esemény valószínűsége $1-\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{100}$.

   Végül jegyezzük meg, hogy $\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{100}=\left(\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{1000}\right)^{1/10}\sim e^{-1/10}$. Miért? Ez a szám nagyon közel van az egyhez, ezért a minket érdeklő valószínűség értéke kicsi.

7. Tekintsük a következő valószínűségi mezőt. $\Omega=\{1,\dots,n\}$, ahol n valamely pozitív egész szám, $\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazaiból álló σ-algebra,

$$P(A)=\frac{\text{az } A \text{ halmaz számossága}}{n}.$$

   Legyen $n=p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}$ az n szám prímtényezős felbontása, és definiáljuk a következő A_j eseményeket: $A_j=\{m\colon m \text{ osztható a } p_j \text{ számmal}\}$, $1\le j\le k$. Legyen $B=\{m\colon m \text{ relatív prim az } n \text{ számhoz képest}\}$. Mutassuk meg, hogy

   a. Az $A_1,\dots,A_k$ események függetlenek.

b. $P(B) = \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$, azaz összesen $n \cdot \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$ n-nél kisebb és az n-hez képest relatív prim van.

Megoldás: $A_j = \left\{p_j, 2p_j, \dots, \frac{n}{p_j} p_j\right\}$ egy $\frac{n}{p_j}$ számból álló halmaz, ezért $P(A_j) = \frac{1}{p_j}$, $1 \le j \le k$. Az $A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_s}$ halmaz az n-nél kisebb $p_{j_1} \cdots p_{j_s}$ számmal osztható számokból áll minden $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_s \le k$ sorozatra, ezért számossága $\frac{n}{p_{j_1} \cdots p_{j_s}}$, és $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_s}) = \frac{1}{p_{j_1} \cdots p_{j_s}}$. Ez azt jelenti, hogy $P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_s}) = P(A_{j_1}) P(A_{j_2}) \cdots P(A_{j_s})$ minden $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_s \le k$ sorozatra, ezért az A_1, A_2, ... A_k halmazok függetlenek.

Végül $B = \Omega \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_k) = \bigcap_{j=1}^{k} (\Omega \setminus A_j)$. Ezért és az A_j események függetlensége miatt $P(B) = \prod_{j=1}^{k} P(\Omega \setminus A_j) = \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$, ahonnan következik a B halmaz számosságára megadott képlet.

Az elöző két feladatban láttuk hogyan lehet egyszerűen kiszámítani a $A_1 \cup \dots \cup A_n$ alakú események valószínűségét, ha az A_j, $1 \le j \le n$, események függetlenek. Ezek a számolások természetesen kihasználták a tekintett események függetlenségét. A következőben azt tárgyaljuk meg, hogy amennyiben nincs feltétlenül függetlenség a tekintett események között, de ki tudjuk számolni az $A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_s}$ alakú események valószínűségét, akkor egy úgynevezett szita formula segítségével ki tudjuk számítani az $A_1 \cup \dots \cup A_n$ események valószínűségét is. Továbbá megmutatjuk, hogy ez lehetővé teszi érdekes feladatok megoldását. A következő feladatot fogjuk tárgyalni:

8. Egy estélyen megjelenik n házaspár. Egy táncmester, aki nem tudja, hogy kik házastársak és kik nem véletlen módon párba rendezi a férfiakat és nőket a tánc előtt. Mi a valószínűsége annak, hogy egyetlen házaspár sem táncol együtt? Mi ennek a valószínűségnek a határértéke, ha $n \to \infty$?

   Megoldás: Definiáljuk a következő A_j eseményeket:

   $$A_j = \text{a } j\text{-ik házaspár együtt táncol}, \quad 1 \le j \le n.$$

   Ekkor minket a $P(\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}) = 1 - P(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ valószínűség érdekel. Vegyük észre, hogy a $P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$ azonosság igaz. Ugyanis az összes lehetséges párbaállítások száma $n!$, míg az olyan párbaállítások száma, melyben a j_1-ik, j_2-ik, ... , j_k-ik házaspár egy párba kerül $(n-k)!$. Továbbá érvényes a következő az irodalomban szita-formulának nevezett eredmény, melyet külön fogunk tárgyalni.

Szita formula. *Legyenek $A_1, \dots, A_n$ tetszőleges események egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Ekkor*

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^{n+1} S_n,$$

ahol

$$S_k = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} P(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}).$$

A szita-formula segítségével kapjuk, hogy n házaspár esetében

$$S_k = \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}.$$

Innen adódik, hogy a minket érdeklő valószínűség n házaspár esetén

$$\begin{aligned} P(\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}) &= 1 - P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \\ &= 1 - S_1 + S_2 + \cdots + (-1)^n S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}, \end{aligned}$$

és ezért

$$P(\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \to \frac{1}{e} \qquad \text{ha } n \to \infty.$$

9. Bizonyítsuk be a szita formulát.

   Megoldás: Adva egy A esemény vezessük be az A^ε jelölést, ahol $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon = 1$ estében $A^1 = A$, $\varepsilon = -1$ esetében $A^{-1} = \Omega \setminus A = \bar{A}$. Definiáljuk tetszőleges $r_s = 1$ vagy $r_s = -1$, $s = 1, \dots, n$ számokra az

$$A(r_1, \dots, r_n) = A^{r_1} \cap \cdots \cap A^{r_n}$$

   eseményeket. Vegyük észre, hogy

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{(r_1,\dots,r_n)\colon\ (r_1,\dots,r_n) \ne (-1,\dots,-1)} A(r_1, \dots, r_n),$$

   és tetszőleges $A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_s}$, $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_s \le n$ alakú halmazra

$$A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_s} = \bigcup_{(r_1,\dots,r_n)\colon\ r_{j_u}=1,\ 1 \le u \le s} A(r_1, \dots, r_n).$$

   Továbbá az $A(r_1, \dots, r_n)$ események különböző $(r_1, \dots, r_n)$ paraméterek esetében diszjunktak. Ezért

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{(r_1,\dots,r_n)\colon\ (r_1,\dots,r_n) \ne (-1,\dots,-1)} P(A(r_1, \dots, r_n)),$$

   és tetszőleges $A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_s}$ alakú halmazra

$$P(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_s}) = \sum_{(r_1,\dots,r_n)\colon\ r_{j_u}=1,\ 1 \le u \le s} P(A(r_1, \dots, r_n)).$$

Ilyen módon a az $A(r_1,\dots,r_n)$ halmazok $P(A(r_1,\dots,r_n))$ valószínűségeinek a lineáris kombinációjaként fejezhető ki a szita-formula két oldalán szereplő kifejezés. Azt kell belátni, hogy a $P(A(r_1,\dots,r_n))$ szám a szitaformula két oldalán szereplő kifejezésben ugyanazzal az együtthatóval szerepel. Az azonosság baloldalán ez az együttható 1, ha $\{r_1,\dots,r_n\}\neq\{-1,\dots,-1\}$, és nulla, ha $\{r_1,\dots,r_n\}=\{-1,\dots,-1\}$. Ha az $(r_1,\dots,r_s)$ halmaz l darab 1 és $n-l$ darab -1 jegyet tartalmaz, akkor ennek valószínűsége a szitaformula jobboldalán ezt $\binom{l}{1}-\binom{l}{2}+\cdots\pm\binom{l}{l}=\sum\limits_{k=1}^{l}(-1)^{k+1}\binom{l}{k}$ együtthatóval szerepel. Ugyanis az S_k összegben ez a kifejezés $\binom{l}{k}$ együtthatóval szerepel. Miért?

Innen a vizsgált együttható $\sum\limits_{k=1}^{l}(-1)^{k+1}\binom{l}{k}=1-\sum\limits_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k}=1-(1-1)^k=1$, ha az $A(r_1,\dots,r_n)$ halmaz $r_1,\dots,r_n$ indexei között $l\neq 0$ 1-es van. A maradék esetben pedig az együttható nulla. Ez azt jelenti, hogy a szita formula két oldal]án szereplő együthatók megegyeznek.

Nem kötelező házi feladat: Lássuk be, hogy a szitaformula jelöléseit használva

$$S_1-S_2=\sum_{j=1}^{n}P(A_j)-\sum_{1\le j<k\le n}P(A_j\cap A_k)\le P(A_1\cup\cdots\cup A_n)\le S_1=\sum_{j=1}^{n}P(A_j)$$

és általában

$$\sum_{k=1}^{2l}(-1)^{k+1}S_k\le P(A_1\cup\cdots\cup A_n)\le\sum_{k=1}^{2l-1}(-1)^{k+1}S_k$$

minden l indexre. (Legyen $S_k=0$, ha $k>n$.)