

Kitűzött feladatok

1. Legyen ξ_1 és ξ_2 független, a $[0, 1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen ξ_1 és ξ_2 sűrűségfüggvénye $f(x) = 1$, ha $0 \leq x \leq 1$, és $f(x) = 0$ egyébként. Számítsuk ki $\xi_1 + \xi_2$ sűrűségfüggvényét. (Kitűzve szeptember 5-én.)
2. Ha a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ egész értékű valószínűségi változók teljesítik a

$$P(\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \dots, \xi_n = k_n) = P(\xi_{\pi(1)} = k_1, \xi_{\pi(2)} = k_2, \dots, \xi_{\pi(n)} = k_n),$$

azonosságot az $1, 2, \dots, n$ számok tetszőleges $(\pi(1), \dots, \pi(n))$ permutációjára és minden $k_1, \dots, k_n$ egész számra, akkor

$$P(\xi_i = k_1) = P(\xi_1 = k_1), \quad P(\xi_i = k_1, \xi_j = k_2) = P(\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2)$$

minden $1 \leq i, j \leq n$ és k_1 és k_2 egész számra. (Kitűzve szeptember 12-én.)

3. Egy szabályos pénzdarabot feldobunk százszor egymás után. Tekintsük a feldobások számának a harmadik hatványát, és számítsuk ki annak várható értékét. (Kitűzve szeptember 12-én.)
4. Egy urnában húsz piros és harminc fehér golyó van. Kihúzzunk egymás után 10 golyót úgy, hogy amikor kihúzzunk egy golyót akkor azt visszadobjuk és vele együtt bedobunk az urnába egy vele azonos színű golyót. Mi a kihúzott piros golyók számának a várható értéke és szórásnégyzete?

Segítség: Lássuk be, hogy annak valószínűsége, hogy a j -ik húzásban piros golyót húzzunk megegyezik annak valószínűségével, hogy az első húzásban piros golyót húzzunk. Annak valószínűsége, hogy az i -ik és j -ik húzásban piros golyót húzzunk, $i \neq j$, megegyezik annak valószínűségével, hogy az első és második húzásban piros golyót húzzunk. (Kitűzve szeptember 19-én.)

5. Ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor $E\xi^{2k} = 1 \cdot 3 \cdots (2k - 1)$. (Kitűzve szeptember 26-án.)
6. Legyen ξ és η két független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Számoljuk ki $\xi - \eta$ sűrűségfüggvényét. (Kitűzve október 3-án.)
7. Egy $F(x)$ eloszlásfüggvény $\varphi(t) = \int e^{itx} dF(x)$ karakterisztikus függvénye, $-\infty < t < \infty$, folytonos, sőt egyenletesen folytonos függvény a számegyenesen. (Kitűzve október 10-én.)
8. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, egy $[a, b]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók, és definiáljuk a $\xi_1^* = \min_{1 \leq j \leq n} \xi_j$ és $\xi_n^* = \max_{1 \leq j \leq n} \xi_j$ valószínűségi változókat. Bizonyítsuk be, hogy a (ξ_1^*, ξ_n^*) valószínűségi vektornak van sűrűségfüggvénye, és az az $f(x, y) = n(n-1) \frac{(y-x)^{n-2}}{(b-a)^n}$ függvény, ha $a < x < y < b$, és $f(x, y) = 0$ egyébként. (Kitűzve október 31-én.)
9. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók egyenletes eloszlással valamilyen $[\vartheta, \vartheta + 1]$ intervallumban, és legyen $\xi_1^* \leq \xi_2^* \leq \dots \leq \xi_n^*$ a

A * jelzésű feladatok nem kötelezőek.

belőlük készített rendezett minta. Számítsuk ki ξ_n^* várható értékét és szórásnégyzetét. (Kitűzve november 7-én.)

10. Egy szabályos dobókockát feldobunk 2700 alkalommal egymástól függetlenül, és összeszámoljuk a páros értékű dobások eredményét. Adjunk jó közelítő becslést a centrális határeloszlástétel és egy normális eloszlástáblázat segítségével arra, hogy ez az összeg 420 és 720 közé esik. (Kitűzve november 7-én.)
- 11*. Valószínűségi változók ξ_n , $n = 1, 2, \dots$, sorozata, akkor és csak akkor konvergál egy valószínűséggel egy ξ valószínűségi változóhoz, ha az $\eta_n = \sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi|$ valószínűségi változók sorozata sztochasztikusan konvergál nullához, azaz minden $\varepsilon > 0$ számra $P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right) = 0$. (Kitűzve november 14-én.)
- 12*. A ξ valószínűségi változónak akkor és csak akkor létezik véges második momentuma, ha $\sum_{n=1}^{\infty} nP(|\xi| > n) < \infty$. Általánosabban $E|\xi|^k < \infty$ valamilyen $k = 1, 2, \dots$, számra akkor és csak akkor, ha $\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}P(|\xi| > n) < \infty$. (Kitűzve november 14-én.)
- 13*. Legyen ξ_k , $k = 1, 2, \dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, az $f(x) = \frac{C}{x^2 \log |x|}$, ha $|x| > 2$. $f(x) = 0$, ha $|x| \leq 2$, képlettel megadott sűrűségfüggvénnyel. $\left(\int_{|x|>2} \frac{C dx}{x^2 \log |x|} = 1.\right)$ Definiáljuk az $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, $n = 1, 2, \dots$, részletösszegeket. Lássuk be, hogy az $\frac{S_n}{n}$ átlagok sztochasztikusan tartanak nullához, azaz minden $\varepsilon > 0$ számra $P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$.
- Segítség:* Legyen $\bar{\xi}_k = \bar{\xi}_k^{(n)} = \xi_k I(|\xi_k| \leq a_n)$, $\bar{\bar{\xi}}_k = \bar{\bar{\xi}}_k^{(n)} = \xi_k I(|\xi_k| > a_n)$, és $\bar{S}_n = \sum_{k=1}^n \bar{\xi}_k$, $\bar{\bar{S}}_n = \sum_{k=1}^n \bar{\bar{\xi}}_k$. Ekkor $P(|S_n| > \varepsilon n) \leq P(|\bar{S}_n| > \frac{\varepsilon}{2}n) + P(|\bar{\bar{S}}_n| > \frac{\varepsilon}{2}n) \leq \frac{\text{Var } \bar{S}_n}{\frac{\varepsilon^2}{4}n^2} + nP(\bar{\bar{\xi}}_1 \neq 0)$. Adjunk az a_n konstans alkalmas megválasztásával (például $a_n = n$) jó becslést a $P(|S_n| > n\varepsilon)$ valószínűségre. (Kitűzve november 14-én.)