A december 5-i szeminárium témája
Rövid összefoglaló

Rövid összefoglaló

Először megbeszéltük a november 28.-i dolgozat feladatainak a megoldását.

1. Legyen $\xi_j = 1$, ha a j-ik húzás eredménye piros, $\xi_j = 0$, ha a j-ik húzás eredménye fehér, $1 \le j \le 10$. Ekkor minket az $E\left(\sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j\right)$ $\mathrm{Var}\left(\sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j\right)$ mennyiségek érdekelnek. Továbbá, $E\xi_j = E\xi_1 = \frac{2}{5}$, $1 \le j \le 10$, $E\xi_j^2 = E\xi_1 = \dfrac{2}{5}$, $\mathrm{Var}\,\xi_j = \dfrac{6}{25}$, $1 \le j \le 10$, $E\xi_j\xi_k = E\xi_1\xi_2 = \dfrac{2}{5}\dfrac{19}{49}$, ahonnan $\mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k) = E\xi_j\xi_k - E\xi_j E\xi_k = \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{19}{49} - \dfrac{2}{5}\right)$, ha $1 \le j, k \le 10$, és $j \ne k$. Innen $E\left(\sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{10} E\xi_j = 4$, és $\mathrm{Var}\left(\sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{10} \mathrm{Var}\,\xi_j + \sum\limits_{\substack{1 \le j,k \le 10 \\ j \ne k}} \mathrm{Cov}\,(\xi_j, \xi_k) = \dfrac{12}{5} + 90\dfrac{2}{5} \cdot \left(\dfrac{19}{49} - \dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{12}{5} - 36\dfrac{3}{245}$.
2. Ezt a feladatot részletesen tárgyaltuk a november 21-i gyakorlaton.
3. Ha ξ $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változó $h(x)$ valós értékű (mérhető) függvény, akkor $Eh(\xi) = \int h(x)f(x)\,dx$. Esetünkben ez azt jelenti, hogy ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor
$$Ee^{t\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx.$$
Innen
$$Ee^{t\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{tx - x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{t^2/2 - (t-x)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = e^{t^2/2}.$$
4. Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 1200$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 2$, ha a j-ik dobás eredménye 2, $\xi_j = 4$, ha a j-ik dobás eredménye 4, $\xi_j = 6$, ha a j-ik dobás eredménye 6, $\xi_j = 0$, ha a j-ik dobás eredménye 1, 3 vagy 5. Ekkor a $P\left(2280 \le \sum\limits_{j=1}^{1200} \xi_j \le 2500\right)$ valószínűséget kell jól megbecsülnünk. Vegyük észre, hogy $E\xi_j = \dfrac{1}{6}(2 + 4 + 6) = 2$, $\mathrm{Var}\,\xi_j = \dfrac{1}{6}(4 + 16 + 36) - 4 = \dfrac{16}{3}$. Innen a centrális

határeloszlástétel alapján

$$P\left(2280 \le \sum_{j=1}^{1200} \xi_j \le 2500\right) = P\left(\frac{-120}{\sqrt{1200\frac{16}{3}}} \le \frac{\sum\limits_{j=1}^{1200} \xi_j - \sum\limits_{j=1}^{1200} E\xi_j}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{1200} \operatorname{Var}\xi_j|}} \le \frac{100}{\sqrt{1200\frac{16}{3}}}\right)$$

$$\sim \Phi(1.25) - \Phi(-1.5) = 0.8944 + 0.9322 - 1 = 0.8266.$$

A harmadik feladat megoldásához hasonlóan lehet tárgyalni a következő kérdést. Ennek fontos szerepe van a centrális határeloszlástétel bizonyításában.

1. Számítsuk ki egy standard normális eloszlású valószínűségi változó $E^{it\xi}$, $-\infty < t < \infty$, karakterisztikus függvényét. (Itt $i = \sqrt{-1}$.)

Megoldás: A harmadik feladat megoldásához hasonlóan

$$\begin{aligned} Ee^{it\xi} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2/2-(it-x)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \\ &= e^{-t^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = e^{-t^2/2}\int_{-\infty+it}^{\infty+it} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx. \end{aligned}$$

A feladat megoldásához elég belátni, hogy $\displaystyle\int_{-\infty+it}^{\infty+it} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = 1$. Ez az állítás igaz, de a bizonyításhoz szükség van a komplex függvénytan néhány alapvető (nem triviális) eredményére.

Az $f(z) = \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ függvény analitikus az egész komplex számsíkon. Ezért a komplex számsík minden zárt görbéjére $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$. Válasszuk a következő γ_t görbéket. Vegyük először a $[-T,T]$ vízszintes szakaszt (pozitív irányban), majd menjünk tovább a $[T, T+it]$ függőleges szakaszon. Folytassuk az útunkat a $[T+it, -T+it]$ vízszintes szakaszon, majd zárjuk be a kört a $[-T+it, -T]$ szakaszon. Vegyük észre ezen kívül, hogy $z = x+iy$ esetben $|e^z| = e^x|e^{iy}| = e^x$, ahonnan $e^z \to 0$, ha $\operatorname{Re} z \to -\infty$. Ezt felhasználva kapjuk, hogy $\oint_{\gamma_t} f(z)\,dz = 0$, továbbá $t \to \infty$ határátmenet esetén a függőleges szakaszokon vett integrálokra $\int_{[\pm T, \pm T+it]} f(z)\,dz = 0$, ahonnan
$$\int_{-\infty+it}^{\infty+it} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = 1.$$

A centrális határeloszlástételt a következő módon is felírhatjuk: Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $n = 1, 2, \dots,$ $E\xi_1 = M$, $\operatorname{Var}\xi_1 = \sigma^2$. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - nM}{\sqrt{n}} < x\right) = \Phi_\sigma(x)$, ahol $\Phi_\sigma(x)$ egy nulla várható értékű σ^2 szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Annak érdekében, hogy a centrális határeloszlástétel több-dimenziós változatát megfogalmazzuk szükség van a várható érték és szórásnégyzet több-dimenziós változatának megértésére.

Legyen $\xi^* = \left(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}\right)^*$ n dimenziós valószínűségi vektor valamely $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. (A továbbiakban vektoron oszlopvektort fogunk érteni, ezt jelöli a * jel. A vektor és mátrix műveleteket ennek megfelelően fogjuk felírni.) Ennek várható értékét mint az n-dimenziós $E\xi^* = \left(E\xi^{(1)}, \dots, E\xi^{(n)}\right)^*$ vektort fogjuk definiálni. A szórásnégyzet n-dimenziós általánosítása pedig a következő $n \times n$-es méretű úgynevezett kovariancia-mátrix. Legyen $\xi^* = \left(\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(n)}\right)^*$ n dimenziós valószínűségi vektor valamely $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. E véletlen vektor kovariancia-mátrixa az az $n \times n$-es mátrix, melynek i-ik sorának j-ik oszlopánban a $\sigma_{i,j} = \mathrm{Cov}\left(\xi^{(i)}, \xi^{(j)}\right) = E\left(\xi^{(i)} - E\xi^{(i)}\right) E\left(\xi^{(j)} - E\xi^{(j)}\right) = E\xi^{(i)}\xi^{(j)} - E\xi^{(i)}E\xi^{(j)}$, $1 \le j, k \le n$, szám áll. A továbbiakban fontos lesz megérteni, milyen mátrixok léphetnek fel mint alkalmas véletlen vektor kovariancia-mátrixai. Ennek érdekében fel kell eleveníteni bizonyos lineáris algebrai ismereteket.

Legyen adva egy $\xi^* = \left(\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(n)}\right)^*$ n dimenziós valószínűségi vektor valamely $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, és legyen $\eta^* = \left(\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(n)}\right)^* = A\left(\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(n)}\right)^*$ m dimenziós vektor, ahol A $n \times m$ méretű (véletlentől nem függő) mátrix. Ekkor az η^* mátrix várható értéke $E\eta^* = AE\xi^*$, és η^* kovariancia-mátrixa pedig az $A\Sigma A^*$ mátrix.

Házi feladat:

Ha $\xi^* = \left(\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(n)}\right)^*$ n dimenziós valószínűségi vektor M^* várható értékkel és Σ kovariancia-mátrix-szal, $\eta^* = \left(\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(n)}\right)^* = A\left(\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(n)}\right)^*$, ahol A $n \times m$ méretű (véletlentől nem függő) mátrix, akkor η^* várható értéke AM, kovariancia-mátrixa pedig $A\Sigma A^*$.

Adva egy $\xi^* = \left(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}\right)^*$ véletlen vektor Σ $n \times n$ méretű kovariancia mátrixa bevezethetjük az n-dimenziiós téren az $x\Sigma y^*$ bilineáris függvényt és $x\Sigma x^*$ kvadratikus formát, ahol $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ az n-dimenziós tér tetszőleges vektorai. E definiciónak a következő szemléletes tartalma van: Rögzített $x = (x_1, \dots, x_n)$, és $y = (y_1, \dots, y_n)$ n-dimenziós vektorokra vezessük be az $\eta = x_1\xi^{(1)} + \cdots + x_n\xi^{(n)}$ és $\eta = y_1\xi^{(1)} + \cdots + y_n\xi^{(n)}$ véletlen vektorokat. Ekkor $\mathrm{Var}\,\eta = x\Sigma x^*$, $\mathrm{Cov}\,(\eta, \zeta) = x\Sigma y^*$. Speciálisan, $x\Sigma x^* \ge 0$ az n-dimenziós tér minden x vektorára. Nyílván teljesül a $\sigma_{j,k} = \sigma_{k,j}$ összefüggés is.

Az alábbi tényeket a lineáris algebra nyelvén a következőképp mondják el. Az n-dimenziós tér n-dimenziós Euklideszi tér, azaz olyan n-dimenziós lineáris tér, melyben létezik skalárszorzás, (ha $x = (x_1, \dots, x_n)$, és $y = (y_1, \dots, y_n)$ az n-dimenziós tér elemei, akkor $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$. Ez a skalárszorzat lehetővé teszi, hogy definiáljuk egy vektor hosszát ($|x|^2 = (x, x)$) és két nem zéró vektor szögét ($\cos(x, y) = \dfrac{(x, y)}{|x|\,|y|}$) a természetes módon.

Ezeket a fogalmakat be lehet vezetni tetszőleges (absztrakt) Euklideszi térben, és ezt érdemes megtenni. Ugyancsak definiálhatjuk Euklideszi terekben a bilineáris függvény és kvadratikus forma fogalmát. Ezt tesszük az alábbiakban.

Tekintsünk egy X (véges dimenziós) Euklides-i teret, azaz X lineáris tér, melyen létezik skalárszorzat. Az, hogy X lineáris tér azt jelenti, hogy ha $x \in X$, $y \in X$ X-beli elemek (melyeket az irodalomban vektornak neveznek) és α, β valós számok, akkor $\alpha x + \beta y \in X$ is teljesülnek, továbbá teljesülnek bizonyos algebrai azonosságok: $(x + y = y + x$, $x + (y + z) = (x + y) + z$, létezik $0 \in X$, (null elem), melyre $x + 0 = x$, minden x pontnak létezik $-x$ inverze, melyre $x + (-x) = 0$, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $(\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $0x = 0$, azaz, ha egy vektort beszorzunk a nulla számmal akkor a nulla vektort kapjuk.) Valamely $x_1, \dots, x_k \in X$ vektorokat lineárisan függetlennek nevezzük, ha a $\sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j x_j = 0$ csak triviális módon lehetséges, azaz csak akkor, ha minden $\alpha_j \in R$ együtthatóra $\alpha_j = 0$. Azt mondjuk, hogy az $x_1, \dots, x_k$ vektorok generátorrendszert alkotnak, ha minden $y \in X$ előállítható $y = \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_k x_k$ alakban. Ha $x_1, \dots, x_k$ vektorok egyszerre alkotnak generátorrendszert és független rendszert, akkor ezt bázisnak hívják. Az általános eredmények szerint egyrészt minden vektor egyértelműen kifejezhetőek, mint egy bázis elemeinek lineáris lineáris kombinációja. Egy lineáris térnek különböző bázisai adhatók meg, de ezek elemszáma minden bázisra ugyanaz. Ezt a számot nevezik a lineáris tér dimenziójának.

A lineáris algebra egyik fontos fogalma a lineáris transzformáció fogalma. Egy $A \colon X \to X$ leképezést a lineáris transzformációnak nevezünk, ha miden $x \in X$, $y \in X$ vektorra α és β (komplex) számokra $(\alpha x + \beta y)A = \alpha(xA) + \beta(yA)$. (Az irodalomban nem egységes a jelölésrendszer, van ahol xA-t és van ahol Ax-et írnak.) Két lineáris transzformáció szorzatán a transzformációk egymás utáni alkalmazását értjük. Ha rögzítünk egy bázist egy k-dimenziós lineáris térben, akkor minden $x \in X$ vektort természetes módon azonosíthatunk egy szám-k-assal, ha a vektort felírjuk, mint a bázisbeli elemek (egyértelmű) lineáris kombinációját, és a vektort azonosítjuk az ebben a reprezentációban szereplő együtthatókkal. Ugyancsak természetes, (tanult) módon azonosíthatunk egy lineáris transzformációt egy mátrix-szal.

De valójában számunkra bizonyos extra-tulajdonságokkal rendelkező lineáris terek lesznek az érdekesek. Úgynevezett Euklidesi terekről szóló fogalmakra és eredményekre lesz szükségünk, azaz olyan lineáris terekkel foglalkozunk, melyekben be van vezetve egy skalárszorzat, azaz minden $x \in X$ és $y \in X$ vektorokra létezik (x, y) skalárszorzat, mely egy valós (illetve általánosabb esetekben komplex) szám, és teljesíti a következő feltételeket: $(x, x) \ge 0$, sőt $(x, x) > 0$, ha $x \ne 0$, $(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha(x_1, y) + \beta(x_2, y)$, $(x, y) = \overline{(y, x)}$, ahol $\overline{z}$ a z komplex szám konjugáltját jelöli. Ez a skalászorzat azért olyan fontos a számunkra, mert ez teszi lehetővé, hogy beszélhessünk egy $x \in X$ vektor $|x|$ hosszáról, melyet az $|x|^2 = (x, x)$ formula definiál, valamint két x és y vektor szögéről, (speciálisan merőlegességéről) melyet a $\cos(x \text{ és } y \text{ által bezárt szög}) = \dfrac{(x, y)}{|x||y|}$ formula definiál. Továbbá definiálhatjuk az úgynevezett $A(x, y)$ bilineáris formákat az $X \times X$ téren. $A(x, y)$ bilineáris forma, ha $A(\alpha_1 x + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 A(x_1, y) + \alpha_2 A(x_2, y)$, és $A(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \bar{\alpha}_1 A(x, y_1) + \bar{\alpha}_2 A(x_2, y_2)$. Be lehet látni, hogy egy Euklides-i térben egy természetes kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létezik a lineáris transzformációk és a bilineáris formák között. Nevezetesen, minden A lineáris transzformáció segítségével definiálható egy (xA, y) bilineáris forma, és tetszőleges bilineáris forma egyértelműen ilyen formában írható. Ez a következőképp lehetséges: Igaz az, hogy egy Euklides-i térben létezik $e_1, \dots, e_k$ ortonormált bázis. (Azaz létezik olyan vektorokból álló bázis, mely egymásra merőleges egy hosszúságú vektorokból áll. Ilyen bázis több is létezik. Bár nem lenne kötelező, de Euklidesi terekben gyakorlatilag mindig ortogonális bázis segítségével számolnak.) Egy ilyen bázisban az $A(x, y)$ bilineáris formát megadó (xA, y) kifejezésben szereplő A lineáris transzformáció mátrixa az a mátrix, melynek p-ik sorának q-ik helyén álló elem az $a(p, q) = A(e_p, e_q)$ szám. Egy ilyen koordinátarendszerben, ha $x = (x_1, \dots, x_k) \in X$, $y = (y_1, \dots, y_k) \in X$, akkor az $A(x, y)$ bilineáris formát a $A(x, y) = xAy^* = \sum\limits_{p=1}^{k} \sum\limits_{q=1}^{k} a(p, q) x_p \bar{y}_q$ képlet adja meg, ahol y^* az y vektorból készített oszlopvektor.

Ha A lineáris transzformáció egy Euklidesi térben, akkor definiálhatjuk, annak transzponáltját az $(xA, y) = (x, yA^*)$ formulával. Ha a lineáris transzformáció mátrixát egy ortonormált bázisban írjuk fel, akkor annak transzponáltját átlóra való tükrözéssel és a mátrix (komplex értékű) elemeinek a konjugálásával kapjuk meg. Egy A lineáris transzformációt önadjungáltnak nevezünk, ha $A = A^*$, unitérnek, ha $UU^* = I$, ahol I az identitás mátrix. Egy unitér mátrixra az is érvényes, hogy $U^*U = I$. Egy unitér mátrix szög és távolságtartó, ezért ortonrmált bázist ortonormált bázisba visz. Egy A önadjungált mátrixra (xA, x) valós szám minden $x \in X$ számra, mert $(xA, x) = (x, xA) = \overline{(xA, x)}$. Azt mondjuk, hogy egy önadjungált mátrix pozitiv szemidefinit, ha $(xA, x) \geq 0$ minden $x \in X$ számra, pozitív definit, ha $(xA, x) > 0$ minden $x \neq 0$ vektorra. Nem nehéz belátni, hogy ha A önadjungált mátrix, akkor ezt a mátrixot illetve az általa definiált (xA, y) bilineáris függvényt meghatározza ennek megszorítása az $x = y$ pontokra, azaz az (xA, x) függvény, (kvadratikus alak).

Mi azt a speciális esetet tekintettük, amikor vettük az n-dimenziós teret mint Euklideszi teret, és rajta egy $\xi^* = \left(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}\right)^*$ véletlen vektor által meghatározott Σ kovariancia-mátrixot. Ez természetes módon definiál egy kvadratikus formát, mely pozitív definit. Felmerül a kérdés, hogy minden szimmetrikus pozitív definit mátrix előáll-e mint egy alkalmas véletlen vektor kovariancia-mátrixa. Belátjuk, hogy a válasz erre a kérdésre igenlő, sőt a következő tartalmasabb állítás is érvényes.

Legyen $\xi^* = \left(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}\right)^*$ véletlen vektor az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy ez a vektor nulla várható értékű. Tegyük fel továbbá, hogy ezen vekrot elemei korrelálatlanok, azaz legyen $E\xi^{(j)}\xi^{(k)} = 0$, és legyen $E{\xi^{(j)}}^2 = 1$ minden $1 \leq j \leq k$ számra. Ekkor a $\xi^* = \left(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}\right)^*$ vektor kovariancia-mátrixa az identitás mátrix. Legyen A tetszőleges $n \times n$-es mátrix. Ekkor az $\eta^* = A\xi^*$ mátrix covariancia-mátrixa az AA^* mátrix. Azt állítjuk, hogy tetszőleges szimmetrikus pozitív (szemi)-definit Σ mátrixhoz megadható olyan A mátrix, melyre az $\eta^* = A\xi^*$ mátrix covariancia-mátrixa az Σ.

Ez az állítás következik a következő (nem triviális) lineáris algebrai eredményből.

Lemma. *Tetszőleges A $k \times k$-as mátrixra a $D = AA^*$ mátrix $k \times k$-as szimmetrikus pozitív szemidefinit mátrix. Megfordítva, tetszőleges D $k \times k$-as pozitív szemidefinit* *mátrixhoz létezik olyan A $k \times k$-as mátrix, melyre $D = AA^*$. Sőt létezik olyan $k \times k$-as önadjungált pozitív szemidefinit A mátrix, melyre $D = AA = AA^*$.*

Megjegyzés: A D mátrix fenti előállítása nem egyértelmű, azaz a $D = AA^*$ egyenlet nem határozza meg egyértelműen az A mátrixot. Valóban, ha $D = A^*A$, U unitér mátrix és $\bar{A} = AU$, akkor $\bar{A}\bar{A}^* = AU(AU)^* = AU * U^*A^* = AA^* = D$.

Ez az eredmény fontos több-dimenziós normális eloszlások definiciójában és vizsgálatában.

Tövbb-dimenziós standard normális eloszlás definiciója. *Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Akkor a belőlük képzett $(\xi_1, \dots, \xi_n)^*$ n-dimenziós véletlen vektor n-dimenziós standard normális eloszlású véletlen vektor. Egy n-dimenziós véletlen vektor akkor és csak akkor standard normális eloszlású véletlen vektor, ha eloszlása megegyezik egy ilyen vektor eloszlásával.*

Többb-dimenziós normális eloszlás definiciója. *Legyen $\xi^* = (\xi_1, \dots, \xi_n)^*$ n-dimenziós standard normális eloszlású véletlen vektor, A $n \times n$-es mátrix. Akkor az $\eta^* = (\eta_1, \dots, \eta_n)^* = A(\xi_1, \dots, \xi_n)^* = A\xi^*$ vektor n-dimenziós normális eloszlású vektor. Egy n dimenziós véletlen vektor akkor és csak akkor standard normális eloszlású, ha létezik olyan A $n \times n$-es mátrix, hogy a fenti módon definiált $\eta^* = A\xi^*$ vektor eloszlása megegyezik az ő eloszlásával.*

A fenti definició azért nem teljesen kielégítő, mert ennek alapján nehezen ellenőrizhető, hogy egy konkrét eloszlás normális-e vagy sem. Ezért kivánatos olyan ekvivalens definiciót adni, mely közvetlenebb módon jellemzi a normális eloszlásokat. Egy véletlen $\eta^* = (\eta_1, \dots, \eta_n)^*$ vektor eloszlásfüggvénye helyett kényelmesebb annak

$$\varphi(t_1, \dots, t_n) = Ee^{i(t_1\eta_1 + \dots + t_n\eta_n)}$$

karakterisztikus függvényével dolgozni. A valószínűségszámítás klasszikus eredményei alapján az eloszlásfüggvény és karakterisztikus függvény kölcsönösen meghatározzák egymást.

Legyen $\xi^* = (\xi_1, \dots, \xi_n)^*$ n-dimenziós standard normális eloszlású véletlen vektor. Ennek karakterisztikus függvénye $\varphi(t_1, \dots, t_n) = Ee^{i(t_1\xi_1 + \dots + t_n\xi_n)} = \prod\limits_{k=1}^{n} Ee^{it_k\xi_k} = \prod\limits_{k=1}^{n} e^{-t_k^2/2} = \exp\left\{ -\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} t_k^2}{2} \right\} = e^{-(t,t)/2}$, ahol $t = (t_1, \dots, t_n)$, és $(\cdot, \cdot)$ skalárszorzatot jelöl. Ha $\eta^* = (\eta_1, \dots, \eta_n) = A\xi^*$ normális eloszlású véletlen vektor, ahol $A = (a_{j,k})$, $1 \le j, k \le n$, $n \times n$-es mátrix, akkor ennek $\varphi(t_1, \dots, t_n) = Ee^{i(t_1\eta_1 + \dots + t_n\eta_n)}$ karakterisztikus függvénye kiszámítható, felhasználva, hogy $t_1\eta_1 + \dots + t_n\eta_n = (t, \eta^*) = (t, A\xi^*) = tA\xi^*$. Innen $\varphi(t_1, \dots, t_n) = Ee^{i(t_1\eta_1 + \dots + t_n\eta_n)} = e^{-(tA,tA)/2} = e^{-tAA^*t^*/2}$. Ennek az azonosságnak mélyreható következményei vannak. (Vegyük észre, hogy AA^* az η^* véletlen vektor kovariancia-függvénye.)