DOLGOZAT FELADATOK

(A programozó matematikus gyakorlaton)

Megjegyzés: Abban az esetben, ha egy megkérdezett fogalom definícióját több (egymással ekvivalens) módon lehet megadni, akkor ezek mindegyike jó válasznak minősül.

1. Mi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenül kitöltött lottószelvényen (ahol 90 szám közül kell kitalálni az öt kihúzott számot), pontosan két találatot érünk el?
2. Dobjunk fel egy szabályos dobókockát háromszor. Mi annak a feltételes valószínűsége, hogy mind a három dobás eredménye hatos, feltéve, hogy legalább egy hatos dobás történt?
3. Legyen ξ a $[0, a]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó valamilyen $a > 0$ számmal, azaz legyen a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{a}$, ha $0 \le x \le a$, és $f(x) = 0$ egyébként. Számítsuk ki a ξ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.
4. Egy pénzdarabról ellenőrizni akarjuk, hogy igaz-e az a hipotézis, mely szerint ez az érme $\frac{2}{3}$ valószínűséggel esik-e a fej és $\frac{1}{3}$ valószínűséggel az írás oldalára. Ennek érdekében feldobjuk a pénzdarabot 15 000 alkalommal, és a következő döntési szabályt hozzuk. Választunk egy alkalmas k számot, és akkor tekintjük úgy, hogy hipotézisünk teljesül, ha a fejdobások száma $10\,000 - k$ és $10\,000 + k$ közé esik. Hogyan válassszuk ezt a k számot, ha azt akarjuk, hogy egy a hipotézist teljesítő pénzdarab feldobása esetén (körülbelül) 0.9 valószínűséggel döntsünk úgy, hogy a hipotézis teljesül? (A feladat megoldásában használjuk a mellékelt normális eloszlásfüggvény táblázatot.)
5. Mikor mondjuk, hogy egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn adott $A_1, A_2, \dots, A_n$ események egymástól függetlenek?
6. Az alábbi négy állítás közül melyik helyes és melyik nem:
   - a.) Ha ξ és η két valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn, akkor a $\xi + \eta$ összeg várható értéke egyenlő a ξ és η valószínűségi változók várható értékének az összegével, azaz $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$.
   - b.) Ha ξ és η két független valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn, akkor a $\xi + \eta$ összeg várható értéke egyenlő a ξ és η valószínűségi változók várható értékének az összegével, azaz $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$.
   - c.) Ha ξ és η két valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn, akkor a $\xi+\eta$ összeg szórásnégyzete egyenlő a ξ és η valószínűségi változók szórásnégyzetének az összegével, azaz $\mathrm{Var}\,(\xi + \eta) = \mathrm{Var}\,\xi + \mathrm{Var}\,\eta$.
   - d.) Ha ξ és η két független valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn, akkor a $\xi + \eta$ összeg szórásnégyzete egyenlő a ξ és η valószínűségi változók szórásnégyzetének az összegével, azaz $\mathrm{Var}\,(\xi + \eta) = \mathrm{Var}\,\xi + \mathrm{Var}\,\eta$.

Megoldások a következő oldalon.

A dolgozat feladatainak megoldása:

1. $\dfrac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}$, mert a számláló megadja az összes lehetséges két találatot biztosító kitöltések számát, (az 5 kihúzott számból 2, a 85 ki nem húzott számból 3-at kell kitölteni), a nevező megadja az összes lehetséges húzások számát, és minden húzás egyforma valószínű.

2. $\dfrac{\left(\frac{1}{6}\right)^3}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^3}=\dfrac{1}{91}$. Ugyanis jelölje A azt az eseményt, hogy mind a három húzás 6-os, B azt az eseményt, hogy legalább egy hármas húzás történik. Ekkor a $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ kifejezést kell kiszámítani. Viszont $A\subset B$, ezért $P(A\cap B)=P(A)$. Továbbá, $P(A)=\left(\frac{1}{6}\right)^3$, és $P(B)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^3$, mert a B esemény komplementere az az esemény, hogy mind a három dobás 1,2,3,4 vagy 5, és ennek valószínűsége $\left(\frac{5}{6}\right)^3$.

3. $E\xi=\int_0^a x\frac{1}{a}\,dx=\left[\frac{x^2}{2a}\right]_0^a=\frac{a}{2}$, $E\xi^2=\int_0^a x^2\frac{1}{a}\,dx=\left[\frac{x^3}{3a}\right]_0^a=\frac{a^2}{3}$, $\operatorname{Var}\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=\frac{a^2}{3}-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{12}$.

4. Legyen $\xi_j=1$, ha a j-ik pénzdobás eredménye fej, $\xi_j=0$, ha a j-ik pénzdobás eredménye írás, $S=\sum\limits_{j=1}^{15000}\xi_j$. Ekkor a ξ_j valószínűségi változók függetlenek, egyforma eloszlásúak, és a hipotézis teljesülése esetén $P(\xi_j=1)=\frac{2}{3}$, $P(\xi_j=0)=\frac{1}{3}$. Olyan k-számot keresünk, melyre abban az esetben, ha a hipotézis teljesül, akkor $P(10000-k\le S\le 10000+k)\sim 0.9$. Ebben az esetben $E\xi_j=\frac{2}{3}$, $\operatorname{Var}\xi_j=\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$, ezért a centrális határeloszlástétel alapján $P(10000-k\le S\le 10000+k)=P\left(\frac{-k}{\sqrt{\frac{15000\cdot 2}{9}}}\le\frac{S-ES}{\sqrt{\operatorname{Var}S}}\le\frac{k}{\sqrt{\frac{15000\cdot 2}{9}}}\right)\sim 2\Phi\left(\frac{\sqrt{3}k}{100}\right)-1$. Ezért a $\Phi\left(\frac{\sqrt{3}k}{100}\right)=0.95$ egyenletet kell megoldani. Innenn $\frac{\sqrt{3}k}{100}\sim 1.65$, $k=94$.

5. Az $A_1,\dots,A_n$ események akkor függetlenek, ha az $\{1,\dots,n\}$ halmaz tetszőleges $\{k_1,\dots,k_s\}\subset\{1,\dots,n\}$ részhalmazára $P(A_{k_1}\cdots A_{k_s})=P(A_{k_1})\cdots P(A_{k_s})$.

6. a. Igaz.

   b. Igaz.

c. Hamis. Láttuk például a következő ellenpéldát. Ha egy urnából visszatevés nélkül kihúzunk n fehér vagy piros golyót, $\xi_j = 1$, ha a j-ik húzás esetén piros, $\xi_j = 0$, ha a j-ik húzás során fehér golyót húzunk, $1 \le j \le n$. Ekkor e valószínűségi változók összegének a szórásnégyzete, az n húzás során kihúzott golyók számának a szórásnégyzete nem egyezik meg az egyes összeadandók szórásnégyzetének az összegével. A legegyszerűbben látni ezt abban az esetben, ha az összes golyót kihúzzuk. Ekkor az összeg szórásnégyzete zéró.

d. Igaz.