СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ “СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ”
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Магистърска програма “Математика и математична физика”

ДИПЛОМНА РАБОТА

за получаване на научната и образователна степен

МАГИСТЪР

на тема

МЕТОДЪТ НА КЛОСТЕРМАН В ЕДНА ЗАДАЧА ОТ АДИТИВНАТА ТЕОРИЯ НА ЧИСЛАТА

КОСТАДИНКА СТОЕВА ЛАПКОВА

Научен ръководител: проф. д.м.н. Дойчин И. Толев

С О Ф И Я
2 0 0 7

Абстракт

Целта на настоящата дипломна работа е да се изложи методът на Клостерман. Той се илюстрира с приложение в задачата на Лагранж за представимост на достатъчно големи естествени числа като сума на четири квадрата, лежащи в къс интервал.

Ние даваме асимптотична формула за броя на представянията (взети с гладки тегла) на целите числа като квадрати на „почти равни“. Основният резултат е Теорема 1 (§1.6), чието доказателство е изложено подробно.

Този резултат не е нов, защото същата задача е разглеждана от Райт в по-къс интервал и със същия метод. Въпреки това асимптотичната формула, която даваме, с подходящо избрани от нас тегла, ни дава възможност да стигнем до по-нататъшни резултати, докато доказателството на Райт би било много по-сложно за прилгане. По-точно, с помощта на допълнителни съображения, основани на метода на решетото, може да се докаже разрешимостта на уравнението на Лагранж с неизвестни в къс интервал, които са почти прости. В глава §1.6 е формулирана Теорема 2, разглеждаща последния проблем. Тя се доказва с помощта на Теорема 3, която е обобщение на Теорема 1. Тъй като доказателството на Теорема 3 е технически по-трудно и надхвърля нашата цел – да илюстрираме метода на Клостерман – ние не го привеждаме.

В дипломната работа са обособени няколко части, разделени в глави. В §1.1 са дадени означенията, които използваме в дипломната работа. В §1.2 са изложени някои добре известни леми. Доказателствата на повечето са изпуснати и са цитирани източници, защото са класически резултати, които са широко известни и могат лесно да се намерят в литературата. В §1.2, и по-късно, са изложени доказателствата на леми, които са по-трудно достъпни и също така на леми, които се доказват с методи и техники, на които бихме искали да обърнем внимание. В Глава 1 също така се дава историята на задачата, която решаваме. Накратко се описва класическият метод на Харди-Литлууд и се обяснява как от него произлиза подобрението на Клостерман. В Глава 2 се дава подробното доказателство на нашия основен резултат. Глава 3 е обособена за изследване на особения ред и особения интеграл за нашата задача.

В дипломната работа се използват добре известни методи, за които ще отбелязваме източници при всяка възможност.

Съдържание

Глава 1

Увод

За да се улесни изложението на материала, който разглеждаме, първо ще дадем означенията използвани в настоящата работа.

1.1 Означения

С буквите a, b, k, l, m, n ще бележим цели числа, с q, q_1, q_2 – естествени, като на някои места (където точно е ясно от контекста) q_1 означава нечетно естествено число; с α, β, γ ще бележим реални числа. Буквата p запазваме за простите числа, а C - за положителна константа. За да бележим разстоянието от α до най-близкото цяло число ще пишем $\|\alpha\|$:

$$\|\alpha\| = \min_{x \in \mathbb{Z}} |\alpha - x| \ .$$

Както обикновено, ако $f(x)$ е комплекснозначна функция на реален аргумент и $g(x)$ е реалнозначна на реален аргумент, като $g(x) \geq 0$, то записът $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ означава, че съществува константа $C > 0$, такава че при достатъчно големи x е изпълнено

$$|f(x)| \leq C g(x) \ . \tag{1.1.1}$$

Последното означаваме също и с помощта на знака на Виноградов : $f(x) \ll g(x)$. Когато константата в (1.1.1) зависи от параметъра α, пишем $\mathcal{O}_\alpha$ и $\ll_\alpha$. Ако $f(x)$, $g(x)$ са неотрицателни реалнозначни функции на реален аргумент, такива че $f(x) \ll g(x) \ll f(x)$, ще използваме означението $f(x) \asymp g(x)$. Знакът $\square$ ще означава край на доказателството или липса на такова. Когато пишем $\sum\limits_{n \leq x}$ искаме сумирането да е по естествени числа $n \leq x$.

Ще считаме, че ε означава произволно малко положително число, което като правило е различно в различни изрази. Тази уговорка ни дава основание да пишем например

$$x^\varepsilon \log x \ll x^\varepsilon \ .$$

Навсякъде с $(a_1,\dots,a_k)$ бележим най-големия общ делител на $a_1,\dots,a_k$. Съкратеният запис $x\,(q)$ означава, че променливата x пробягва пълна система остатъци по модул q. Съответно $x\,(q)^*$ означава, че x пробягва редуцирана система остатъци по модул q. (За дефиниция на пълна и редуцирана система вж. §4 и §5 от гл.III в [1].) Ще пишем $p^k \| a$, когато $p^k \mid a$ и $p^{k+1} \nmid a$.

За нечетно просто p и $(a,p)=1$ използваме символа на Льожандър

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & , \ \text{ако сравнението } x^2 \equiv a \pmod p \quad \text{има решение ;} \\ -1 & , \ \text{в противен случай .} \end{cases}$$

По-общо, за нечетно $q = p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$ и $(a,q)=1$ използваме символа на Якоби

$$\left(\frac{a}{q}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^{\alpha_1}\dots\left(\frac{a}{p_k}\right)^{\alpha_k} \ .$$

Въвеждаме кратките означения

$$e(x) = e^{2\pi\imath x} \tag{1.1.2}$$

и

$$e_q(x) = e\left(\frac{x}{q}\right) \ . \tag{1.1.3}$$

Ако $(a,q)=1$, то $\overline{a}_q$ означава обратният елемент на a по модул q, т.е. решението на сравнението $a\overline{a} \equiv 1 (\operatorname{mod} q)$. Когато стойността на модула се подразбира от контекста ще пишем за простота $\overline{a}$. Например $e_q\left(\overline{a}\right)$ означава $e_q\left(\overline{a}_q\right)$.

Използваме означението $\operatorname{sign}\alpha$, което показва знака на α:

$$\operatorname{sign}\alpha = \begin{cases} 0 & , \quad \alpha = 0\,; \\ 1 & , \quad \alpha > 0\,; \\ -1 & , \quad \alpha < 1\ . \end{cases}$$

С $\mu(n)$ бележим функцията на Мьобиус: $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^k$, ако n е произведение на k различни прости числа и $\mu(n)=0$, ако n се дели на квадрат на цяло число, различно от 1. С $\varphi(n)$ бележим функцията на Ойлер, която означава броя на естествените числа от 1 до n, взаимно прости с n. Фунцкията $\tau(n)$ означава броя на положителните делители на n. За дефинициите и свойствата на тези аритметични функции вж. например Гл.VI от [9].

Казваме, че едно естествено число е почти просто от ред r, ако в каноничното му разлагане има не повече от r на брой прости делители (всеки преброен толкова пъти, колкото е неговата кратност). Ако всички числа от някаква съвкупност са почти прости от ред r, но не се интересуваме от конкретната стойност на константата r, за улеснение казваме, че тези числа са почти прости.

Ще използваме свойствата на сумите на Гаус $S(q,a,m)$, $S(q,a)$ и на сумата на Клостерман $K(q,m,n)$, дефинирани с

$$S(q,m,n) = \sum_{x(q)} e_q(mx^2 + nx) \ , \tag{1.1.4}$$

$$S(q,m) = S(q,m,0) = \sum_{x(q)} e_q(mx^2) \ , \tag{1.1.5}$$

$$K(q,m,n) = \sum_{x(q)^*} e_q(mx + n\overline{x}) \ . \tag{1.1.6}$$

Въвеждаме и сумата на Рамануджан

$$c_q(m) = K(q,m,0) \ . \tag{1.1.7}$$

1.2 Леми

Тук ще формулираме добре известни леми, необходими в процеса на работата. Доказателствата на по-голямата част от тях, особено на най-широко известните (но не най-лесни и маловажни), са пропуснати и са цитирани източници, откъдето могат да се намерят.

Лема 1. *Функциите $e(x)$ и $e_q(x)$, дефинирани с* (1.1.2) *и* (1.1.3)*, притежават свойствата:*

(i)

$$e(\alpha + \beta) = e(\alpha)e(\beta) \ ;$$

(ii) Функцията $e(x)$ е периодична с период 1, а функцията $e_q(x)$ е периодична с период q.

(iii)

$$\sum_{m=1}^{q} e_q(am) = \begin{cases} 0 \ , & \text{ако } q \nmid a \ ; \\ q \ , & \text{ако } q \mid a \ . \end{cases}$$

(iv)

$$\int_0^1 e(\alpha m)d\alpha = \begin{cases} 0 \ , \ \textit{ако } m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\,; \\ 1 \ , \ \textit{ако } m = 0\ . \end{cases}$$

Доказателство: Доказателствата на тези твърдения са елементарни, вж. например §7.2 от [25]. □

Следващата лема описва формулата на Поасон в специален случай, който е достатъчен за нашата работа.

Лема 2. *(Формула на Поасон) Нека $f(x)$ е безкрайногладка комплекснозначна функция на реален аргумент с краен носител. Тогава*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)e(-m\alpha)d\alpha\ .$$

Доказателство: Вж. Гл.II, §13 от [3] . □

Следващата лема се доказва лесно, като се приложи добре известният метод за оценяване на сума чрез интеграл от съответната функция.

Лема 3. *Нека $x > 1$ е реално число. Тогава са изпълнени оценките*

(i)

$$\sum_{n\le x} \frac{1}{n} \ll \log x\ ;$$

(ii) за $k \in \mathbb{R}$, $k > 1$

$$\sum_{n> x} \frac{1}{n^k} \ll_k x^{-k+1}\ ;$$

(iii) за $k \in \mathbb{R}$, $k > -1$

$$\sum_{n\le x} n^k \ll_k x^{k+1}\ .$$

□

Лема 4. *За всяко реално число α е в сила равенството*

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha\ .$$

Доказателство: Вж. §3.122 в [35] . □

Лема 5. *Нека* $(q_1, q_2) = 1$. *Ако* a_1 *пробягва пълна (редуцирана) система остатъци по модул* q_1, *то* $a_1 q_2$ *също пробягва пълна (редуцирана) система остатъци по модул* q_1.

Доказателство: Това са съответно твърденията §4.**d** и §5.**c** в Гл.III от [1] . □

Лема 6. *Нека* $(q_1, q_2) = 1$. *Когато* a_1 *и* a_2 *пробягват пълни (редуцирани) системи остатъци по модул* q_1, *съответно по* q_2, *сумата* $a_1 q_2 + a_2 q_1$ *задава пълна (редуцирана) система остатъци по модул* $q_1 q_2$.

Доказателство: Това са Теорема 4 и Теорема $5'$ от §2, Гл.II в [9] . □

Лема 7. *За произволно малко* $\varepsilon > 0$ *съществува* $C = C(\varepsilon)$, *такова че е в сила оценката*

$$\tau(n) \leq C n^{\varepsilon}$$

Доказателство: Вж. Теорема 315, §18.1, Гл.XVIII от [19] . □

Лема 8. *За функцията на Ойлер е в сила оценката*

$$\varphi(N) \gg \frac{N}{\log\log N} .$$

Доказателство: Вж. Теорема 328, §18.4, Гл.XVIII от [19] . □

Ще ни е необходима следната

Лема 9. *Нека* $q = p^k$ *и* $p^{\xi} \| N$ *за* $\xi \geq 1$. *Тогава за сумата на Рамануджан* $c_q(N)$ *дефинирана в* (1.1.7) *е изпълнено*

$$c_q(N) = \begin{cases} 0 & , \quad k \geq \xi + 2; \\ -p^{\xi} & , \quad k = \xi + 1; \\ p^k - p^{k-1} & , \quad 1 \leq k \leq \xi. \end{cases}$$

Доказателство: Това е Теорема 4.3 от §7.4, Гл.VII в [25] . □

Следващата лема съдържа основният резултат на Естерман в [10] за оценка на сумата на Клостерман. Най-важният случай (за просто p) е разгледан от Андре Вейл [37], който получава оценката

$$|K(p, a, b)| \leq 2\sqrt{p}, \quad p \nmid ab.$$

Лема 10. *За всяко естествено* q *за сумата на Клостерман е изпълнено неравенството*

$$|K(q, a, b)| \leq \tau(q)\, q^{\frac{1}{2}}\, (q, a, b)^{\frac{1}{2}} .$$

□

Следващата лема съдържа класически резултати за сумата на Гаус, доказателствата на които могат да се намерят например в §7.5 от [25].

Лема 11. *Сумата на Гаус $S(q,a,b)$ удовлетворява:*

(i) Ако $(q_1,q_2)=1$,

$$S(q_1q_2, a_1q_2+a_2q_1, b) = S(q_1, a_1q_2^2, b)S(q_2, a_2q_1^2, b)\ .$$

(ii) Нека $(q,a)=d$. *Тогава*

$$S(q,a,b) = \begin{cases} dS(q/d, a/d, b/d) & , \text{ ако } \ d \mid b\ , \\ 0 & , \text{ ако } \ d \nmid b\ . \end{cases}$$

(iii) Ако $(q,a)=1$, *то* $|S(q,a,b)| \le 2q^{\frac{1}{2}}$.

(iv) Ако $(q,2a)=1$, *то*

$$S(q,a,b) = e_q\left(-\overline{(4a)}b^2\right)\left(\frac{a}{q}\right)S(q,1)\ .$$

(v) Ако $(q,2)=1$, *то*

$$S(q,1) = \begin{cases} q^{\frac{1}{2}} & , \text{ ако } \ q\equiv 1\,(4)\ , \\ \imath q^{\frac{1}{2}} & , \text{ ако } \ q\equiv -1\,(4)\ . \end{cases}$$

(vi) Ако $(a,2)=1$, *то*

$$S(2^l,a) = \begin{cases} 0 & , \text{ ако } \ l=1, \\ 2^{\frac{l}{2}}(1+\imath^a) & , \text{ ако } \ l \text{ е четно}\ , \\ 2^{\frac{l+1}{2}}e(a/8) & , \text{ ако } \ l \text{ е нечетно}\ . \end{cases}$$

□

За формулировка на следващата важна за метода на Клостерман лема е необходимо да изложим основните факти за редицата на Фарей.

Редица на Фарей $\mathfrak{F}_n$ от ред n е нарастващата редица от несъкратими дроби между 0 и 1, чиито знаменатели не надвишават n. Така $\dfrac{h}{k}\in\mathfrak{F}_n$, ако $0\le h\le k\le n$ и $(h,k)=1$, като 0 и 1 се представят като $\dfrac{0}{1}$ и $\dfrac{1}{1}$. Например

$$\mathfrak{F}_5 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right\}\ .$$

За редицата на Фарей е изпълнена следната лема:

Лема 12. *(i) Ако* $\dfrac{h}{k}$ *и* $\dfrac{h'}{k'}$ *са два последователни елемента на редицата* $\mathfrak{F}_n$, *то*

$$kh'-hk'=1.$$

(ii) Ако $\frac{h}{k}$, $\frac{h''}{k''}$, $\frac{h'}{k'}$ *са три последователни елемента на редицата* $\mathfrak{F}_n$*, то*

$$\frac{h''}{k''} = \frac{h+h'}{k+k'} \ .$$

(iii) Ако $\frac{h}{k}$ *и* $\frac{h'}{k'}$ *са два последователни елемента на редицата* $\mathfrak{F}_n$*, то*

$$k + k' > n.$$

Доказателство: За доказателство вж. Гл.III на [19] . □

Следващата лема играе важна роля в метода на Клостерман.

Лема 13. *Нека* $Q \geq 1$ *е реално число. Тогава е в сила*

$$\left(\frac{1}{1+[Q]},\ 1+\frac{1}{1+[Q]}\right] = \bigcup_{q\leq Q} \bigcup_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \mathfrak{L}(q,a)\ , \tag{1.2.1}$$

където

$$\mathfrak{L}(q,a) := \left(\frac{a}{q} - \frac{1}{q(q+q')},\ \frac{a}{q} + \frac{1}{q(q+q'')}\right] \tag{1.2.2}$$

са непресичащи се интервали, а числата q', q'' *са такива, че*

$$\left| \begin{array}{c} Q < q+q',\ q+q'' \leq q+Q \\ \\ aq' \equiv 1 \pmod q, \quad aq'' \equiv -1 \pmod q). \end{array} \right. \tag{1.2.3}$$

Доказателство: Непресичащите се интервали $\mathfrak{L}(q,a)$ се построяват с помощта на редицата на Фарей от ред $[Q]$. Ако $\frac{a'}{q'}$, $\frac{a}{q}$, $\frac{a''}{q''}$ са три последователни дроби от $\mathfrak{F}_{[Q]}$, то дефинираме

$$\mathfrak{L}(q,a) = \left(\frac{a'+a}{q'+q},\ \frac{a+a''}{q+q''}\right] \ . \tag{1.2.4}$$

Определяме също

$$\mathfrak{L}(1,1) = \left(1-\frac{1}{[Q]+1},\ 1+\frac{1}{[Q]+1}\right]. \tag{1.2.5}$$

За улеснение казваме, че $\frac{a}{q}$ е „център“ на $\mathfrak{L}(q,a)$.

Например при $[Q] = 5$ „центровете“ са

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1},$$

а последователните интервали са:

$$\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{9}\right], \left(\frac{2}{9}, \frac{2}{7}\right], \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{8}\right], \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{7}\right], \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right], \left(\frac{4}{7}, \frac{5}{8}\right], \left(\frac{5}{8}, \frac{5}{7}\right],$$

$$\left(\frac{5}{7}, \frac{7}{9}\right], \left(\frac{7}{9}, \frac{5}{6}\right], \left(\frac{5}{6}, \frac{7}{6}\right] .$$

Очевидно така определените интегрaли $\mathfrak{L}(q,a)$ два по два не се пресичат и е изпълнено (1.2.1).

Нека

$$\Delta_1 = \frac{a}{q} - \frac{a'+a}{q'+q}$$

и

$$\Delta_2 = \frac{a+a''}{q+q''} - \frac{a}{q}$$

са разстоянията от „центъра“ $\dfrac{a}{q}$ до краищата на интервала $\mathfrak{L}(q,a)$.

$$\Delta_1 = \frac{aq' + aq - a'q - aq}{q(q+q')} = \frac{1}{q(q+q')}$$

по Лема 12.(i) и аналогично

$$\Delta_2 = \frac{1}{q(q+q'')} .$$

Така се вижда, че $\mathfrak{L}(q,a) = \left(\dfrac{a}{q} - \Delta_1, \dfrac{a}{q} + \Delta_2\right]$ и интервалът $\mathfrak{L}(q,a)$, който дефинирахме в (1.2.4), съвпада с този в (1.2.2).

Сега ще докажем, че са изпълнени условията (1.2.3). Ясно е, че имаме

$$\frac{a'+a}{q'+q}, \frac{a+a''}{q+q''} \notin \mathfrak{F}_{[Q]} .$$

За тези дроби според Лема 12.(iii) е изпълнено

$$Q < q'+q,\ q+q'' \le q+Q ,$$

така че първите условия от (1.2.3) са изпълнени. Вторите условия в (1.2.3) следват от равенствата $aq' - a'q = 1$ и $aq'' - a''q = -1$.

Остана да проверим условията (1.2.3) за $\mathfrak{L}(1,1)$. При $a=1$, $q=1$ тези условия са в сила точно когато $q'=q''=[Q]$, така че в този случай интервалът (1.2.2) съвпада с интервала $\mathfrak{L}(1,1)$, определен чрез (1.2.5).

$\square$

Лема 14. *За реалните числа A и B, удовлетворяващи $A<B$, е изпълнено неравенството*

$$\left|\sum_{A<n\le B} e(\alpha n)\right| \le \min\left([B]-[A]\,,\frac{1}{2\|\alpha\|}\right)\ .$$

Доказателство: Това е Теорема 7.2, §7.7 в [25] . $\square$

Лема 15. ***(Тъждество на Ойлер)*** *Нека аритметичната фунцкия f е мултипликативна и редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ е абсолютно сходящ. Тогава е изпълнено тъждеството*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=\prod_p \left(1+f(p)+f(p^2)+\dots\right)\ ,$$

като произведението в дясната страна също е абсолютно сходящо.

Доказателство: Това е Теорема 5 от §4, Гл.VII в [9]. $\square$

Лема 16. *За всяко реално число $Q\ge 1$, естествено Nи произволно $\varepsilon>0$ е в сила оценката*

$$\sum_{q\le Q} q^{-\frac12}(q,N)^{\frac12} \ll Q^{\frac12}N^{\varepsilon}\ ,$$

където константата в знака $\ll$ зависи само от ε.

Доказателство: Разделяме сумата на части съобразно стойността на (q,N) и след смяна на реда на сумирането получаваме

$$\begin{aligned}\Lambda := \sum_{q\le Q} q^{-\frac12}(q,N)^{\frac12} &= \sum_{\substack{\delta|N\\ \delta\le Q}} \delta^{\frac12} \sum_{\substack{q\le Q\\ (q,N)=\delta}} q^{-\frac12} \le \sum_{\substack{\delta|N\\ \delta\le Q}} \delta^{\frac12} \sum_{\substack{q\le Q\\ \delta|q}} q^{-\frac12}\\ &= \sum_{\substack{\delta|N\\ \delta\le Q}} \delta^{\frac12} \sum_{k\le \frac{Q}{\delta}} k^{-\frac12}\delta^{-\frac12} = \sum_{\substack{\delta|N\\ \delta\le Q}} \sum_{k\le \frac{Q}{\delta}} k^{-\frac12}\ .\end{aligned}$$

Като използваме Лема 3.(iii), а след това и Лема 7, получаваме

$$\Lambda \ll \sum_{\substack{\delta|N\\ \delta\le Q}} \left(\frac{Q}{\delta}\right)^{\frac12} \ll Q^{\frac12}\sum_{\delta|N} 1 = Q^{\frac12}\tau(N) \ll Q^{\frac12}N^{\varepsilon}\ .$$

$\square$

Лема 17. *За всяко $k \in \mathbb{R}$, $k > 1$, реално $Q \geq 1$, естествено N и произволно малко $\varepsilon > 0$ е в сила оценката*

$$\sum_{q>Q} \frac{(q,N)^{\frac{1}{2}}}{q^k} \ll Q^{-k+1} N^{\varepsilon} \ ,$$

където константата в знака $\ll$ зависи само от k и ε .

Доказателство: Разделяме сумата на части съобразно стойността на (q, N). Имаме

$$\begin{aligned}
\Lambda &:= \sum_{q>Q} q^{-k}(q,N)^{\frac{1}{2}} = \sum_{\delta|N} \delta^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{q>Q \\ (q,N)=\delta}} q^{-k} \leq \sum_{\delta|N} \delta^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{q>Q \\ \delta|q}} q^{-k} \\
&= \sum_{\delta|N} \delta^{\frac{1}{2}} \sum_{m\delta>Q} (m\delta)^{-k} = \sum_{\delta|N} \delta^{\frac{1}{2}} \sum_{m>\frac{Q}{\delta}} m^{-k}\delta^{-k} \\
&= \sum_{\delta|N} \delta^{\frac{1}{2}-k} \sum_{m>\frac{Q}{\delta}} m^{-k} = \Lambda_1 + \Lambda_2 \ ,
\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

където

$$\Lambda_1 := \sum_{\substack{\delta|N \\ \delta \leq Q}} \delta^{\frac{1}{2}-k} \sum_{m>\frac{Q}{\delta}} m^{-k}$$

и

$$\Lambda_2 := \sum_{\substack{\delta|N \\ \delta > Q}} \delta^{\frac{1}{2}-k} \sum_{m>\frac{Q}{\delta}} m^{-k} \ .$$

Сега за Λ_1 прилагаме Лема 3.(ii):

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &\ll \sum_{\delta|N} \delta^{\frac{1}{2}-k} \left(\frac{Q}{\delta}\right)^{-k+1} = Q^{-k+1} \sum_{\delta|N} \delta^{-\frac{1}{2}} \ll Q^{-k+1} \sum_{\delta|N} 1 \\
&= Q^{-k+1}\tau(N) \ll Q^{-k+1} N^{\varepsilon} \ .
\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

По-горе използвахме Лема 7 за оценката на $\tau(N)$.

За Λ_2 имаме

$$\begin{aligned}
\Lambda_2 &= \sum_{\substack{\delta|N \\ \delta>Q}} \delta^{\frac{1}{2}-k} \sum_{m\geq 1} m^{-k} \ll \sum_{\substack{\delta|N \\ \delta>Q}} \delta^{\frac{1}{2}-k} \\
&\ll \sum_{\substack{\delta|N \\ \delta>Q}} Q^{\frac{1}{2}-k} \ll Q^{\frac{1}{2}-k} \sum_{\delta|N} 1 \ll Q^{\frac{1}{2}-k} N^{\varepsilon} \ .
\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

Доказателството на лемата следва от (1.2.6), (1.2.7) и (1.2.8) . □

1.3 Исторически сведения

Тук ще изложим произхода на задачата, за която ще приложим метода на Клостерман, и предшестващите я резултати.

През 1770 година Лагранж доказва, че всяко естествено число може да се представи като сума на четири квадрата. По-късно през 1834 Якоби получава и точна формула за броя на решенията в цели числа на уравнението

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = N \tag{1.3.1}$$

за всяко естествено число N. Той доказва, че този брой е равен на

$$8 \sum_{\substack{d|N \\ d\not\equiv 0 \pmod 4}} d\,. \tag{1.3.2}$$

(Доказателството на това забележително тъждество е изложено като Теорема 386, §20.12, Гл.XX в [19].)

През 1770 година Варинг формулира хипотеза относно уравнението

$$x_1^k + x_2^k + \cdots + x_s^k = N, \tag{1.3.3}$$

чиято съвременна формулировка гласи, че за всяко цяло $k \geq 2$ съществува $s = s(k) \in \mathbb{N}$, такова че всяко естествено число N е сума на най-много s на брой k-ти степени на естествени числа. Пълно доказателство на тази хипотеза получава Хилберт [20] през 1909. Той използва сложни комбинаторни разсъждения, с които дава възможност да се намери и явна формула за функцията $s(k)$. Тази функция обаче расте изключитлно бързо с нарастването на k. Подробно изложение на метода на Хилберт може да се намери в книгата на М. Натансон [30].

В своята знаменита поредица от статии „Partitio Numerorum" от 1919-1925 година ([13],[14],[16],[18]) Харди и Литлууд предлагат нов метод за доказване на разрешимостта на диофантови уравнения, известен като кръгов метод и наречен по-късно метод на Харди-Литлууд. Чрез него те намират ново решение на проблема на Варинг, което дава много по-добра оценка за $s(k)$ от тази, получена от Хилберт в [20]. Техният метод е приложим и за диофантови уравнения от вида

$$G(x_1, x_2, ..., x_s) = N,$$

където G е положително дефинитна квадратична форма с цели коефициенти. Но техните разсъждения не могат да бъдат приложени, когато $s < 5$, в частност разрешимостта на (1.3.1) не може да се установи с метода на Харди-Литлууд в класическата му форма. Освен това при доказателствата на Лагранж и Якоби важна роля играе фактът, че коефициентите пред неизвестните в уравнението (1.3.1) са единици. Оттук възниква въпросът за разрешимост на уравнението

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 = N \tag{1.3.4}$$

за произволни $a_i \in \mathbb{N}$.

Тази задача е решена от Клостерман [27] през 1926 година. Той се възползва от идеите на Харди и Литлууд и предлага усъвършенстван вариант на техния метод известен като Клостерманово подобрение на кръговия метод.

1.4 Методът на Харди-Литлууд

Тук ще изложим сбито идеята на кръговия метод и понятията свързани с него. Накратко ще обясним защо методът на Харди-Литлууд дава резултат в проблема на Варинг с втори степени само за $s \geq 5$. Подробно изложение на метода е дадено в книгите на Вон [36] и на Карацуба [4].

В кръговия метод се използва тривиалното равенство (вж. Лема 1.(iv) в §1.2):

$$\int_0^1 e(\alpha m) \mathrm{d}\alpha = \begin{cases} 0 \text{ , ако } m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \\ 1 \text{ , ако } m = 0. \end{cases}$$

Тогава, ако бележим броя на решенията в естествени числа на уравнението (1.3.3) с $r_{k,s}(N)$, получаваме

(1.4.1)

$$\begin{aligned} r_{k,s}(N) &= \sum_{x_1^k + x_2^k + \cdots + x_s^k = N} 1 = \sum_{x_1,\ldots,x_s \leq N^{1/k}} \int_0^1 e\left((x_1^k + \cdots + x_s^k - N)\alpha\right) \mathrm{d}\alpha \\ &= \int_0^1 \sum_{x_1,\ldots,x_s \leq N^{1/k}} e\left(x_1^k\alpha\right) \ldots e\left(x_s^k\alpha\right) e\left(-N\alpha\right) \mathrm{d}\alpha = \int_0^1 \left[S_k(\alpha)\right]^s e\left(-\alpha N\right) \mathrm{d}\alpha \ , \end{aligned}$$

където

$$S_k(\alpha) = \sum_{x \leq N^{1/k}} e(\alpha x^k) \ .$$

Оттук се вижда, че изследването на $r_{k,s}(N)$ е тясно свързано с изследването на сумата $S_k(\alpha)$. За да илюстрираме някои нейни свойства, нека разгледаме случая

$\alpha = \dfrac{a}{q} \in \mathbb{Q}$. Имаме

$$S_k\left(\frac{a}{q}\right) = \sum_{x \le N^{\frac{1}{k}}} e_q\left(ax^k\right) = \sum_{r(q)} \sum_{\substack{x \le N^{\frac{1}{k}} \\ x \equiv r(q)}} e_q\left(ax^k\right)$$

$$= \sum_{r(q)} \sum_{\substack{x \le N^{\frac{1}{k}} \\ x \equiv r(q)}} e_q\left(ar^k\right) = \sum_{r(q)} e_q\left(ar^k\right) \sum_{\substack{x \le N^{\frac{1}{k}} \\ x \equiv r(q)}} 1 \ .$$

Очевидно

$$\sum_{\substack{x \le N^{\frac{1}{k}} \\ x \equiv r(q)}} 1 = \frac{N^{\frac{1}{k}}}{q} + \mathcal{O}(1) \ .$$

Следователно

$$S_k\left(\frac{a}{q}\right) = \frac{N^{\frac{1}{k}}}{q} \sum_{r(q)} e_q\left(ar^k\right) + \mathcal{O}(q) = \frac{N^{\frac{1}{k}}}{q} S_k(q,a) + \mathcal{O}(q) \ ,$$

където $S_k(q,a) = \sum\limits_{r(q)} e_q\left(ar^k\right)$ е обобщение на сумата на Гаус, дефинирана в (1.1.4).

Когато q е малко в сравнение с $N^{\frac{1}{k}}$ „главният член“ $\dfrac{N^{\frac{1}{k}}}{q} S_k(q,a)$ в горната формула по модул е по-голям от „остатъка“ $\mathcal{O}(q)$ (освен когато $S_k(q,a) = 0$).

Подобна, но малко по-сложна, асимптотична формула за $S_k(\alpha)$ се получава, когато α е „близко“ до рационалното число $\dfrac{a}{q}$ с „малък“ знаменател. (Колко „близко“ до дробта и колко „малък“ знаменател няма да уточняваме.)

За да се възползват от горната идея и да отделят дробите с малки знаменатели, Харди и Литлууд въвеждат разделянето на единичния интервал на *големи дъги* и *малки дъги* по следния начин. За фиксирано достатъчно малко $\delta > 0$ се разглеждат дробите

$$\frac{a}{q} \in \mathbb{Q} \text{ за } 1 \le q \le N^{\delta} \text{ и } 1 \le a \le q, \quad (a,q) = 1$$

и съответно интервалите

$$\mathfrak{M}(q,a) := \left\{ \alpha : \quad \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \le N^{-k+\delta} \right\} \ .$$

При подходящ избор на δ те са два по два непресичащи се. Лесно се вижда, че обединението им

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{\substack{q \le N^\delta \\ 1 \le a \le q \\ (a,q)=1}} \mathfrak{M}(q,a)$$

се съдържа в интервала

$$I = \left(N^{-k+\delta},\ 1 + N^{-k+\delta}\right] \ .$$

Означаваме

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{I} \setminus \mathfrak{M} \ .$$

Множеството $\mathfrak{M}$ се нарича множество на *големите дъги*, а $\mathfrak{m}$ - множество на *малките дъги.* (Да отбележим, че $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{m}$ са обединения на интервали и терминът *дъга* е останал от времето на Харди и Литлууд, които са интегрирали по окръжност в комплексната равнина.)

Като използваме, че подинтегралната функция в най-дясната част на (1.4.1) е периодична с период 1, намираме

$$r_{k,s}(N) = \int\limits_I [S_k(\alpha)]^s \, e\left(-\alpha N\right) \mathrm{d}\alpha = I_{\mathfrak{M}} + I_{\mathfrak{m}} \ ,$$

където

$$I_{\mathfrak{M}} = \int\limits_{\mathfrak{M}} [S_k(\alpha)]^s \, e\left(-\alpha N\right) \mathrm{d}\alpha$$

и

$$I_{\mathfrak{m}} = \int\limits_{\mathfrak{m}} [S_k(\alpha)]^s \, e\left(-\alpha N\right) \mathrm{d}\alpha \ .$$

Върху всяка от големите дъги е в сила асимптотична формула за $S_k(\alpha)$, което дава възможност да бъде намерена асимптотична формула за $I_{\mathfrak{M}}$.

Оказва се, че върху малките дъги модулът на $S_k(\alpha)$ е „малък“. По-точно

$$\sup_{\alpha \in \mathfrak{m}} |S_k(\alpha)| \ll N^{\frac{1}{k} - \delta_1} \ ,$$

където δ_1 е константа зависеща от δ. (Да отбележим, че горната оценка е по-силна от тривиалната оценка $|S_k(\alpha)| \ll N^{\frac{1}{k}}$.) Като се използва този факт и също някои съображения за средната стойност на $S_k(\alpha)$, може да се провери, че $I_{\mathfrak{m}}$ дава пренебрежимо малък остатък в сравнение с $I_{\mathfrak{M}}$ при $s \ge 2^k + 1$.

В крайна сметка се достига до асимптотичната формула

$$r_{k,s}(N) = c(k,s)\sigma_{k,s}(N) N^{\frac{s}{k}-1} + \mathcal{O}(N^{\frac{s}{k}-1-\delta'}) \tag{1.4.2}$$

за фиксирано $\delta' > 0$, зависещо от δ. Тук

$$c(k,s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 e(\gamma x^k) \mathrm{d}x \right)^s e(-\gamma) \mathrm{d}\gamma \ . \tag{1.4.3}$$

е така нареченият *особен интеграл*, чиято стойност се пресмята в явен вид. Ако, както обикновено, бележим с $\Gamma(x)$ Гама-функцията на Ойлер, имаме

$$c(k,s) = \frac{\Gamma\left(1 + 1/k\right)^s}{\Gamma\left(s/k\right)} > 0 \ . \tag{1.4.4}$$

Един начин за пресмятане на горния интеграл е даден в §1, Гл.XI на [4]. По-късно в §3.1 ние ще използваме същия метод за изследване на особения интеграл за нашата задача.

Изразът

$$\sigma_{k,s}(N) = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-s} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} S_k(q,a)^s e_q(-aN) \tag{1.4.5}$$

е *особеният ред* за задачата на Варинг. Абсолютната сходимост на този ред е следствие от наличието на нетривиална оценка за сумата $S_k(q,a)$ (Вж. §2.6 в [36]). Показва се, че за $s \geq 2k+1$ е вярно $\sigma_{k,s}(N) \geq C_1(k,s) > 0$.

Ясно е, че (1.4.2) дава разрешимост на хипотезата на Варинг при $k = 2$ за $s \geq 5$, но за известната от много по-рано и елементарна Теорема на Лагранж за четирите квадрата ($k = 2$, $s = 4$) изложеният метод не дава нетривиален резултат.

1.5 Приносът на Клостерман

Клостерман успява да разбие единичния интервал само на големи дъги и да оцени достатъчно добре приноса на всяка, така че да получи нетривиална информация за уравнението (1.3.4). Съвсем накратко идеята на Клостерман е следната: в кръговия метод в класическия му вид се използва оценка от вида

$$\left| \sum_q \sum_{a(q)*} \alpha_{q,\,a} \right| \leq \sum_q \sum_{a(q)*} |\alpha_{q,\,a}| \ ,$$

а Клостерман използва неравенството

$$\left| \sum_q \sum_{a(q)*} \alpha_{q,\,a} \right| \leq \sum_q \left| \sum_{a(q)*} \alpha_{q,\,a} \right|$$

и съумява да оцени нетривиално вътрешната сума. Това се свежда до оценяване на сумата $K(q,a,b)$, по-късно наречена на негово име, която дефинирахме в (1.1.6).

Очевидно за сумата $K(q,a,b)$ е изпълнена тривиалната оценка

$$|K(q,a,b)| \leq \varphi(q)\ . \tag{1.5.1}$$

Известно е, че $\varphi(q) \gg \frac{q}{\log\log q} \gg q^{1-\varepsilon}$ (Лема 8). Клостерман намира значително по-силна оценка от (1.5.1), а именно за p – просто той доказва, че

$$|K(p,a,b)| \leq Cp^{3/4}, \quad p \nmid ab\ , \tag{1.5.2}$$

където $C > 0$ е константа. Подобна оценка е в сила и за произволно q .

В крайна сметка Клостерман получава асимптотичната формула

$$R_{a_1,\dots,a_4}(N) = \frac{\pi^2}{\sqrt{a_1 \dots a_4}}\sigma^*(N)N + \mathcal{O}(N^{1-\delta}), \quad 0 < \delta < \frac{1}{18}\ ,$$

където $R_{a_1,\dots,a_4}(N)$ е броят на решенията на уравнението (1.3.4) и $\sigma^*(N)$ е особеният ред, съответстващ на това уравнение. Като използва горната формула, Клостерман напълно изследва разрешимостта на (1.3.4) в зависимост от стойностите на $a_1,\dots,a_4$ (вж. §4 в [27]).

Със средства от алгебричната геометрия в [37] Андре Вейл подобрява оценката на Клостерман (1.5.2), като доказва, че

$$|K(p,a,b)| \leq 2p^{1/2}, \quad p \nmid ab,\ p > 2\ . \tag{1.5.3}$$

В [10] Естерман обобщава горните оценки и дава най-силната известна към момента оценка за произволно естествено q (Лема 10):

$$|K(q,a,b)| \leq \tau(q)q^{1/2}(a,b,q)^{1/2}\ . \tag{1.5.4}$$

Нека отбележим, че според Лема 7 имаме $\tau(n) \ll n^{\varepsilon}$, така че когато най-големият общ делител (q,a,b) не е голям, оценката (1.5.4) е много по-добра от (1.5.1) .

Методът на Клостерман е използван успешно в много статии. Тук ще споменем само някои от тях – [5], [8], [11], [21], [22], [23], [39] .

1.6 Решение на (1.3.1) в къс интервал

Целта на настоящата дипломна работа е да се даде подробно изложение на метода на Клостерман, включително доказателството на почти всички спомагателни леми, и този метод да се приложи за решаване на (1.3.1) с неизвестни, лежащи в къс интервал. Под къс интервал разбираме интервала $(x, x+h)$, където $0 < h < x$ и h е много по-малко от x.

Тази задача е разглеждана от Райт в [39] и [40] и от Аулук и Чоула в [6]. Последните автори получават резрешимост на (1.3.1) за $N \not\equiv 0 \pmod 8$ с неизвестни x_i, такива че

$$x_i^2 - \frac{N}{4} = \mathcal{O}(N^{\frac{3}{4}}), \quad i = 1, 2, 3, 4 .$$

В [40] Райт показва, че последният интервал е възможно най-късия в следния смисъл: Ако $f(N) > 0$ е функция, такава че $f(N) \to 0$ при $N \to \infty$, то само за краен брой членове на редицата $N = 4(m^2 + 2m)$, $m \in \mathbb{N}$, уравнението на Лагранж притежава решение с неизвестни x_i удовлетворяващи

$$\left| x_i^2 - \frac{N}{4} \right| < N^{\frac{3}{4}} f(N) .$$

Ние разглеждаме по-голям интервал

$$x_i^2 - \frac{N}{4} = \mathcal{O}(N^{\theta}), \quad i = 1, 2, 3, 4 , \tag{1.6.1}$$

където $\frac{15}{17} < \theta < 1$, и даваме асимптотична формула за сумата Γ дефинирана по-долу в (1.6.6). Тази сума, по същество, е броя на решенията на (1.3.1) в късия интервал (1.6.1), всяко от което е взето с гладко тегло.

В настоящата работа ние не доказваме нов резултат, но излагаме метод, който успешно се използва за доказването на Теорема 2 и Теорема 3, формулирани по-долу.

Нека търсим решения на (1.3.1), които лежат в интервала

$$\Delta := \left(\frac{P}{2} - V, \ \frac{P}{2} + V \right) \tag{1.6.2}$$

за

$$P = \sqrt{N}, \quad V = P^{\theta}, \quad 0 < \theta < 1 . \tag{1.6.3}$$

Нашата цел е да изберем θ възможно най-малко, за да бъде по-къс интервалът (1.6.2). Долната граница на θ ще се определи така, че да сме осигурили решимост на уравнението (1.3.1) с неизвестни $x_i \in \Delta$, $i = 1, \ldots, 4$ за всяко достатъчно голямо N.

Разглеждаме безкрайно гладката диференцируема функция

$$\omega_0(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right) & , \quad t \in (-1, 1) \\ 0 & , \quad t \notin (-1, 1) \ . \end{cases} \tag{1.6.4}$$

Условието, че $x_i \in \Delta$, изразяваме, като въвеждаме тегло - безкрайно гладката функция

$$\omega(x) = \omega_0\left((x - \frac{P}{2})\frac{1}{V}\right) . \tag{1.6.5}$$

Ясно е, че $\omega(x) = 0$ за $x \notin \Delta$ и $\omega(x) > 0$ за $x \in \Delta$. Също така лесно се проверява, че в краищата на интервала Δ производната на $\omega(x)$ от всеки ред е равна на нула.

Разглеждаме сумата

$$\Gamma := \sum_{x_1^2+\dots+x_4^2=N} \omega(x_1)\dots\omega(x_4) . \tag{1.6.6}$$

Със следващата Теорема 1 ще докажем съществуването на асимптотична формула за Γ.

Теорема 1. *Ако* $\frac{15}{17} < \theta < 1$*, за всяко достатъчно голямо естествено число* N *и за всяко* $\varepsilon > 0$ *е в сила асимптотичната формула*

$$\Gamma = \varkappa N^{\theta}\sigma(N) + \mathcal{O}(N^{\frac{11}{8}-\frac{5}{8}\theta+\varepsilon}) , \tag{1.6.7}$$

където

$$\varkappa := \int\limits_{-\infty}^{\infty} e\left(-\frac{N}{V^2}\beta\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_0\left(x - \frac{1}{2}\frac{P}{V}\right)e(\beta x^2)\mathrm{d}x\right)^4 \mathrm{d}\beta \tag{1.6.8}$$

и

$$\sigma(N) := \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} e_q(-aN)S^4(q,a) . \tag{1.6.9}$$

Освен това за особения интеграл (1.6.8) *е изпълнено* $\varkappa \asymp N^{\frac{\theta-1}{2}}$ *и за особения ред* (1.6.9) *е в сила*

$$\frac{1}{2^{\xi_2}\log\log N} \ll \sigma(N) \ll \log\log N ,$$

където $\xi_2 \geq 0$ *е такова, че* $2^{\xi_2}\|N$*. Константата в знака* $\mathcal{O}$ *в* (1.6.7) *зависи от* ε *.*

Оттук лесно се получава, че при N, които се делят на фиксирана степен на 2, броят на решенията на (1.3.1) в къс интервал е между $N^{\frac{3}{2}\theta-\frac{1}{2}-\varepsilon}$ и $N^{\frac{3}{2}\theta-\frac{1}{2}+\varepsilon}$ за произволно малко $\varepsilon > 0$.

Ако N се дели на висока степен на 2, формулата (1.6.7) не дава полезна информация. Това, разбира се, се очаква, тъй като от точната формула (1.3.2) следва, че в този случай броят на решенията на уравнението на Лагранж е малък.

Например, ако $N = 2^k,\ k \geq 3$, уравнението има точно 24 решения в цели числа.

Изложението в настоящата дипломна работа е най-близко до това в статията на Хийт-Браун и Толев [23], която заедно със статията [8] на Брюдерн и Фаври от 1994 е свързана с хипотезата за съществуване на решение на (1.3.1) в прости числа за всички достатъчно големи $N \equiv 4 \pmod{24}$. В горепосочените статии се намират почти прости решения, като така се продължават изследванията от предишни работи по темата ([12], [31], [33]). Най-интересният резултат до момента в тази област е на Бломер и Брюдерн в [7] от 2005, където те показват, че всяко достатъчно голямо естествено N, $N \equiv 3 \pmod{24}$, $5 \nmid N$, може да се представи като сума на 3 квадрата на почти прости числа.

Трябва да отбележим, че проблемът на Варинг-Голдбах за 5 квадрата на прости числа

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = N\ , \tag{1.6.10}$$

където $N \equiv 5 \pmod{24}$, е решен от Хуа [24] още през 1938. Най-добрият резултат за прости решения на уравнението (1.6.10) в къс интервал е на Гуанг Ши Лю от 2006 в [29], където авторът доказва разрешимостта на (1.6.10) в прости числа, удовлетворяващи

$$p_i^2 - \frac{N}{5} = \mathcal{O}(N^{\frac{13}{14}+\varepsilon}), \quad i = 1, \ldots, 5\ .$$

По проблема на Варинг-Голдбах за 4 квадрата с почти прости решения в къс интервал беше докладван следния резултат на конференцията „Пионери на българската математика“ 2006. Схема на доказателството е изложена в кратката статия [28].

Теорема 2. *Предполагаме, че N е достатъчно голямо цяло число, удовлетворяващо $N \equiv 4 \pmod{24}$, θ и γ са константи, такива че*

$$\frac{15}{17} < \theta < 1, \qquad \gamma = \frac{50.08}{17\theta - 15}. \tag{1.6.11}$$

Уравнението (1.3.1) има решение в цели числа x_1, x_2, x_3, x_4, всяко от които е почти просто от ред γ и такива че

$$\left| \frac{1}{2}\sqrt{N} - x_i \right| < N^{\frac{\theta}{2}}, \qquad i = 1, 2, 3, 4\ .$$

Нека $\omega(x)$ е функцията дефинирана в (1.6.5), величината $\varkappa$ е дефинираната в (1.6.8), степента θ удовлетворява (1.6.11) и

$$\sigma(\mathbf{d}, N) := \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{a(q)^*} e\left(-\frac{aN}{q}\right) \prod_{i=1}^{4} S(q, ad_i^2)\ .$$

(Сходимостта и свойствата на този ред се изследват по начин аналогичен на този в §3.2.)

За естествените числа $d_1, \ldots, d_4$ въвеждаме величината

$$E(\mathbf{d}, N) := \sum_{\substack{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=N \\ x_i \equiv 0 \pmod{d_i},\, i=1,\ldots,4}} \omega(x_1)\omega(x_2)\omega(x_3)\omega(x_4) - \varkappa \frac{N^\theta}{d_1 d_2 d_3 d_4} \sigma(\mathbf{d}, N)\ .$$

За доказване на Теорема 2 се използва следната теорема.

Теорема 3. *За* $D \leq N^{\frac{17\theta-15}{32}}$ *имаме*

$$\sum_{d_1,\ldots,d_4 \leq D} \mu^2(d_1) \ldots \mu^2(d_4) \, |E(\boldsymbol{d}, N)| \ll N^{\frac{3}{2}\theta - \frac{1}{2} - \varepsilon}\ .$$

Теорема 2 се получава като се използва Теорема 3 и също методите на решетото. В настоящата дипломна работа няма да обсъждаме това, а ще изложим подробно доказателството на Теорема 1, което е по-просто от това на Теорема 3. Това доказателство илюстрира достатъчно добре метода на Клостерман, а също и доказателството на Теорема 3, което е технически по-сложно.

Глава 2

Доказателство на Теорема 1

В тази глава излагаме подробното доказателство на Теорема 1. Ще започнем с

2.1 Разбиване на *големи дъги*

Според Лема 1.(iv) сумата Γ дефинирана в (1.6.6) може да се запише като

$$\Gamma = \sum_{x_1,\dots,x_4\in\mathbb{Z}} \omega(x_1)\dots\omega(x_4) \int\limits_0^1 e(\alpha(x_1^2+\dots+x_4^2-N))\mathrm{d}\alpha.$$

Използваме Лема 1.(i) и сменяме реда на сумирането и интегрирането. Получаваме

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sum_{x_1,\dots,x_4\in\mathbb{Z}} \omega(x_1)\dots\omega(x_4) \int\limits_0^1 e(\alpha x_1^2)\dots e(\alpha x_4^2)e(-\alpha N))\mathrm{d}\alpha \\ &= \int\limits_0^1 \left(\sum_{x_1\in\mathbb{Z}} \omega(x_1)e(\alpha x_1^2)\right)\dots\left(\sum_{x_4\in\mathbb{Z}} \omega(x_4)e(\alpha x_4^2)\right)e(-\alpha N)d\alpha \\ &= \int\limits_0^1 S^4(\alpha)e(-\alpha N)\mathrm{d}\alpha, \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

където

$$S(\alpha) := \sum_{x\in\mathbb{Z}} \omega(x)e(\alpha x^2). \tag{2.1.2}$$

Тъй като подинтегралната функция в последния интеграл е периодична с период 1, интегрирането може да се вземе по интервала

$$\left(\frac{1}{1+[Q]},\ 1+\frac{1}{1+[Q]}\right], \tag{2.1.3}$$

където Q е параметър, който ще изберем по подходящ начин по-късно при оценките на остатъка в представянето на сумата Γ. Засега считаме, че

$$1 < Q \leq P. \tag{2.1.4}$$

Според Лема 13 интервалът (2.1.3) се разбива на непресичащи се интервали $\mathfrak{L}(q,a)$ дефинирани с (1.2.2) и (1.2.3). Тук виждаме първата разлика с класическия кръгов метод - разделянето само на *големи дъги* ще бъде достатъчно точно, така че няма да се наложи да се оценява приносът на *малките дъги*, каквито изобщо няма.

Вследствие на Лема 13 имаме

$$\Gamma = \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \int_{\mathfrak{L}(q,a)} S^4(\alpha) e(-\alpha N) \mathrm{d}\alpha. \tag{2.1.5}$$

Правим смяна на променливата $\alpha = \dfrac{a}{q} + \beta$, като сега $\beta \in \mathfrak{M}(a,q)$, където

$$\mathfrak{M}(q,a) := \left(-\frac{1}{q(q+q')}, \frac{1}{q(q+q'')}\right]. \tag{2.1.6}$$

Получаваме последователно

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \int_{\mathfrak{M}(q,a)} S^4\left(\frac{a}{q} + \beta\right) e\left(-\left(\frac{a}{q} + \beta\right) N\right) \mathrm{d}\beta \\ &= \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e_q(-aN) \int_{\mathfrak{M}(q,a)} S^4\left(\frac{a}{q} + \beta\right) e(-\beta N) \mathrm{d}\beta. \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Да забележим, че от (1.2.3) следва, че

$$\left[-\frac{1}{2qQ}, \frac{1}{2qQ}\right] \subseteq \mathfrak{M}(q,a) \subset \left[-\frac{1}{qQ}, \frac{1}{qQ}\right] \tag{2.1.8}$$

и в частност

$$|\beta| \leq \frac{1}{qQ}, \quad \text{ако } \beta \in \mathfrak{M}(q,a)\ . \tag{2.1.9}$$

2.2 Асимптотична формула за $S\left(\dfrac{a}{q} + \beta\right)$

Нека разгледаме интегралите

$$J(\beta, u, A) := \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(x - A)\, e\left(\beta x^2 + ux\right) \mathrm{d}x, \tag{2.2.1}$$

$$J(\beta, A) := J(\beta, 0, A). \tag{2.2.2}$$

Тук ще оценим сумата $S\left(\frac{a}{q}+\beta\right)$, с която се изрязава Γ в (2.1.7). По-точно, ще докажем следната

Лема 18. *Нека*

$$|\beta| \le \frac{1}{qQ}, \tag{2.2.3}$$

където $1 \le q \le Q \le P$ *и* $(a, q) = 1$, *и нека за произволно малко* $\varepsilon > 0$

$$M = \frac{P^{1+\varepsilon}}{Q}\ . \tag{2.2.4}$$

Тогава за произволно голямо $B > 0$ *е в сила*

$$S\left(\frac{a}{q}+\beta\right) = \frac{V}{q}\sum_{|n|\le M} S(q, a, n) J(\beta V^2, -\frac{nV}{q}, \frac{1}{2}\frac{P}{V}) + \mathcal{O}(N^{-B}), \tag{2.2.5}$$

където V *е определно от* (1.6.3) *и константата в знака* $\mathcal{O}$ *зависи само от* B *и* ε.

Доказателство: Използвайки дефиницията (2.1.2) и разделяйки целите числа съобразно техните остатъци по модул q, получаваме

$$\begin{aligned} S\left(\frac{a}{q}+\beta\right) &= \sum_{m=0}^{q-1}\sum_{\substack{x\in\mathbb{Z}\\ x\equiv m(q)}} \omega(x) e\left(\frac{a}{q}x^2+\beta x^2\right) \\ &= \sum_{m=0}^{q-1}\sum_{\substack{x\in\mathbb{Z}\\ x\equiv m(q)}} \omega(x) e_q\left(am^2\right) e(\beta x^2) \\ &= \sum_{m=0}^{q-1} e_q\left(am^2\right) Z_m\ , \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

където

$$Z_m = \sum_{\substack{x\in\mathbb{Z}\\ x\equiv m(q)}} \omega(x) e\left(\beta x^2\right)\ . \tag{2.2.7}$$

Преобразуване на Z_m Използваме формулата на Поасон (Лема 2) и преобразуваме

$$Z_m = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \omega(qk+m) e\left(\beta(qk+m)^2\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(qx+m) e\left(\beta(qx+m)^2\right) e(-nx) \mathrm{d}x.$$

Правим смяна на променливата $qx + m = y$; така $x = \dfrac{y}{q} - \dfrac{m}{q}$. Тогава

$$Z_m = \frac{1}{q} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(y) e(\beta y^2) e\left(-n\left(\frac{y}{q} - \frac{m}{q}\right)\right) \mathrm{d}y \tag{2.2.8}$$
$$= \frac{1}{q} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e_q(mn) \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) e\left(\beta x^2 - \frac{nx}{q}\right) \mathrm{d}x.$$

Да разгледаме интеграла в последната сума. Използваме дефиницията (1.6.5) и получаваме:

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) e\left(\beta x^2 - \frac{nx}{q}\right) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0\left(\frac{x}{V} - \frac{1}{2}\frac{P}{V}\right) e\left(\beta x^2 - \frac{nx}{q}\right) \mathrm{d}x.$$

Правим смяна на променливата $\dfrac{x}{V} = y$ и като използваме дефиницията (2.2.1), получаваме

$$I = V \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0\left(y - \frac{1}{2}\frac{P}{V}\right) e\left(\beta V^2 y^2 - \frac{nVy}{q}\right) \mathrm{d}y \tag{2.2.9}$$
$$= VJ\left(\beta V^2, -\frac{nV}{q}, \frac{1}{2}\frac{P}{V}\right).$$

Така от (2.2.8) и (2.2.9) получаваме

$$Z_m = \frac{V}{q} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e_q(mn) J\left(\beta V^2, -\frac{nV}{q}, \frac{1}{2}\frac{P}{V}\right).$$

Да отбележим, че сходимостта на последния ред е следствие на оценката (2.2.12), която ще покажем по-долу.

Заместваме този израз за Z_m в израза (2.2.6), сменяме реда на сумирането и използваме определението (1.1.4). Получаваме

$$S\left(\frac{a}{q} + \beta\right) = \frac{V}{q} \sum_{m(q)} e_q(am^2) \sum_{n \in \mathbb{Z}} e_q(nm) J\left(\beta V^2, -\frac{nV}{q}, \frac{1}{2}\frac{P}{V}\right) \tag{2.2.10}$$
$$= \frac{V}{q} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{m(q)} e_q\left(am^2 + nm\right)\right] J\left(\beta V^2, -\frac{nV}{q}, \frac{1}{2}\frac{P}{V}\right)$$
$$= \frac{V}{q} \sum_{n \in \mathbb{Z}} S(q, a, n) J\left(\beta V^2, -\frac{nV}{q}, \frac{1}{2}\frac{P}{V}\right).$$

Оценка на интеграла J Тук излагаме една лема, с помощта на която ще оценим интеграла J от (2.2.1). Доказателството ѝ ще приложим в края на §2.2.

Лема 19. *Нека* $A \geq 2$.

(i) *За* $u \neq 0$ *и за всяко* $k \in \mathbb{N}$ *е изпълнено*

$$J(\beta, u, A) \ll \frac{1 + |\beta|^k A^k}{|u|^k},$$

където константата в знака $\ll$ *зависи само от* k.

(ii) $J(\beta, u, A) \ll \min\left(1, |\beta|^{-\frac{1}{2}}\right)$.

Според Лема 19.(i) за $\dfrac{nV}{q} \neq 0$, т.е. $n \neq 0$, е изпълнено

$$J := J\left(\beta V^2, -\frac{nV}{q}, \frac{1}{2}\frac{P}{V}\right) \ll_k \frac{1 + |\beta V^2|^k \left|\frac{1}{2}\frac{P}{V}\right|^k}{\left|\frac{nV}{q}\right|^k} \ll q^k \frac{1 + \beta^k V^{2k} \frac{P^k}{V^k}}{|n|^k V^k}$$

Прилагаме неравенството (2.2.3) и получаваме

$$J \ll q^k \frac{1 + \frac{1}{q^k Q^k} V^k P^k}{|n|^k V^k}.$$

В последната оценка искаме да е изпълнено $1 \leq \frac{VP}{qQ}$, т.е. $qQ \leq VP$ за всяко $q \leq Q$, което би следвало от $qQ \leq Q^2 \leq VP$. Оттук получаваме условието

$$Q \leq \sqrt{VP}, \tag{2.2.11}$$

което считаме за изпълнено оттук нататък. То е по-силно от условието $Q \leq P$, което считахме за изпълнено до този момент (вж. (2.1.4)). Тогава

$$J \ll q^k \left(\frac{VP}{qQ}\right)^k \frac{1}{|n|^k V^k} = \left(\frac{P}{Q\,|n|}\right)^k. \tag{2.2.12}$$

За да получим формула (2.2.5) ще използваме (2.2.10) и оценката (2.2.12) за $n \neq 0$.

Ограничаване на областта на сумиране в S Като използваме (2.2.12) и тривиалната оценка за сумата на Гаус $|S(q, a, n)| \leq q$, ще проверим, че приносът на събираемите в дясната част на (2.2.10), за които $|n| > M$, е пренебрежимо малък. Наистина, имаме

$$\begin{aligned} S' &:= \frac{V}{q} \sum_{|n| > M} S(q, a, n) J\left(\beta V^2, -\frac{nV}{q}, \frac{1}{2}\frac{P}{V}\right) \\ &\ll \frac{V}{q} \sum_{n > M} q \left(\frac{P}{Q\,|n|}\right)^k \ll V \left(\frac{P}{Q}\right)^k \sum_{n > M} \frac{1}{n^k}. \end{aligned}$$

Сега използваме Лема 3.(ii) и също неравенствата $V = P^\theta < P$ и $= \dfrac{P^{1+\varepsilon}}{Q} < P^2$ (последното е следствие на $P^{-1+\varepsilon} < 1 < Q$). Получаваме

$$\begin{aligned} S' &\ll V\left(\frac{P}{Q}\right)^k M^{-k+1} = V\left(\frac{P}{Q}\right)^k \frac{P^{-k-k\varepsilon}}{Q^{-k}}.M \\ &= VMP^{-k\varepsilon} \ll P^{3-k\varepsilon}. \end{aligned}$$

Полагаме $k = \left[\dfrac{3+2B}{\varepsilon}\right] + 1$ и стигаме до $S' \ll P^{-2B} = N^{-B}$.

Получихме асимптотичната формула (2.2.5). □

Да продължим с изследването на сумата Γ във вида ѝ (2.1.7). От Лема 18 следва, че подинтегралната функция от втория ред на формула (2.1.7) е равна на

$$\frac{V^4}{q^4}\sum_{|\mathbf{n}|\le M} S(q,a,\mathbf{n}) J\left(\beta V^2, -\frac{\mathbf{n}V}{q}, \frac{1}{2}\frac{P}{V}\right) e(-\beta N) + \mathcal{O}(N^{-B}), \tag{2.2.13}$$

където $B > 0$ е произволно голямо фиксирано число и константата в знака $\mathcal{O}$ зависи само от B и от ε. В последната формула считаме, че $\mathbf{n}$ е четиримерния вектор $(n_1, \dots, n_4)$ и използваме означенията

$$|\mathbf{n}| := \max\left(|n_1|, |n_2|, |n_3|, |n_4|\right), \tag{2.2.14}$$

$$S(q,a,\mathbf{n}) := S(q,a,n_1)\dots S(q,a,n_4), \tag{2.2.15}$$

$$J\left(\beta V^2, -\frac{V\mathbf{n}}{q}, \frac{1}{2}\frac{P}{V}\right) := J\left(\beta V^2, -\frac{Vn_1}{q}, \frac{1}{2}\frac{P}{V}\right)\dots J\left(\beta V^2, -\frac{Vn_4}{q}, \frac{1}{2}\frac{P}{V}\right).$$

Приносът на остатъка S'' в (2.1.7), който се получава при интегрирането на $\mathcal{O}(N^{-B})$ от (2.2.13), е $\mathcal{O}(1)$. Наистина, като използваме (2.1.9), получаваме

$$\begin{aligned} S'' &\ll N^{-B}\sum_{q\le Q}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\int\limits_{\mathfrak{M}(q,a)} \mathrm{d}\beta \ll N^{-B}\sum_{q\le Q}\phi(q)\frac{1}{qQ} \\ &\ll N^{-B+1}\sum_{q\le Q}\frac{1}{q^2} \ll N^{-B+1} \ll 1. \end{aligned}$$

За Γ получаваме

$$\begin{aligned} \Gamma = \sum_{q\le Q}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\sum_{|\mathbf{n}|\le M}\frac{V^4}{q^4} S(q,a,\mathbf{n}) e_q(-aN). \\ .\int\limits_{\mathfrak{M}(q,a)} J\left(\beta V^2, -\frac{V\mathbf{n}}{q}, \frac{1}{2}\frac{P}{V}\right) e(-\beta N)\mathrm{d}\beta + \mathcal{O}(1). \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

Да направим смяна на променливата $\beta V^2 = \gamma$. Тогава

$$\gamma \in \mathfrak{N}(q,a) := \left(-\frac{V^2}{q(q+q')},\ \frac{V^2}{q(q+q'')}\right]. \tag{2.2.17}$$

Тогава от (2.2.16) следва, че

$$\Gamma = \mathcal{G} + \mathcal{O}(1), \tag{2.2.18}$$

където

$$\begin{aligned}\mathcal{G} = V^2 \sum_{q\le Q} q^{-4} \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \sum_{|\mathbf{n}|\le M} S(q,a,\mathbf{n}) e_q\left(-aN\right).\\ \cdot \int\limits_{\mathfrak{N}(q,a)} J\left(\gamma, -\frac{V\mathbf{n}}{q}, \frac{1}{2}\frac{P}{V}\right) e\left(-\frac{\gamma N}{V^2}\right) \mathrm{d}\gamma.\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Тук ще приложим доказателството на Лема 19.

Доказателство: Да докажем твърдението (i). То е аналог на Лема 9 в [23] и се доказва по подобен начин. Като използваме свойствата на функцията $\omega_0(x)$ и като интегрираме по части, виждаме, че

$$\begin{aligned}J(\beta,u,A) &= \int\limits_{A-1}^{A+1} e(ux)\left(e(\beta x^2)\omega_0(x-A)\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\pi i u}\int\limits_{A-1}^{A+1}\left(e(\beta x^2)\omega_0(x-A)\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e(ux)\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\pi i u}\left(\left(e(\beta x^2)\omega_0(x-A)\right)e(ux)\Big|_{A-1}^{A+1} - \int\limits_{A-1}^{A+1} e(ux)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e(\beta x^2)\omega_0(x-A)\right)\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{-1}{2\pi i u}\left(\int\limits_{A-1}^{A+1} e(ux)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e(\beta x^2)\omega_0(x-A)\right)\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

Тук използваме, че функцията $\omega_0(x-A)$, както и всички нейни производни, е равна на нула при $x = A-1$ и $x = A+1$. Като интегрираме по части неколкократно по описания по-горе начин получаваме

$$\begin{aligned}J(\beta,u,A) &= \left(\frac{-1}{2\pi i u}\right)^k \int\limits_{A-1}^{A+1} e(ux)\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(e(\beta x^2)\omega_0(x-A)\right)\mathrm{d}x\\ &\ll |u|^{-k} \max_{x\in[A-1,A+1]}\left|\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(e(\beta x^2)\omega_0(x-A)\right)\right|.\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

За оценка на горната максимална стойност ще използваме формулата на Лайбниц за производна на произведение на две функции. Получаваме

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(e(\beta x^2)\omega_0(x-A)\right) = \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\frac{\mathrm{d}^\nu}{\mathrm{d}x^\nu}e(\beta x^2)\frac{\mathrm{d}^{(k-\nu)}}{\mathrm{d}x^{(k-\nu)}}\omega_0(x)$$

$$\ll \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\left|\frac{\mathrm{d}^\nu}{\mathrm{d}x^\nu}e(\beta x^2)\right| \ll_k \sum_{\nu=0}^{k}\left|\frac{\mathrm{d}^\nu}{\mathrm{d}x^\nu}e(\beta x^2)\right|. \tag{2.2.21}$$

В последния знак $\ll$ константата зависи само от k.
От (2.2.21) и (2.2.20) следва

$$J(\beta,u,A) \ll |u|^{-k} \max_{\substack{x\in[A-1,A+1]\\ 0\le l\le k}}\left|\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}e(\beta x^2)\right|. \tag{2.2.22}$$

Ясно е, че се нуждаем от оценка на производната в дясната част на (2.2.22) за всяко l, където $0 \le l \le k$.

По индукция ще проверим, че

$$\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}e(\beta x^2) \ll \sum_{0\le i\le \frac{l}{2}} |\beta|^{l-i}\, x^{l-2i}. \tag{2.2.23}$$

Да положим

$$\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}e(\beta x^2) =: e(\beta x^2)H_l(\beta,x),$$

като вида на полинома $H_l(\beta,x)$ ще намерим от рекурентната формула, която получваме при диференцирането в горното равенство:

$$H_{l+1}(\beta,x) = 4\pi i\beta x H_l(\beta,x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H_l(\beta,x). \tag{2.2.24}$$

Ще покажем, че съществуват комплексни числа α_{il}, такива че е изпълнено тъждеството

$$H_l(\beta,x) = \sum_{0\le i\le \frac{l}{2}} \alpha_{il}\beta^{l-i}x^{l-2i}, \tag{2.2.25}$$

което ще ни даде (2.2.23).

Ясно е, че $H_0(\beta,x) = 1$, така че (2.2.25) е вярно за $l = 0$. Ако допуснем, че е вярно за някое l, то като използваме (2.2.24), намираме

$$\begin{aligned}
H_{l+1}(\beta,x) &= \sum_{0\le i\le \frac{l}{2}} \alpha_{il}\beta^{l-i}x^{l-2i}.4\pi i\beta x + \sum_{0\le i<\frac{l}{2}} \alpha_{il}\beta^{l-i}(l-2i)x^{l-2i-1} \\
&= \sum_{0\le i\le \frac{l}{2}} 4\pi i\alpha_{il}\beta^{l+1-i}x^{l+1-2i} + \sum_{0\le i<\frac{l}{2}} \alpha_{il}(l-2i)\beta^{l+1-(i+1)}x^{l+1-2(i+1)} \\
&= \sum_{0\le i\le \frac{l}{2}} 4\pi i\alpha_{il}\beta^{l+1-i}x^{l+1-2i} + \sum_{1\le i<\frac{l}{2}} \alpha_{i-1,\,l}(l-2(i-1))\beta^{l+1-i}x^{l+1-2i} \\
&= 4\pi i\alpha_{0l}\beta^{l+1}x^{l+1} + \sum_{1\le i\le \frac{l}{2}} \left[4\pi i\alpha_{il} + (l+2-2i)\alpha_{i-1,\,l}\right]\beta^{l+1-i}x^{l+1-2i} + \\
&\qquad + \sum_{\frac{l}{2}<i<\frac{l}{2}+1} \alpha_{i-1,\,l}(l+2-2i)\beta^{l+1-i}x^{l+1-2i} \\
&= \sum_{0\le i\le \frac{l+1}{2}} \alpha_{i,\,l+1}\beta^{l+1-i}x^{l+1-2i},
\end{aligned}$$

където $\alpha_{i,\,l+1}$ се определят по очевиден начин чрез величините α_{il}. Така доказахме (2.2.25).

Следователно, ако $x \in [A-1, A+1]$ и $A \ge 2$, според (2.2.23) е изпълнено

$$\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}e(\beta x^2) \ll \sum_{0\le i\le \frac{l}{2}} |\beta|^{l-i}\, x^{l-2i} \ll \sum_{0\le i\le \frac{l}{2}} |\beta|^{l-i}\, A^{l-2i}\,.$$

Сега вече можем да се върнем на оценката (2.2.22). В случая $|\beta|\, A \ge 1$, като си припомним, че $A \ge 2$, имаме $|\beta|^{l-i}\, A^{l-2i} \ll |\beta|^{l-i}\, A^{l-i}$. Тогава е в сила оценката

$$\begin{aligned}
J(\beta,u,A) &\ll |u|^{-k}\left(|\beta|^{k}\, A^{k} + |\beta|^{k-1}\, A^{k-1} + ... + |\beta|\, A + 1\right) \\
&\ll |u|^{-k}\left(1 + |\beta|^{k}\, A^{k}\right).
\end{aligned} \tag{2.2.26}$$

При $|\beta|\, A < 1$ всички степени на $|\beta|\, A$ са по-малки от единица, така че със сигурност отново е изпълнено (2.2.26). С това доказахме (i).

Да разгледаме твърдението в (ii). Горната граница 1 в израза $\min\left(1, |\beta|^{-\frac{1}{2}}\right)$ е тривиална:

$$J(\beta,u,A) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_0(x-A)e(\beta x^2 + ux)\mathrm{d}x \le \int\limits_{A-1}^{A+1} |\omega_0(x-A)|\, \mathrm{d}x \ll 1. \tag{2.2.27}$$

Другата горна граница $|\beta|^{-\frac{1}{2}}$, която по-късно в изложението ще ни е нужна при $|\beta| > 1$, се получава като приложим директно Следствие 2 от §1, гл.III на [2]. □

2.3 Изследване на $\mathcal{G}$

Нека да забележим, че от (2.1.8) и (2.2.17) следва, че интервалът $\mathfrak{N}(q,a)$ удовлетворява включванията

$$\left[-\frac{V^2}{2qQ},\ \frac{V^2}{2qQ}\right] \subseteq \mathfrak{N}(q,a) \subset \left[-\frac{V^2}{qQ},\ \frac{V^2}{qQ}\right]. \tag{2.3.1}$$

Ето защо можем да разделим $\mathcal{G}$ на две части

$$\mathcal{G} = \Gamma' + \Gamma'', \tag{2.3.2}$$

където в Γ' интегрирането е по γ, такива че

$$|\gamma| \leq \frac{V^2}{2qQ}\ . \tag{2.3.3}$$

Съответно в Γ'' интегрирането е по γ , такива че

$$\frac{V^2}{2qQ} < |\gamma|\,, \quad \gamma \in \mathfrak{N}(q,a)\ . \tag{2.3.4}$$

Тъй като областта на интегриране в Γ' не зависи от a, изследването на тази сума е по-просто от това за Γ''. За оценката на Γ'' ще приложим следната Лема 20. Тази лема, макар и в по-различна форма, се използва от много автори, като се започне от Клостерман. В този си вид обаче лемата не се среща в литературата, поради което прилагаме нейното подробно доказателство.

Лема 20. *Съществува такава комплекснозначна функция $\sigma(\nu,q,\beta)$ дефинирана за $q\in\mathbb{N}$, $q\leq Q$, $\nu\in\mathbb{Z}$, $-\frac{q}{2}<\nu\leq\frac{q}{2}$ и $\beta\in\mathbb{R}$, $|\beta|\leq\frac{V^2}{qQ}$, че са изпълнени условията*

- *(i) за фиксирани ν и q функцията $\sigma(\nu,q,\beta)$ е ограничена и частично непрекъсната по отношение на β ;*
- *(ii) $|\sigma(\nu,q,\beta)| \leq \frac{1}{1+|\nu|}$;*
- *(iii) за всяко $a\in\mathbb{Z}$ и $(a,q)=1$ е изпълнено*

$$\sum_{-\frac{q}{2}<\nu\leq\frac{q}{2}} e_q\left(\overline{a}\nu\right)\sigma(\nu,q,\beta) = \begin{cases} 1 \quad , & \text{ако } \beta\in\mathfrak{N}(q,a)\ ; \\ 0 \quad , & \text{в противен случай}\ . \end{cases}$$

Интервалът $\mathfrak{N}(q,a) = \left(-\frac{V^2}{q(q+q')},\ \frac{V^2}{q(q+q'')}\right]$ *е този, дефиниран с* (2.2.17) *и* (1.2.3).

Доказателство: Разглеждаме следните случаи.

1 сл. $\beta \in \left[-\frac{V^2}{q(q+Q)}, \frac{V^2}{q(q+Q)}\right]$.

Тогава полагаме

$$\sigma(\nu, q, \beta) = \begin{cases} 1 & , \quad \nu = 0\ ; \\ 0 & , \quad \nu \neq 0\ . \end{cases} \tag{2.3.5}$$

2 сл. $\beta \in \left(\frac{V^2}{q(q+Q)}, \frac{V^2}{qQ}\right]$.

Полагаме

$$\sigma(\nu, q, \beta) = \frac{1}{q} \sum_{Q < m \leq \frac{V^2}{q\beta}} e_q(m\nu). \tag{2.3.6}$$

3 сл. $\beta \in \left[-\frac{V^2}{qQ}, -\frac{V^2}{q(q+Q)}\right)$.

Полагаме

$$\sigma(\nu, q, \beta) = \frac{1}{q} \sum_{Q < m \leq \frac{V^2}{q(-\beta)}} e_q(-m\nu). \tag{2.3.7}$$

Очевидно (i) е изпълнено.

Твърдението (ii) в **1 сл.** е очевидно изпълнено. Ще използваме Лема 14, за да покажем (ii) във **2 сл.**. За $\nu \neq 0$ имаме

$$|\sigma(\nu, q, \beta)| \leq \frac{1}{q} \left| \sum_{Q < m \leq \frac{V^2}{q\beta}} e_q(m\nu) \right| \leq \frac{1}{q} \frac{1}{2\|\frac{\nu}{q}\|} = \frac{1}{2q\left|\frac{\nu}{q}\right|} = \frac{1}{2\,|\nu|} \leq \frac{1}{1 + |\nu|}\ .$$

За $\nu = 0$ имаме

$$|\sigma(\nu, q, \beta)| \leq \frac{1}{q} \left| \sum_{Q < m \leq \frac{V^2}{q\beta}} 1 \right| \leq \frac{1}{q} \sum_{Q < m \leq Q+q} 1 = 1 = \frac{1}{1 + |\nu|}\ .$$

В **3 сл.** се разсъждава по същия начин, за да се покаже (ii).

Твърдението (iii) е очевидно за **1 сл.**. Нека сега проверим (iii) във **2 сл.**. Да въведем сумата

$$T(q, \beta) = \sum_{-\frac{q}{2} < \nu \leq \frac{q}{2}} e_q(\overline{a}\nu) \frac{1}{q} \sum_{Q < m \leq \frac{V^2}{q\beta}} e_q(m\nu).$$

Тогава

$$T(q,\beta) = \sum_{Q<m\le \frac{V^2}{q\beta}} A\ ,$$

където

$$A = \frac{1}{q} \sum_{-\frac{q}{2}<\nu\le\frac{q}{2}} e_q\left((\overline{a}+m)\nu\right)\ .$$

Но според Лема 1.(iii)

$$A = \begin{cases} 1 & , \text{ ако } \overline{a}+m \equiv 0 \pmod q\ ; \\ 0 & , \text{ в противен случай}\ . \end{cases}$$

Сравнението $\overline{a}+m \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ q)$ е еквивалентно на

$$m \equiv -\overline{a} \equiv q'' \pmod q\ . \tag{2.3.8}$$

Понеже $Q < m \le \frac{V^2}{q\beta} \le Q+q$ и по условие $Q < q+q'' \le Q+q$, то (2.3.8) е изпълнено най-много за едно m, точно когато $m = q+q''$. Тогава $A = 1$. От друга страна в този случай $Q < m = q+q'' \le \dfrac{V^2}{q\beta}$. Оттук следва, че $\beta \le \dfrac{V^2}{q(q+q'')}$.

Получихме, че $T(q,\beta) = 1$ точно когато $\beta \in \mathfrak{N}(q,a)$. В противен случай $T(q,\beta) = 0$. Това доказва (iii) във **2 сл.**.

За доказателството на (iii) в **3 сл.** разсъждаваме аналогично като по-горе. Сега разглеждаме

$$R(q,\beta) = \sum_{Q<m\le \frac{V^2}{q\beta}} B\ ,$$

където

$$B = \frac{1}{q} \sum_{-\frac{q}{2}<\nu\le\frac{q}{2}} e_q\left((\overline{a}-m)\nu\right)\ .$$

Изълнено е

$$B = \begin{cases} 1 & , \text{ ако } \overline{a}-m \equiv 0 \pmod q\ ; \\ 0 & , \text{ в противен случай}\ . \end{cases}$$

Сега сравнението $\overline{a}-m \equiv 0\,(\mathrm{mod}\ q)$ е еквивалентно на $m \equiv \overline{a} \equiv q' \ (\mathrm{mod}\ q)$ и единсвтеното m, за което това би могло да се случи в интервала $Q < q+q',\ m \le q+Q$ е $m = q+q'$. Оттук $Q < q+q' < \dfrac{V^2}{q(-\beta)}$ и $\beta > -\dfrac{V^2}{q(q+q')}$, т.е. $\beta \in \mathfrak{N}(q,a)$. □

2.4 Оценка на Γ''

От дефиницията (2.3.4) на Γ'' знаем, че

$$\Gamma'' = V^2 \sum_{q\le Q} q^{-4} \sum_{|\mathbf{n}|\le M} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e_q(-aN) S(q,a,\mathbf{n}) \int\limits_{\substack{\frac{V^2}{2qQ}<|\beta| \\ \beta\in\mathfrak{N}(q,a)}} e\left(-\frac{N\beta}{V^2}\right) J(\beta, -\frac{V\mathbf{n}}{q}, \frac{1}{2}\frac{P}{V}) \mathrm{d}\beta\ .$$

Сменяме реда на сумирането по a и интегрирането, като използваме (2.3.1), и като използваме Лема 20.(iii), получаваме

$$\Gamma'' = \ldots \int\limits_{\frac{V^2}{2qQ}<|\beta|<\frac{V^2}{qQ}} \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1\\ \beta\in\mathfrak{N}(q,a)}}^{q} \ldots$$

$$= \ldots \int\limits_{\frac{V^2}{2qQ}<|\beta|<\frac{V^2}{qQ}} \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \sum_{-\frac{q}{2}<\nu\leq\frac{q}{2}} \sigma(\nu,q,\beta)e_q(\overline{a}\nu)\ldots$$

Разписано по-подробно имаме

$$\Gamma'' = V^2\sum_{q\leq Q} q^{-4}\sum_{|\mathbf{n}|\leq M}\int\limits_{\frac{V^2}{2qQ}<|\beta|<\frac{V^2}{qQ}} \sum_{-\frac{q}{2}\leq\nu\leq\frac{q}{2}}\sigma(\nu,q,\beta).\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} e_q(\overline{a}\nu - aN)S(q,a,\mathbf{n})$$
$$.e\left(-\frac{N\beta}{V^2}\right)J(\beta,-\frac{V\mathbf{n}}{q},\frac{1}{2}\frac{P}{V})\mathrm{d}\beta\ .$$

Като използваме оценката от Лема 20.(ii) и означението

$$V(q,\nu,N,\mathbf{n}) := \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} e_q(\overline{a}\nu - aN)S(q,a,\mathbf{n}) \tag{2.4.1}$$

получаваме

$$\Gamma'' \ll V^2\sum_{q\leq Q} q^{-4}\sum_{|\mathbf{n}|\leq M}\sum_{|\nu|\leq q}\frac{1}{1+|\nu|}\left|V(q,\nu,N,\mathbf{n})\right|$$
$$.\int\limits_{\frac{V^2}{2qQ}<|\beta|<\frac{V^2}{qQ}}\left|J(\beta,-\frac{V\mathbf{n}}{q},\frac{1}{2}\frac{P}{V})\right|d\beta\ . \tag{2.4.2}$$

Сега използваме Лема 19.(ii) за оценката на интеграла в последния ред. Получаваме, че

$$\int\limits_{\frac{V^2}{2qQ}<|\beta|<\frac{V^2}{qQ}}\left|J(\beta,-\frac{V\mathbf{n}}{q},\frac{1}{2}\frac{P}{V})\right|\mathrm{d}\beta \ll \int\limits_{\frac{V^2}{2qQ}<\beta<\frac{V^2}{qQ}}|\beta|^{-2}\,\mathrm{d}\beta \ll \frac{qQ}{V^2}\ .$$

Тогава

$$\Gamma'' \ll Q\sum_{q\leq Q} q^{-3}\sum_{|\mathbf{n}|\leq M}\sum_{|\nu|\leq q}\frac{1}{1+|\nu|}\left|V(q,\nu,N,\mathbf{n})\right|\ . \tag{2.4.3}$$

Сега за оценката на $V(q,\nu,N,\mathbf{n})$ ще приложим Лема 21, която формулираме тук, а доказателството ѝ излагаме в §2.5.

Лема 21. *Нека $q = 2^l q_1$ за $l \geq 0$ и $2 \nmid q_1$. Тогава е в сила оценката*

$$V(q,\nu,N,\boldsymbol{n}) \ll 2^{3l} q_1^{\frac{5}{2}+\varepsilon}(q_1,N)^{\frac{1}{2}}\ .$$

Полагаме $q = 2^l q_1$, където $2 \nmid q_1$. Сумата по q представяме като двойна сума, в която сумирането е по всички $l \in \mathbb{Z},\ l \geq 0$ и нечетни q_1, такива че $2^l q_1 \leq Q$. Този подход ще бъде използван още няколко пъти, като се уговаряме да не даваме обяснения оттук нататък. От Лема 21 следва оценката

$$\Gamma'' \ll Q \sum_{2^l q_1 \leq Q} (2^l q_1)^{-3} \sum_{|\mathbf{n}| \leq M} 2^{3l} q_1^{\frac{5}{2}+\varepsilon}(q_1,N)^{\frac{1}{2}} \sum_{|\nu| \leq 2^l q_1} \frac{1}{1+|\nu|}\ .$$

От Лема 3.(i) следва, че

$$\sum_{|\nu| \leq 2^l q_1} \frac{1}{1+|\nu|} \ll \log(2^l q_1) \ll Q^{\varepsilon}.$$

Тогава

$$\begin{aligned}\Gamma'' &\ll Q^{1+\varepsilon} \sum_{2^l q_1 \leq Q} (2^l q_1)^{-3} \sum_{|\mathbf{n}| \leq M} 2^{3l} q_1^{\frac{5}{2}+\varepsilon}(q_1,N)^{\frac{1}{2}}.\\ &\ll Q^{1+\varepsilon} \sum_{q_1 \leq Q} q_1^{-\frac{1}{2}}(q_1,N)^{\frac{1}{2}} \sum_{2^l \leq Q} 1 \sum_{|\mathbf{n}| \leq M} 1.\end{aligned}$$

Очевидно

$$\sum_{2^l \leq Q} 1 \ll \log Q \ll Q^{\varepsilon}, \qquad \sum_{|\mathbf{n}| \leq M} 1 \ll M^4\ . \tag{2.4.4}$$

Ето защо

$$\Gamma'' \ll Q^{1+\varepsilon} M^4 \sum_{q \leq Q} q^{-\frac{1}{2}}(q,N)^{\frac{1}{2}}.$$

За последната сума ще приложим Лема 16. Получаваме оценката

$$\Gamma'' \ll Q^{1+\varepsilon} M^4 Q^{\frac{1}{2}} N^{\varepsilon} = Q^{\frac{3}{2}+\varepsilon} M^4 N^{\varepsilon} = Q^{\frac{3}{2}+\varepsilon} P^{4+\varepsilon} Q^{-4} N^{\varepsilon} \ll P^{4+\varepsilon} Q^{-\frac{5}{2}}, \tag{2.4.5}$$

защото от (2.2.11) имаме $Q \leq \sqrt{PV} \leq P \leq N$, $N^{\varepsilon} \ll P^{\varepsilon}$ и по дефиниция (2.2.4) имаме $M = \dfrac{P^{1+\varepsilon}}{Q}$.

2.5 Оценка на сумата $V(q, \nu, N, \mathbf{n})$

Първо ще формулираме няколко помощни леми:

Лема 22. *Ако е изпълнено* $(q_1, q_2) = (a_1, q_1) = (a_2, q_2) = 1$, *то за* $m \in \mathbb{Z}$ *е в сила равенството*

$$e_{q_1q_2}\left(\overline{(a_1q_2 + a_2q_1)}m\right) = e_{q_1}\left(\overline{a_1q_2^2}m\right)e_{q_2}\left(\overline{a_2q_1^2}m\right).$$

Доказателство: Достатъчно е да докажем, че

$$\overline{(a_1q_2 + a_2q_1)}_{q_1q_2} \equiv \overline{(a_1q_2^2)}_{q_1}q_2 + \overline{(a_2q_1^2)}_{q_2}q_1 \pmod{q_1q_2}. \tag{2.5.1}$$

Разглеждаме произведението

$$(a_1q_2 + a_2q_1)\left(\overline{(a_1q_2^2)}_{q_1}q_2 + \overline{(a_2q_1^2)}_{q_2}q_1\right) \equiv A \pmod{q_1q_2},$$

където

$$A \equiv a_1q_2^2\overline{(a_1q_2^2)}_{q_1} + a_2q_1^2\overline{(a_2q_1^2)}_{q_2} \pmod{q_1q_2}.$$

Очевидно имаме изпълнени сравненията $A \equiv 1 \pmod{q_1}$ и $A \equiv 1 \pmod{q_2}$. Тъй като q_1 и q_2 са взаимно прости, то $A \equiv 1 \pmod{q_1q_2}$. Оттук следва (2.5.1), което доказва лемата. □

Ще докажем, че сумата $V(q, \nu, N, \mathbf{n})$ дефинирана в (2.4.1) притежава мултипликативност в следния смисъл:

Лема 23. *Нека* $q = q_1q_2$, *като* $(q_1, q_2) = 1$. *Тогава е изпълнено равенството*

$$V(q, \nu, N, \boldsymbol{n}) = V(q_1, \nu, (\overline{q_2})^2_{q_1}N, \boldsymbol{n})V(q_2, \nu, (\overline{q_1})^2_{q_2}N, \boldsymbol{n}).$$

Доказателство: Използваме Лема 6 и дефиницията (2.4.1). Получаваме

$$V(q, \nu, N, \mathbf{n}) = \sum_{\substack{a_1=1 \\ (a_1,q_1)=1}}^{q_1}\sum_{\substack{a_2=1 \\ (a_2,q_2)=1}}^{q_2} e_{q_1q_2}\left(\overline{(a_2q_1 + a_1q_2)}\nu - (a_2q_1 + a_1q_2)N\right). \tag{2.5.2}$$
$$.S(q_1q_2, a_2q_1 + a_1q_2, \mathbf{n}).$$

Според Лема 11.(i) за сумата на Гаус е изпълнено тъждеството

$$S(q_1q_2, a_2q_1 + a_1q_2, n_i) = S(q_1, a_1q_2^2, n_i)S(q_2, a_2q_1^2, n_i).$$

Следователно, като имаме предвид (2.2.15), виждаме, че

$$S(q_1q_2, a_2q_1 + a_1q_2, \mathbf{n}) = S(q_1, a_1q_2^2, \mathbf{n})S(q_2, a_2q_1^2, \mathbf{n}).$$

Като използваме и Лема 22 в (2.5.2) виждаме, че

$$\begin{aligned}
V(q,\nu,N,\mathbf{n}) = & \sum_{\substack{a_1=1\\(a_1,q_1)=1}}^{q_1} \sum_{\substack{a_2=1\\(a_2,q_2)=1}}^{q_2} e_{q_1q_2}\left(\overline{(a_2q_1+a_1q_2)}\nu-(a_2q_1+a_1q_2)N\right). \\
& \qquad .S(q_1,a_1q_2^2,\mathbf{n})S(q_2,a_2q_1^2,\mathbf{n}) \\
= & \sum_{\substack{a_1=1\\(a_1,q_1)=1}}^{q_1} \sum_{\substack{a_2=1\\(a_2,q_2)=1}}^{q_2} e_{q_1}\left(\overline{a_1q_2^2}\nu-a_1N\right) e_{q_2}\left(\overline{a_2q_1^2}\nu-a_2N\right). \\
& \qquad .S(q_1,a_1q_2^2,\mathbf{n})S(q_2,a_2q_1^2,\mathbf{n}) \\
= & \sum_{\substack{a_1=1\\(a_1,q_1)=1}}^{q_1} e_{q_1}\left(\overline{(a_1q_2^2}\nu-a_1q_2^2.\overline{q_2^2}N\right) S(q_1,a_1q_2^2,\mathbf{n}) \\
& \qquad . \sum_{\substack{a_2=1\\(a_2,q_2)=1}}^{q_2} e_{q_2}\left(\overline{a_2q_1^2}\nu-a_2q_1^2.\overline{q_1^2}N\right) S(q_2,a_2q_1^2,\mathbf{n}).
\end{aligned}$$

В последните две суми сумирането се извършва по всички a_1, съответно a_2, които пробягват редуцирана система по модул q_1(съответно по модул q_2). Но $(q_1,a_1)=(q_2,a_2)=(q_1,q_2)=1$ и следователно $(a_1q_2^2,q_1)=(a_2q_1^2,q_2)=1$. Според Лема 5 изразите $a_1q_2^2$, съответно $a_2q_1^2$, пробягват също редуцирана система остатъци съответно по модули q_1 и q_2. Следователно

$$V(q,\nu,N,\mathbf{n}) = V(q_1,\nu,(\overline{q_2})_{q_1}^2 N,\mathbf{n})V(q_2,\nu,(\overline{q_1})_{q_2}^2 N,\mathbf{n}),$$

с което лемата е доказана. □

Тук доказваме Лема21 – тя дава същата оценка на израза $V(q,\nu,N,\mathbf{n})$ като в §8 на [11] и Лема 1 от [8]. Разликата е, че когато q е степен на 2, прилагаме тривиална оценка, която ще ни бъде достатъчна. (По този начин се опитваме да намалим броя на недоказаните твърдения, които използваме наготово.)

Доказателство: (Лема21) Според Лема 23 достатъчно е да докажем оценките

$$V(2^l,\nu,N_1,\mathbf{n}) \ll 2^{3l} \tag{2.5.3}$$

за $N_1 \equiv (\overline{q_1})_{2^l}^2 N \pmod{2^l}$ и

$$V(q_1,\nu,N_2,\mathbf{n}) \ll (q_1)^{\frac{5}{2}+\varepsilon}(q_1,N)^{\frac{1}{2}} \tag{2.5.4}$$

за $N_2 \equiv \left(\overline{2^l}\right)_{q_1}^2 N \pmod{q_1}$ при $q_1 \not\equiv 0 \pmod 2$.

Да пристъпим към доказване на (2.5.3) .

В този случай използваме Лема 11.(iii) и получаваме

$$\left|V(2^l,\nu,N_1,\mathbf{n})\right| = \left|\sum_{\substack{a=1\\(a,2^l)=1}}^{2^l} e_{2^l}\left(\overline{a}\nu - aN_1\right) S(2^l,a,\mathbf{n})\right| \le \sum_{\substack{a=1\\(a,2^l)=1}}^{2^l} \left|S(2^l,a,\mathbf{n})\right|$$

$$\le \sum_{\substack{a=1\\(a,2^l)=1}}^{2^l} \left(2.2^{\frac{l}{2}}\right)^4 \ll \sum_{a=1}^{2^l} 2^{2l} \ll 2^{3l}\,.$$

Сега да докажем (2.5.4). Използваме Лема 11.(iv). Имаме

$$\begin{aligned} V(q_1,\nu,N_2,\mathbf{n}) = \sum_{\substack{a=1\\(a,q_1)=1}}^{q_1} e_{q_1}\left(\overline{a}\nu - aN_2\right) S(q_1,a,\mathbf{n}) &= \sum_{\substack{a=1\\(a,q_1)=1}}^{q_1} e_{q_1}\left(\overline{a}\nu - aN_2\right). \\ &\cdot \prod_{i=1}^{4}\left[e_{q_1}\left(-\overline{4a}n_i^2\right)\left(\frac{a}{q_1}\right)S(q_1,1)\right] \\ = \sum_{\substack{a=1\\(a,q_1)=1}}^{q_1} e_{q_1}\left(\overline{a}\nu - aN_2\right) e_{q_1}\left(-\overline{4a}\left(n_1^2+\cdots+n_4^2\right)\right) S^4(q_1,1) \\ = S^4(q_1,1)\sum_{\substack{a=1\\(a,q_1)=1}}^{q_1} e_{q_1}\left[\overline{a}\left(\nu - a\overline{4a}(n_1^2+\cdots+n_4^2)\right) - aN_2\right] \\ = S^4(q_1,1)K(q_1,\nu-\overline{4}(n_1^2+\cdots+n_4^2),-N_2), \end{aligned}$$

където последната сума K е сумата на Клостерман.

За стойността на $S^4(q_1,1)$ използваме Лема 11.(v), а за оценка на сумата на Клостерман използваме Лема 10. Получаваме

$$|V(q_1,\nu,N_2,\mathbf{n})| \le \left(q_1^{\frac{1}{2}}\right)^4 \tau(q_1)q_1^{\frac{1}{2}}(q_1,N_2)^{\frac{1}{2}}\ ,$$

защото $(q_1,N_2) \ge \left(q_1,N_2,\nu-\overline{4}(n_1^2+\cdots+n_4^2)\right)$. Като използваме, че $(q_1,\,N_2) = (q_1,\,N)$ и Лема 7, получаваме

$$|V(q_1,\nu,N_2,\mathbf{n})| \ll (q_1)^{\frac{5}{2}+\varepsilon}(q_1,N)^{\frac{1}{2}}.$$

Така доказваме (2.5.4), а с това и лемата. □

2.6 Изследване на Γ'

Другата сума, която ще разгледаме е

$$\Gamma' = V^2 \sum_{q \le Q} q^{-4} \sum_{|\mathbf{n}| \le M} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e_q\left(-aN\right) S(q,a,\mathbf{n}). \cdot \int\limits_{|\beta| \le \frac{V^2}{2qQ}} e\left(-\frac{N}{V^2}\beta\right) J(\beta, -\frac{V\mathbf{n}}{q}, \frac{1}{2}\frac{P}{V}) \mathrm{d}\beta \,. \tag{2.6.1}$$

Разделяме Γ' на две части:

$$\Gamma' = \Gamma^{(0)} + \Gamma^{(*)} \,, \tag{2.6.2}$$

където $\Gamma^{(0)}$ е приносът на събираемите, за които

$$\mathbf{n} = \mathbf{0} \,, \tag{2.6.3}$$

а в $\Gamma^{(*)}$ сумирането е по $\mathbf{n}$, удовлетворяващи

$$\mathbf{n} \neq \mathbf{0} \,. \tag{2.6.4}$$

Нека първо оценим $\Gamma^{(*)}$.

2.6.1 Оценка на $\Gamma^{(*)}$

Като използваме определението на $V(q, \upsilon, N, \mathbf{n})$ в (2.4.1) имаме

$$\begin{aligned} \Gamma^{(*)} &= V^2 \sum_{q \le Q} q^{-4} \sum_{\substack{|\mathbf{n}| \le M \\ \mathbf{n} \neq \mathbf{0}}} V(q,0,N,\mathbf{n}) \int\limits_{|\beta| \le \frac{V^2}{2qQ}} e\left(-\frac{N}{V^2}\beta\right) J(\beta, -\frac{V\mathbf{n}}{q}, \frac{1}{2}\frac{P}{V}) \mathrm{d}\beta \\ &\ll V^2 \sum_{q \le Q} q^{-4} \sum_{\substack{|\mathbf{n}| \le M \\ \mathbf{n} \neq \mathbf{0}}} |V(q,0,N,\mathbf{n})| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| J(\beta, -\frac{V\mathbf{n}}{q}, \frac{1}{2}\frac{P}{V}) \right| \mathrm{d}\beta \,. \end{aligned} \tag{2.6.5}$$

За оценката на интеграла в последната сума ще използваме следната

Лема 24. *За* $|\boldsymbol{u}| = \max(u_1, \ldots, u_4) > 0$*,* $A \ge 2$ *и за произволно* $\varepsilon > 0$ *е изпълнено*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |J(\beta, u_1, A) ... J(\beta, u_4, A)| \, d\beta \ll \left(\frac{|\boldsymbol{u}|}{A}\right)^{-1+\varepsilon} ,$$

като константата в знака $\ll$ *зависи само от* ε*.*

Тази лема е аналогична на Лема 10 в [23]. Понеже доказателството ѝ е малко по-различно, ние ще го изложим в края на §2.6.

Като използваме Лема 24 и като вземем предвид (2.2.14) и $|n_i| \leq M \leq N$, намираме

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| J(\beta, -\frac{V\mathbf{n}}{q}, \frac{1}{2}\frac{P}{V}) \right| d\beta \ll \left(\frac{\max\left(\frac{V}{q}|n_1|, \ldots, \frac{V}{q}|n_4|\right)}{\frac{P}{V}} \right)^{-1+\varepsilon}$$

$$= V^{\varepsilon-2} q^{1-\varepsilon} P^{1-\varepsilon} \left(\max\left(|n_1|, \ldots, |n_4|\right)\right)^{-1+\varepsilon}$$

$$\ll V^{-2} q P^{1+\varepsilon} |\mathbf{n}|^{-1} .$$

Тогава

$$\Gamma^{(*)} \ll P^{1+\varepsilon} \sum_{q \leq Q} q^{-3} \sum_{\substack{|\mathbf{n}| \leq M \\ \mathbf{n} \neq \mathbf{0}}} \frac{|V(q, 0, N, \mathbf{n})|}{|\mathbf{n}|}.$$

По-нататък, величината $V(q, 0, N, \mathbf{n})$ оценяваме с помощта на Лема 21 и получаваме

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(*)} &\ll P^{1+\varepsilon} \sum_{2^l q_1 \leq Q} \left(2^l q_1\right)^{-3} \sum_{\substack{|\mathbf{n}| \leq M \\ \mathbf{n} \neq \mathbf{0}}} \frac{2^{3l} q_1^{\frac{5}{2}+\varepsilon} (q_1, N)^{\frac{1}{2}}}{|\mathbf{n}|} \\
&\ll P^{1+\varepsilon} \sum_{2^l \leq Q} \sum_{q \leq Q} q^{-\frac{1}{2}} (q, N)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{|\mathbf{n}| \leq M \\ \mathbf{n} \neq \mathbf{0}}} |\mathbf{n}|^{-1} \\
&\ll P^{1+\varepsilon} \sum_{q \leq Q} q^{-\frac{1}{2}} (q, N)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{|\mathbf{n}| \leq M \\ \mathbf{n} \neq \mathbf{0}}} |\mathbf{n}|^{-1} .
\end{aligned}$$

(Тук отново използвахме (2.4.4).) Сега за първата сума в последния израз използваме Лема 16, а за втората сума – следната лема, чието доказателство е приложено в края на §2.6.

Лема 25. *Нека $|\boldsymbol{n}| = \max(|n_1|, \ldots, |n_4|) > 0$ и M е реално положително число. Тогава е в сила оценката*

$$\sum_{\substack{|\boldsymbol{n}| \leq M \\ \boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}}} |\boldsymbol{n}|^{-1} \ll M^3.$$

Получаваме

$$\Gamma^{(*)} \ll P^{1+\varepsilon} Q^{\frac{1}{2}} M^3 = P^{1+\varepsilon} Q^{\frac{1}{2}} P^{3+\varepsilon} Q^{-3} \ll P^{4+\varepsilon} Q^{-\frac{5}{2}}, \tag{2.6.6}$$

защото $Q^\varepsilon \ll P^\varepsilon$.

От (2.2.18), (2.3.2), (2.4.5), (2.6.2) и (2.6.6) заключаваме, че

$$\Gamma = \Gamma^{(0)} + \mathcal{O}(P^{4+\varepsilon} Q^{-\frac{5}{2}}) \, . \tag{2.6.7}$$

2.6.2 Изследване на $\Gamma^{(0)}$

От израза $\Gamma^{(0)}$ ще се обособи главният член в нашата асимптотична формула. Имаме

$$\Gamma^{(0)} = V^2 \sum_{q \le Q} q^{-4} V(q, 0, N, \mathbf{0}) \int\limits_{|\beta| \le \frac{V^2}{2qQ}} e\left(-\frac{N}{V^2}\beta\right) J^4(\beta, \frac{1}{2}\frac{P}{V}) \mathrm{d}\beta \, . \tag{2.6.8}$$

В (2.6.8) ще разширим интервала на интегриране до $\mathbb{R}$ и ще оценим получената грешка. Като използваме Лема 19.(ii) получаваме

$$\begin{aligned} \int\limits_{|\beta| > \frac{V^2}{2qQ}} e\left(-\frac{N}{V^2}\beta\right) J^4(\beta, \frac{1}{2}\frac{P}{V}) d\beta &\ll \int\limits_{|\beta| > \frac{V^2}{2qQ}} \left(|\beta|^{-\frac{1}{2}}\right)^4 \mathrm{d}\beta \\ &\ll \int\limits_{\beta > \frac{V^2}{2qQ}} \beta^{-2} \mathrm{d}\beta \ll \frac{qQ}{V^2} \, . \end{aligned} \tag{2.6.9}$$

Да си припомним дефиницията (1.6.8). Според означението (2.2.2) имаме

$$\varkappa = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e\left(-\frac{N}{V^2}\beta\right) J^4(\beta, \frac{1}{2}\frac{P}{V}) \mathrm{d}\beta. \tag{2.6.10}$$

Получаваме

$$\Gamma^{(0)} = V^2 \sum_{q \le Q} q^{-4} V(q, 0, N, \mathbf{0}) \left[\varkappa + \mathcal{O}\left(\frac{qQ}{V^2}\right)\right] = \varkappa \Gamma_1^{(0)} + T, \tag{2.6.11}$$

където

$$\Gamma_1^{(0)} = V^2 \sum_{q \le Q} q^{-4} V(q, 0, N, \mathbf{0}), \tag{2.6.12}$$

а T е приносът на остатъка в (2.6.11). От Лема 21 имаме

$$\begin{aligned}
T &\ll V^2 \sum_{q\le Q} q^{-4} \left| V(q,0,N,\mathbf{0}) \right| \left(\frac{qQ}{V^2} \right) \ll Q \sum_{q\le Q} q^{-3} \left| V(q,0,N,\mathbf{0}) \right| \\
&\ll Q \sum_{2^l q_1 \le Q} (2^l q_1)^{-3} 2^{3l} q_1^{\frac{5}{2}+\varepsilon} (q_1,N)^{\frac{1}{2}} \ll Q \sum_{2^l\le Q} \sum_{q_1\le Q} q_1^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} (q_1,N)^{\frac{1}{2}} \\
&\ll Q^{1+\varepsilon} \sum_{2^l\le Q} \sum_{q_1\le Q} q_1^{-\frac{1}{2}} (q_1,N)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Сега прилагаме (2.2.11), (2.4.4) и Лема 16 и получаваме

$$T \ll Q^{1+\varepsilon} Q^{\frac{1}{2}} N^{\varepsilon} \ll Q^{\frac{3}{2}+\varepsilon} P^{\varepsilon} \ll P^{4+\varepsilon} Q^{-\frac{5}{2}}. \tag{2.6.13}$$

Така от (2.6.11) и (2.6.13) получаваме

$$\Gamma^{(0)} = \varkappa \Gamma_1^{(0)} + \mathcal{O}(P^{4+\varepsilon} Q^{-\frac{5}{2}}). \tag{2.6.14}$$

Да разгледаме $\Gamma_1^{(0)}$ определено в (2.6.12). Разширяваме областта на сумиране по всички естествени q. Като вземем предвид (2.2.15) и (2.4.1) виждаме, че се получава особения ред дефиниран в (1.6.9)

$$\sigma(N) = \sum_{q=1}^{\infty} A_q \,, \tag{2.6.15}$$

където

$$A_q = q^{-4} V(q,0,N,\mathbf{0}) = q^{-4} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e_q(-aN) S^4(q,a) \,. \tag{2.6.16}$$

Намираме, че

$$\Gamma_1^{(0)} = \sigma(N) V^2 + \Gamma_2^{(0)} \,, \tag{2.6.17}$$

където $\Gamma_2^{(0)}$ е грешката, получена от тази процедура, която сега ще оценим. Според Лема 21 имаме

$$\begin{aligned}
\Gamma_2^{(0)} &\ll V^2 \sum_{q>Q} q^{-4} \left| V(q,0,N,\mathbf{0}) \right| \ll V^2 \sum_{2^l q_1 > Q} (2^l q_1)^{-4} 2^{3l} q_1^{\frac{5}{2}+\varepsilon} (q_1,N)^{\frac{1}{2}} \\
&\ll V^2 \sum_{2^l>Q} 2^{-l} \sum_{q_1>Q} q_1^{-\frac{3}{2}+\varepsilon} (q_1,N)^{\frac{1}{2}} \ll V^2 \sum_{q>Q} q^{-\frac{3}{2}+\varepsilon} (q,N)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

защото $\sum\limits_{2^l>Q} 2^{-l}$ е част от реда $\sum\limits_{l=0}^{\infty} 2^{-l} = 2$. Сега използваме Лема 17 и получаваме

$$\Gamma_2^{(0)} \ll V^2 Q^{-\frac{1}{2}} N^{\varepsilon} \,. \tag{2.6.18}$$

От (2.6.7), (2.6.14), (2.6.17) и (2.6.18) следва, че

$$\Gamma = \varkappa \sigma(N) V^2 + \mathcal{O}(|\varkappa|\, V^2 Q^{-\frac{1}{2}} P^{\varepsilon}) + \mathcal{O}(P^{4+\varepsilon} Q^{-\frac{5}{2}}) \,. \tag{2.6.19}$$

2.7 Асимптотична формула за Γ

В глава 3 изследваме особения интеграл $\varkappa$ и особения ред $\sigma(N)$. Там доказваме лемите

Лема 26. *Величината $\varkappa$ е реално число и удовлетворява $\varkappa \asymp \dfrac{V}{P}$.*

Лема 27. *За особения ред $\sigma(N)$ е изпълнено*

$$\frac{1}{2^{\xi_2}\log\log N} \ll \sigma(N) \ll \log\log N\,,$$

където $\xi_2 \geq 0$ е такова, че $2^{\xi_2}\|N$.

Лема 26 твърди, че $\varkappa \asymp \frac{V}{P}$, така че

$$|\varkappa|\,V^2Q^{-\frac{1}{2}}P^{\varepsilon} \ll V^3P^{-1}Q^{-\frac{1}{2}}P^{\varepsilon} \ll P^{2+\varepsilon}Q^{-\frac{1}{2}} \ll P^{2+\varepsilon}Q^{-\frac{1}{2}}P^2Q^{-2} = P^{4+\varepsilon}Q^{-\frac{5}{2}}\,.$$

Ето защо от (2.6.19) получаваме

$$\Gamma = \varkappa V^2\sigma(N) + \mathcal{O}(P^{4+\varepsilon}Q^{-\frac{5}{2}})\,. \tag{2.7.1}$$

Когато N съдържа висока степен на 2, особеният ред $\sigma(N)$ е много малък. Нека разглеждаме $N = 2^{\xi_2}N_1,\ 2\nmid N_1$, такива че $\xi_2 \leq K$ за $K > 0$ – фиксирана константа. Тогава $\sigma(N)$ не е прекалено малък и като имаме предвид Лема 26, виждаме, че за да бъде формула (2.7.1) съдържателна е необходимо

$$\varkappa V^2 \gg P^{4+\varepsilon}Q^{-\frac{5}{2}}\,.$$

Или все едно

$$\frac{V^3}{P} \gg P^{4+\varepsilon}Q^{-\frac{5}{2}}$$

$$V^3 \gg P^{5+\varepsilon}Q^{-\frac{5}{2}}$$

$$Q^{\frac{5}{2}}P^{3\theta} \gg P^{5+\varepsilon}\,. \tag{2.7.2}$$

Сега избираме

$$Q = \sqrt{PV} = N^{\frac{\theta+1}{4}}\,. \tag{2.7.3}$$

Тогава (2.7.2) е еквивалентно последователно на

$$\left(N^{\frac{\theta+1}{4}}\right)^{\frac{5}{2}}N^{\frac{3\theta}{2}} \gg N^{\frac{5+\varepsilon}{2}}\,,$$

$$N^{\frac{17\theta+5}{8}} \gg N^{\frac{5}{2}+\varepsilon}\,,$$

$$\frac{17\theta+5}{8} > \frac{5}{2}\,.$$

Следователно, необходимото ограничение отдолу за θ е

$$\theta > \frac{15}{17}\,.$$

Заместваме в (2.7.1) V и Q с техните стойности зададени чрез (1.6.3) и (2.7.3) и получаваме (1.6.7).

Ще приключим този параграф, като дадем доказателствата на Лема 24 и Лема 25.

Доказателство на лемите.

Доказателство: (Лема 24) Да разгледаме случая $(|\mathbf{u}|/A) \geq 1$. Да означим

$$I := \int\limits_{-\infty}^{\infty} |J(\beta,u_1,A)...J(\beta,u_4,A)|\,\mathrm{d}\beta$$

и нека $T = (|\mathbf{u}|/A)^{1-\varepsilon}$. Представяме I като сума на два интеграла $I = I_1 + I_2$, където в I_1 интегрирането се извършва по тези β, удовлетворяващи $|\beta| \leq T$, а в I_2 се интегрира по β, удовлетворяващи $|\beta| > T$. Според Лема 19.(ii) имаме

$$I_2 \ll \int\limits_{T}^{\infty} \beta^{-2}\mathrm{d}\beta \ll \left(\frac{|\mathbf{u}|}{A}\right)^{-1+\varepsilon}\,.$$

Да разгледаме I_1. Без ограничение на общността можем да считаме, че $|\mathbf{u}| = |u_1| > 0$. Тогава според Лема 19.(i) имаме

$$\begin{aligned} I_1 &\ll \int\limits_{|\beta|\leq T} |J(\beta,u_1,A)|\,\mathrm{d}\beta \ll \int\limits_{|\beta|\leq T} \frac{1+|\beta|^k A^k}{|\mathbf{u}|^k}\mathrm{d}\beta \\ &\ll \int\limits_{|\beta|\leq T} \frac{1+T^kA^k}{|\mathbf{u}|^k}\mathrm{d}\beta \ll \int\limits_{|\beta|\leq T} \frac{T^kA^k}{|\mathbf{u}|^k}\mathrm{d}\beta \ll \frac{T^{k+1}A^k}{|\mathbf{u}|^k}, \end{aligned}$$

защото разглеждаме случая $|\mathbf{u}|/A \geq 1$, който ни води до $T = (|\mathbf{u}|/A)^{1-\varepsilon} \geq 1$ и $AT \geq 1$. Сега виждаме, че избирайки $k = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$, имаме $I_1 \ll \left(\frac{|\mathbf{u}|}{A}\right)^{-1}$. И така,

$$I \ll |I_1| + |I_2| \ll \left(\frac{|\mathbf{u}|}{A}\right)^{-1} + \left(\frac{|\mathbf{u}|}{A}\right)^{-1+\varepsilon} \ll \left(\frac{|\mathbf{u}|}{A}\right)^{-1+\varepsilon}.$$

Ако имаме $|\mathbf{u}|/A < 1$, разсъждаваме така:

$$I \ll \int_{-\infty}^{\infty} \min(1, |\beta|^{-2}) d\beta \ll 1 \ll \left(\frac{|\mathbf{u}|}{A}\right)^{-1+\varepsilon}.$$

Това доказва нашата лема. $\square$

Доказателство: (Лема 25) Нека положим

$$L = \sum_{\substack{|\mathbf{n}| \le M \\ \mathbf{n} \ne \mathbf{0}}} |\mathbf{n}|^{-1}.$$

Тогава

$$L \ll \sum_{\nu=1,2,3,4} \sum_{0<|n|\le M} \frac{1}{|n|} \sum_{\substack{|n_j| \le |n| \\ j=1,2,3,4 \\ j \ne \nu}} 1 \ll \sum_{0<|n|\le M} \frac{1}{|n|} \sum_{|n_1|,|n_2|,|n_3| \le |n|} 1$$
$$\ll \sum_{0<n\le M} \frac{1}{n}(n+1)^3 \ll \sum_{0<n\le M} n^2 \ll M^3,$$

като в последната оценка използвахме Лема 3.(iii). $\square$

Глава 3

Особен ред и особен интеграл

3.1 Особеният интеграл $\varkappa$

В този параграф ще изследваме особения интеграл $\varkappa$ и ще докажем формулираната по-горе Лема 26. Изложението ще следва разсъжденията на Карацуба в Лема 4 от §1, Гл.XI на [4].

Особеният интеграл за нашата задача, който дефинирахме в (1.6.8), е

$$\varkappa = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e\left(-\frac{P^2}{V^2}\beta\right) J^4(\beta, \frac{1}{2}\frac{P}{V})\mathrm{d}\beta \, .$$

В (2.2.2) сме дефинирали

$$J(\beta, A) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_0\left(x - A\right) e\left(\beta x^2\right) \mathrm{d}x \, .$$

Интегралът $\varkappa$ прилича на особения интеграл за задачата на Варинг (1.4.3). Не можем да пресметнем точната му стойност, както в (1.4.4), заради съществуващите тегла, но използваме същите техники, за да намерим неговия порядък.

Правим смяната на променливите $\dfrac{P^2}{V^2}\beta = \gamma$. Получаваме

$$\varkappa = \frac{V^2}{P^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e(-\gamma) J^4(\frac{V^2}{P^2}\gamma, \frac{1}{2}\frac{P}{V})\mathrm{d}\gamma. \tag{3.1.1}$$

Сега в интеграла $J\left(\dfrac{V^2}{P^2}\gamma, \dfrac{1}{2}\dfrac{P}{V}\right)$ правим смяната $\dfrac{V}{P}x = y$. Получаваме

$$\varkappa = \frac{P^2}{V^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e\left(-\beta\right) H^4(\beta)\mathrm{d}\beta \, , \tag{3.1.2}$$

където

$$H(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x) e\left(\beta x^2\right) \mathrm{d}x$$

и

$$\eta(x) = \omega_0 \left(\frac{P}{V} \left(x - \frac{1}{2} \right) \right) .$$

Като използваме определението (1.6.4) на фунцкията $\omega_0(x)$, виждаме, че $\eta(x)$ е безкрайногладка функция, която е положителна в интервала

$$\Delta_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{V}{P}\, , \, \frac{1}{2} + \frac{V}{P} \right) \tag{3.1.3}$$

и е равна на нула извън него.

Да забележим, че за $H(\beta)$ е в сила тривиалната оценка $H(\beta) \ll \dfrac{V}{P}$, а като приложим Следствие 2 от §1, гл.III на [2], както в аналогичната Лема 19.(ii), получаваме

$$H(\beta) \ll \min\left(\frac{V}{P}, |\beta|^{-\frac{1}{2}} \right). \tag{3.1.4}$$

Нека разгледаме за $t \in [0, 2]$ функцията

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e\left(-t\beta\right) H^4(\beta) \mathrm{d}\beta \quad . \tag{3.1.5}$$

От (3.1.4) следва, че е изпълнено

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| e\left(-t\beta\right) H^4(\beta) \right| \mathrm{d}\beta \ll \int_{\frac{V^2}{P^2}}^{\infty} \beta^{-2} \mathrm{d}\beta + \frac{V^3}{P^3} \ll \frac{V^2}{P^2} \, .$$

Оттук виждаме, че интегралът (3.1.5) е равномерно сходящ по t, следователно $g(t)$ е непрекъсната за $0 < t < 2$.[1]

Ясно е, че за особения интеграл е в сила

$$\varkappa = \frac{P^2}{V^2} g(1), \tag{3.1.6}$$

така че за да изследваме $\varkappa$, ще използваме по-удобната за работа функция $g(t)$.

[1] Вж. §1.51, §1.52 от [35].

Според (3.1.6) за да докажем, че $\varkappa$ е реално, е достатъчно да докажем, че $g(1) \in \mathbb{R}$. За целта разглеждаме комплексно спрегнатото на $g(1)$ число. Имаме

$$\begin{aligned}\overline{g(1)} &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{e(-\beta)H^4(\beta)}\mathrm{d}\beta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e(\beta)H^4(-\beta)\mathrm{d}\beta \\ &= \int\limits_{\infty}^{-\infty} e(-\gamma)H^4(\gamma)\mathrm{d}(-\gamma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e(-\gamma)H^4(\gamma)\mathrm{d}\gamma = g(1)\,,\end{aligned}$$

следователно числото $g(1)$ е реално.

Да въведем функцията

$$F(c) = \int\limits_{0}^{c} g(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{c} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e\left(-t\beta\right)H^4(\beta)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}t\,. \tag{3.1.7}$$

Да забележим, че от непрекъснатостта на $g(t)$ в интервала $(0, 2)$ следва, че функцията $F(x)$ е диференцируема в интервала $(0, 2)$. Също така от равномерната сходимост на (3.1.5), следва, че можем да сменяме реда на интегриране по β и t в (3.1.7).[2]

Нека първо преобразуваме $F(c)$:

$$F(c) = \int\limits_{0}^{c} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e(-t\beta)H^4(\beta)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} H^4(\beta) \int\limits_{0}^{c} e(-t\beta)\mathrm{d}t\mathrm{d}\beta\,.$$

Използваме, че

$$\int\limits_{0}^{c} e(-t\beta)\mathrm{d}t = \frac{1-e(-c\beta)}{2\pi i\beta}\,.$$

Получаваме

$$\begin{aligned}F(c) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\Delta_1} \dots \int\limits_{\Delta_1} \eta(x_1)\dots\eta(x_4)e\left(\beta(x_1^2+\dots+x_4^2)\right)\frac{1-e(-c\beta)}{2\pi i\beta}\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_4\mathrm{d}\beta \\ &= \int\limits_{\Delta_1} \dots \int\limits_{\Delta_1} \eta(x_1)\dots\eta(x_4) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{e\left(\beta(x_1^2+\dots+x_4^2)\right)}{2\pi i\beta} \\ &\qquad - \frac{e\left(\beta(x_1^2+\dots+x_4^2-c)\right)}{2\pi i\beta}\Big)\mathrm{d}\beta\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_4\,.\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

[2]Вж. §1.84 от [35].

Нека разгледаме интеграла

$$\mathcal{I} := \int\limits_{-\infty}^{\infty} e\left(\beta(x_1^2 + \cdots + x_4^2)\right) \frac{1 - e(-c\beta)}{2\pi i\beta} \mathrm{d}\beta$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e\left(\beta(x_1^2 + \cdots + x_4^2)\right)}{2\pi i\beta} - \frac{e\left(\beta(x_1^2 + \cdots + x_4^2 - c)\right)}{2\pi i\beta} \right) \mathrm{d}\beta \ ,$$

където $x_1, \ldots, x_4 \in \Delta_1$.

Използваме, че $\frac{\sin \alpha\beta}{\beta}$ е четна фунцкия на β, а $\frac{\cos \alpha\beta}{\beta}$ – нечетна на β. Получаваме

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \left(\frac{\sin\left(\beta(x_1^2 + \cdots + x_4^2)\right)}{\beta} - \frac{\sin\left(\beta(x_1^2 + \cdots + x_4^2 - c)\right)}{\beta} \right) \mathrm{d}\beta \ .$$

Използваме Лема 4 и достигаме до

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{sign}\left(x_1^2 + \cdots + x_4^2\right) - \operatorname{sign}\left(x_1^2 + \cdots + x_4^2 - c\right) \right) \ .$$

Трябва да изследваме израза $\operatorname{sign}(x_1^2 + \cdots + x_4^2 - c)$, за да определим стойността на интеграла $\mathcal{I}$. Ясно е, че за

$$x_1^2 + \cdots + x_4^2 > c \tag{3.1.9}$$

имаме

$$\operatorname{sign}\left(x_1^2 + \cdots + x_4^2 - c\right) = \operatorname{sign}\left(x_1^2 + \cdots + x_4^2\right) = 1 \ .$$

Тогава $\mathcal{I} = 0$ и приносът към $F(c)$ е 0.

За

$$0 < x_1^2 + \cdots + x_4^2 < c \tag{3.1.10}$$

е изпълнено

$$\operatorname{sign}\left(x_1^2 + \cdots + x_4^2 - c\right) = -1, \quad \operatorname{sign}\left(x_1^2 + \cdots + x_4^2\right) = 1$$

и $\mathcal{I} = 1$.

Като използваме информацията за стойността на интеграла $\mathcal{I}$ в (3.1.8), получаваме

$$F(c) = \int\limits_{\Delta_1} \ldots \int\limits_{\Delta_1} \eta(x_1) \ldots \eta(x_4) \mathcal{I} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_4 \tag{3.1.11}$$
$$= \underset{0 < x_1^2 + \cdots + x_4^2 < c}{\int \ldots \int_{\Delta_1}} \eta(x_1) \ldots \eta(x_4) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_4 \ .$$

За да изследваме $\varkappa$ ще изразим $g(1)$ чрез функцията $F(c)$ зададена в (3.1.11). Очевидно имаме

$$\begin{aligned} 2g(1) = 2F'(1) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{F(1+h)-F(1-h)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{h} \underset{1-h\le x_1^2+\dots+x_4^2\le 1+h}{\int\dots\int} \eta(x_1)\dots\eta(x_4)\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_4. \end{aligned}$$

Въвеждаме функцията

$$S(h) := \frac{1}{h} \underset{1-h\le x_1^2+\dots+x_4^2\le 1+h}{\int\dots\int} \eta(x_1)\dots\eta(x_4)\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_4\ . \tag{3.1.12}$$

Полагаме $x_i^2 = y_i, \quad i = 1,2,3,4$. Получаваме

$$S(h) = \frac{1}{h} \underset{1-h\le y_1+\dots+y_4\le 1+h}{\int\dots\int} \eta(\sqrt{y_1})\dots\eta(\sqrt{y_4})\frac{\mathrm{d}y_1\dots\mathrm{d}y_4}{16\sqrt{y_1}\dots\sqrt{y_4}}\ . \tag{3.1.13}$$

Фунцкията $\eta(x)$ е положителна в интервала Δ_1, , т.е. при $\sqrt{y}\in\Delta_1$. Също така за достатъчно големи N е изпълнено $\dfrac{1}{2}-\delta \le \sqrt{y_i} \le 1$ за фиксирано $0<\delta<\frac{1}{2}$. Наистина, дробта $\dfrac{V}{P} = P^{\theta-1}$ е фиксирана отрицателна степен на N, следователно за достатъчно голямо N е изпълнено $\dfrac{V}{P}<\delta$ и $\Delta_1 \subset \left[\dfrac{1}{2}-\delta, 1\right]$. Ето защо можем да оценим отгоре $S(h)$ по следния начин:

$$S(h) \le \frac{1}{h} \underset{\substack{\left|\sqrt{y_i}-\frac{1}{2}\right|<\frac{V}{P}\\ 1-h\le y_1+\dots+y_4\le 1+h}}{\int\dots\int} \mathrm{d}y_1\dots\mathrm{d}y_4\ . \tag{3.1.14}$$

Имаме включването

$$\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{V}{P}\right)^2, \left(\frac{1}{2}+\frac{V}{P}\right)^2\right] \subset \left[\frac{1}{4}-2\frac{V}{P}, \frac{1}{4}+2\frac{V}{P}\right]\ .$$

Оттук и от (3.1.14) следва, че

$$S(h) \le \frac{1}{h} \underset{\substack{\left|y_i-\frac{1}{4}\right|<2\frac{V}{P}\\ 1-h\le y_1+\dots+y_4\le 1+h}}{\int\dots\int} \mathrm{d}y_1\dots\mathrm{d}y_4\ . \tag{3.1.15}$$

В последния интеграл правим смяна на променливите $y_i - \frac{1}{4} = 2\frac{V}{P}u_i, \quad i = 1,2,3,4$ и получаваме

$$S(h) \le \frac{16}{h}\frac{V^4}{P^4} \int\limits_{\substack{|u_i|<1 \\ -\frac{P}{2V}h \le u_1+\cdots+u_4 \le \frac{P}{2V}h}} \cdots \int \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_4$$

$$\ll \frac{V^4}{P^4} . \frac{1}{h.\frac{P}{2V}} . \frac{P}{2V} \int\limits_{\substack{|u_i|<1 \\ -\frac{P}{2V}h \le u_1+\cdots+u_4 \le \frac{P}{2V}h}} \cdots \int \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_4$$

$$= \frac{V^3}{P^3} . \frac{1}{h.\frac{P}{2V}} \int\limits_{\substack{|u_i|<1 \\ -\frac{P}{2V}h \le u_1+\cdots+u_4 \le \frac{P}{2V}h}} \cdots \int \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_4 \,.$$

От (3.1.6) и получената оценка за $S(h)$ следва, че

$$\varkappa \ll \frac{P^2}{V^2}\frac{V^3}{P^3} . \lim_{\substack{H>0 \\ H\to 0}} \frac{1}{H} \int\limits_{\substack{|u_i|<1 \\ -H \le u_1+\cdots+u_4 \le H}} \cdots \int \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_4 \,,$$

ако последната граница съществува. Това се гарантира от следната лема.

Лема 28. *Границата*

$$\lim_{\substack{H>0 \\ H\to 0}} \frac{1}{H} \int\limits_{\substack{|u_i|<1 \\ -H \le u_1+\cdots+u_4 \le H}} \cdots \int \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_4$$

съществува и е положително число.

От Лема 28 следва, че имаме оценката

$$\varkappa \ll \frac{V}{P} \,. \tag{3.1.16}$$

Долната оценка $\varkappa \gg \frac{V}{P}$ се доказва по аналогичен начин. След като стигнем до (3.1.13) ограничаваме областта на интегриране до интервала

$$\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{V}{P}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{V}{P}\right] \subset \Delta_1 \,.$$

В този интервал е изпълнено $\eta(x) \ge \omega_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{V}{P}\right)$, така че получаваме

$$S(h) \gg \frac{1}{h} \int\limits_{\substack{\left|\sqrt{y_i} - \frac{1}{2}\right| < \frac{V}{2P} \\ 1-h \le y_1+\cdots+y_4 \le 1+h}} \cdots \int \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_4 \,. \tag{3.1.17}$$

Сега използваме включването

$$\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\frac{V}{P},\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{V}{P}\right]\subset\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{V}{P}\right)^2,\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{V}{P}\right)^2\right]$$

и получаваме

$$S(h)\gg\frac{1}{h}\underset{\substack{\left|y_i-\frac{1}{4}\right|<\frac{V}{4P}\\ 1-h\le y_1+\cdots+y_4\le 1+h}}{\int\cdots\int}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_4\ .$$

Оттук насетне продължаваме, както от (3.1.15) нататък. Следващите преобразувания са само смяна на променливите и прилагане на Лема 28. Стигаме до $\varkappa\gg\frac{V}{P}$.

Следователно $\varkappa\asymp\frac{V}{P}$. Оттук следва, че $\varkappa$ е и положително. С това доказахме Лема 26.

Тук прилагаме доказателството на формулираната по-горе Лема 28.

Доказателство: (Лема 28) Нека използваме означението

$$L:=\underset{\substack{|u_i|<1\\ -H\le u_1+\cdots+u_4\le H}}{\int\cdots\int}\mathrm{d}u_1\ldots\mathrm{d}u_4\ .$$

Нека също така $s:=u_1+u_2+u_3$. Имаме

$$L=\underset{\substack{|u_1|,|u_2|,|u_3|<1\\ -1-H<s<1+H}}{\iiint}\ \ \underset{\substack{|u_4|\le 1\\ -s-H\le u_4\le -s+H}}{\int}\mathrm{d}u_4\mathrm{d}u_1\ldots\mathrm{d}u_3$$

$$=L_1+L_2+L_3\ ,$$

където L_1 е интегралът, при който $-s-H<-1<-s+H$, L_2 е интегралът, при който $-1<-s-H<-s+H<1$, и L_3 – при който $-s-H<1<-s+H$.

Тогава, като използваме, че

$$\underset{\substack{|u_4|\le 1\\ -s-H\le u_4\le -s+H}}{\int}\mathrm{d}u_4\le 2H\quad ,\tag{3.1.18}$$

а също дефиницията на L_1 , получаваме

$$0\le L_1\le\underset{\substack{|u_1|,|u_2|,|u_3|<1\\ 1-H<s<1+H}}{\iiint}2H\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3\ .$$

Тогава

$$\lim_{\substack{H>0\\H\to 0}} \frac{1}{H} L_1 \le 2 \lim_{\substack{H>0\\H\to 0}} \iiint\limits_{\substack{|u_1|,|u_2|,|u_3|<1\\1-H<s<1+H}} \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3 = 0\ .$$

И така, имаме

$$\lim_{\substack{H>0\\H\to 0}} \frac{1}{H} L_1 = 0\ .$$

За интеграла L_3 използваме отново (3.1.18) и дефиницията му. Имаме

$$0 \le L_3 \le \iiint\limits_{\substack{|u_1|,|u_2|,|u_3|<1\\-1-H<s<-1+H}} 2H \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3\ .$$

Тогава

$$\lim_{\substack{H>0\\H\to 0}} \frac{1}{H} L_3 \le 2 \lim_{\substack{H>0\\H\to 0}} \iiint\limits_{\substack{|u_1|,|u_2|,|u_3|<1\\-1-H<s<-1+H}} \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3 = 0\ .$$

Следователно

$$\lim_{\substack{H>0\\H\to 0}} \frac{1}{H} L_3 = 0\ .$$

Нека сега разгледаме интеграла L_2. За него е изпълнено

$$\lim_{\substack{H>0\\H\to 0}} \frac{1}{H} L_2 = 2 \lim_{\substack{H>0\\H\to 0}} \iiint\limits_{\substack{|u_1|,|u_2|,|u_3|<1\\-1-H<s<1+H}} \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3 = 2 \iiint\limits_{\substack{|u_1|,|u_2|,|u_3|<1\\-1<s<1}} \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3 > 0.$$

Като обобщим резултатите за границите върху L_1, L_2 и L_3, получаваме твърдението на лемата. □

3.2 Особеният ред $\sigma(N)$

Тук ще изложим подробно доказателството на Лема 27 за особения ред $\sigma(N)$ дефиниран в (2.6.15). Ще използваме и дефиницията на фунцкията A_q от (2.6.16). Следващите разсъждения са взаимствани от [27].

Ще докажем две леми, които ще ни дадат необходимите условия за прилагане на тъждеството на Ойлер. В сила е следната

Лема 29. *Функцията A_q е мултипликативна по q – когато $(q_1, q_2) = 1$, в сила е равенството*

$$A_{q_1} A_{q_2} = A_{q_1 q_2}\ .$$

Доказателство: Наистина, като използваме Лема 6 и Лема 11.(i) имаме

$$A_{q_1q_2} = (q_1q_2)^{-4} \sum_{\substack{a_1=1\\(a_1,q_1)=1}}^{q_1} \sum_{\substack{a_2=1\\(a_2,q_2)=1}}^{q_2} e_{q_1q_2}\left(-(a_1q_2+a_2q_1)N\right) S^4(q_1q_2, a_1q_2+a_2q_1)$$
$$= q_1^{-4}q_2^{-4} \sum_{\substack{a_1=1\\(a_1,q_1)=1}}^{q_1} \sum_{\substack{a_2=1\\(a_2,q_2)=1}}^{q_2} e_{q_1}\left(-a_1N\right) e_{q_2}\left(-a_2N\right) S^4(q_1, a_1q_2^2) S^4(q_2, a_2q_1^2).$$

Според Лема 5 имаме

$$S(q_1, a_1q_2^2) = \sum_{x(q_1)} e_{q_1}\left(a_1q_2^2x^2\right) = \sum_{x(q_1)} e_{q_1}\left(a_1(q_2x)^2\right) = \sum_{x(q_1)} e_{q_1}\left(a_1x^2\right) = S(q_1, a_1),$$

защото $(q_1, q_2) = 1$. Аналогично $S(q_2, a_2q_1^2) = S(q_2, a_2)$.

Следователно

$$A_{q_1q_2} = q_1^{-4}q_2^{-4} \sum_{\substack{a_1=1\\(a_1,q_1)=1}}^{q_1} \sum_{\substack{a_2=1\\(a_2,q_2)=1}}^{q_2} e_{q_1}\left(-a_1N\right) e_{q_2}\left(-a_2N\right) S^4(q_1, a_1) S^4(q_2, a_2)$$
$$= q_1^{-4} \sum_{\substack{a_1=1\\(a_1,q_1)=1}}^{q_1} e_{q_1}\left(-a_1N\right) S^4(q_1, a_1).\ \ q_2^{-4} \sum_{\substack{a_2=1\\(a_2,q_2)=1}}^{q_2} e_{q_2}\left(-a_2N\right) S^4(q_2, a_2)$$
$$= A_{q_1}A_{q_2}\ .$$

□

Лема 30. *Редът* $\sum_{q=1}^{\infty} A_q$ *е абсолютно сходящ.*

Доказателство: От (2.6.16) знаем, че

$$A_q = q^{-4}V(q, 0, N, 0)\ ,$$

така че според Лема 21 и при обичайния запис $q = 2^l q_1$ за $l \geq 0$, $2 \nmid q_1$ имаме

$$A_q \ll (2^l q_1)^{-4} 2^{3l} q_1^{\frac{5}{2}+\varepsilon} (q_1, N)^{\frac{1}{2}} = 2^{-l} q_1^{-\frac{3}{2}+\varepsilon} (q_1, N)^{\frac{1}{2}}\ .$$

Тогава

$$\sigma(N) \ll \sum_{2^l q_1=1}^{\infty} 2^{-l} q_1^{-\frac{3}{2}+\varepsilon} (q_1, N)^{\frac{1}{2}} \ll \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l} \sum_{q_1=1}^{\infty} q_1^{-\frac{3}{2}+\varepsilon} (q_1, N)^{\frac{1}{2}}$$
$$\ll N^{\frac{1}{2}} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-\frac{3}{2}+\varepsilon} \ll N^{\frac{1}{2}}.$$

□

Следователно можем да използваме тъждеството на Ойлер (Лема 15). Получаваме

$$\sigma(N) = \prod_p \chi_p \quad ,$$

където

$$\chi_p = 1 + A_p + A_{p^2} + \cdots + A_{p^k} + \ldots \quad .$$

Нека разгледаме множителите χ_p за $p > 2$. Според Лема 11.(v) отнасяща се за сумата на Гаус за нечетни q, е изпълнено

$$A_q = q^{-2} c_q(N) \, .$$

Сега използваме Лема 9 за стойността на сумата на Рамануджан. За χ_p при $p > 2$ получаваме

$$\begin{aligned}
\chi_p &= 1 + \sum_{k=1}^{\xi} p^{-2k}(p^k - p^{k-1}) - p^{-2(\xi+1)} p^{\xi} = 1 + \sum_{k=1}^{\xi} p^{-k-1}(p-1) - p^{-\xi-2} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\xi} p^{-k} - \sum_{k=2}^{\xi+1} p^{-k} = 1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^{\xi+1}} - \frac{1}{p^{\xi+2}} \\
&= \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^{\xi}}\right) \, .
\end{aligned}$$

Нека въведем означението

$$\chi' := \prod_{p>2} \chi_p = \prod_{\xi \geq 0} \prod_{p^{\xi} \| N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^{\xi}}\right) . \tag{3.2.1}$$

Тогава

$$\sigma(N) = \chi_2 \chi' \, . \tag{3.2.2}$$

Като използваме, че прозведението

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \tag{3.2.3}$$

е сходящо[3] и вземем предвид (3.2.1), получаваме

$$\begin{aligned}
\chi' &= \prod_{p \nmid N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \prod_{\substack{p^{\xi} \| N \\ \xi \geq 1}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^{\xi}}\right) \\
&\gg \prod_{p | N} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{\phi(N)}{N} \, .
\end{aligned}$$

[3] Вж. §1.44 от [35].

Според Лема 8 е изпълнено

$$\varphi(N) \gg \frac{N}{\log\log N} \ .$$

Оттук следва, че

$$\chi' \gg \frac{1}{\log\log N} \ . \tag{3.2.4}$$

Ще покажем, че

$$\chi_2 = \frac{3}{2^{\xi_2}} \ , \tag{3.2.5}$$

където $\xi_2 \geq 0$ се определя от условието $2^{\xi_2} \| N$. Първо ще покажем, че при $(a, 2) = 1$ е изпълнено

$$S^4(2^k, a) = 2^{2(k+1)} e^4(\frac{a}{8}) = -2^{2k+2} \ . \tag{3.2.6}$$

Използваме Лема 11.(vi), според която при $(a, 2) = 1$ е в сила равенството

$$S(2^k, a) = \begin{cases} 0 & , \text{ако} \quad k = 1 \, , \\ 2^{\frac{k}{2}}(1 + \imath^a) & , \text{ако} \quad k \text{ е четно} \, , \\ 2^{\frac{k+1}{2}} e(a/8) & , \text{ако} \quad k \text{ е нечетно} \, . \end{cases}$$

Ако $k \geq 2$ е четно, то

$$S^4(2^k, a) = 2^{2k}(1 + i^a)^4 = -2^{2k+2}.$$

Това следва от $i^a = \varepsilon i$ за $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ и $(1 + \varepsilon i)^4 = 1 + 4\varepsilon i - 6 - 4\varepsilon i + 1 = -4$.

Ако $k \geq 3$ е нечетно, то

$$S^4(2^k, a) = 2^{2(k+1)} e^4(\frac{a}{8}) = -2^{2k+2},$$

защото $e^4(\frac{a}{8}) = e(\frac{a}{2}) = e(\frac{1}{2}) = -1$.

Следователно е вярно тъждетсвото (3.2.6). Използваме го заедно с Лема 9 и получаваме

$$\begin{aligned} \chi_2 &= 1 + 0 + \sum_{k \geq 2} 2^{-4k}(-2^{2k+2}) c_q(N) = 1 - \sum_{k \geq 2} 2^{-2k+2} c_q(N) \\ &= 1 - \sum_{k=2}^{\xi_2} 2^{-2k+2}(2^k - 2^{k-1}) + 2^{-2(\xi_2+1)+2} . 2^{\xi_2} \\ &= 1 - \sum_{k=2}^{\xi_2} 2^{-k+1} + 2^{-\xi_2} = 1 - (1 - \frac{1}{2^{\xi_2 - 1}}) + \frac{1}{2^{\xi_2}} = \frac{3}{2^{\xi_2}} \ . \end{aligned}$$

От (3.2.4) и (3.2.5) следва, че

$$\sigma(N) \gg \frac{1}{2^{\xi_2} \log\log N} \ .$$

Сега ще оценим $\sigma(N)$ отгоре. Като изпозлваме отново (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3), (3.2.5) и Лема 8, получаваме

$$\begin{aligned}
\sigma(N) &\ll \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{p^k} + \dots\right) = \prod_{p|N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \\
&= \frac{1}{\prod\limits_{p|N}\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)} = \frac{N}{N\prod\limits_{p|N}\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)} = \frac{N}{\phi(N)} \\
&\ll \log\log N.
\end{aligned}$$

С това доказахме Лема 27.

Библиография

[1] И.М. Виноградов, *Основы теории чисел*, „Наука“, Москва, 1972

[2] С.М. Воронин, А.А. Карацуба, *Дзета функция Римана*, Физматлит, 1994

[3] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, I, II,“Мир“, Москва, 1965

[4] А.А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, „Наука“, Москва, 1983, 177-196

[5] А.В. Малышев, *О представлении целых чисел положителнымыи квадратичными формами*, Труды матем. инст. им. В.А. Стеклова, **65** (1962)

[6] F.C. Auluck, S. Chowla, *The representation of a large number as a sum of four 'almost equal' squares*, Proc. Indian Acad. Sci., **6** (1937), 81-82

[7] V. Blomer, J. Brüdern, *A Three Squares Theorem with almost primes*, Bull. London Math. Soc., **37** (2005), 507-513

[8] J.Brüdern, E. Fouvry, *Lagrange's Four Squares Theorem with almost prime variables*, J. Reine Angew. Math., **454** (1994), 59-96

[9] K. Chadrasekharan, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer, 1968

[10] T. Estermann, *On Kloosterman's sums*, Mathematika, **8** (1961), 83-86

[11] T. Estermann, *A new application of Hardy-Littlewood-Kloosterman method*, Proc. London Math. Soc., **12**(3) (1962), 425-444

[12] G. Greaves, *On the representation of a number in the form $x^2 + y^2 + p^2 + q^2$ where p and q are odd primes*, Acta Arith., **29** (1976), 257-274

[13] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, *A new solution of Waring's problem*, Quart. J. Math. Oxford, **48** (1919), 272-293

[14] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, *Some problems of „Partitio Numerorum“.I. A new solution of Waring's problem*, Göttingen Nach. (1920), 33-54

[15] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, *Some problems of „Partitio Numerorum“.III. On the expression of a number as a sum of primes.*, Acta Math., **44** (1923), 1-70

[16] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, *Some problems of „Partitio Numerorum“.IV. The singular series in Waring's problem and the value of the number $G(k)$.*, Math.Z., **12** (1922), 161-188

[17] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, *Some problems of „Partitio Numerorum“. V. A further contribution to the study of Goldbach's problem.*, Proc. London Math. Soc., (2) **22** (1923), 45-56

[18] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, *Some problems of „Partitio Numerorum“. VI. Further researches in Waring's problem.*,Math.Z., **23** (1925), 1-37

[19] G.H. Hardy, E.M. Wright, *An Introduction to the Theroy of Numbers*, Fifth ed., Oxford Univeristy Press, 1979

[20] D. Hilbert, *Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzhal nter Potenzen (Waringsche Problem)*, Math. Ann., **67** (1909), 281-300

[21] D.R. Heath-Brown, *Cubic Forms in Ten Variables*, Proc. London Math. Soc., (1983), 225-257

[22] D.R. Heath-Brown, *A New Form of the Circle Method and its Application to Quadratic Forms*, J. Reine Angew. Math., **481** (1996), 149-206

[23] D.R. Heath-Brown, D.I. Tolev, *Lagrange's four squares theorem with one prime and three almost-prime variables*, J. Reine Angew. Math., **558** (2003), 159-224

[24] L.K. Hua, *Some results in the additive prime number theory*, Quart. J. Math. Oxford, **9** (1938), 68-80

[25] L.K. Hua, *Introduction to Number Theory*, Springer, 1982

[26] H. Iwaniec,E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, American Mathematical Society, 2004

[27] H.D. Kloosterman, *On the representation of numbers in the form $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$*, Acta Math., **49** (1926), 407-464

[28] K. Lapkova, D.I. Tolev, *Lagrange's equation with almost prime variables lying in a short interval*, Compt. rend. Acad. bulg. Sci., **60**(7) (2007), 715-718

[29] G.S. Lü, *Hua's Theorem on Five Almost Equal Prime Squares*, Acta Math. Sin., **22**(3) (2006), 907-916

[30] M. Natanson, *Additive Number Theory: the classical bases*, Grdauate texts in Math., Springer, 1996

[31] V.A. Plaksin, *An asymptotic formula for the number of solutions of a nonlinear equation for prime numbers*, Math. USSR Izv., **18** (1982), 275-348

[32] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Third Edition, McGraw Hill Book Company, 1987

[33] P. Shields, *Some applications of the sieve methods in number theory*, Thesis, University of Wales, 1979

[34] D.I. Tolev, *Lagrange's four squares theorem with variables of special type*, Proceedings of the session in analytic number theory and Diophantine equations, 17pp, Bonner Mathematische Schriften **360**, Univ. Bonn, Bonn, 2003

[35] E.C. Titchmarsh, *The theory of functions*, Second ed., Oxford Univeristy Press, 1958

[36] R.C. Vaughan, *The Hardy-Littlewood method*, Second ed., Cambridge University Press, 1997

[37] A. Weil, *On some exponential sums*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **34** (1948), 204-207

[38] E.M. Wright, *The representation of a number as a sum of five or more squares*, Quart. J. Math. Oxford, **4** (1933), 228-232

[39] E.M. Wright, *The representation of a number as a sum of four 'almost proportional' squares*, Quart. J. Math. Oxford, **7** (1936), 230-240

[40] E.M. Wright, *The representation of a number as a sum of four 'almost equal' squares*, Quart.J.Math. Oxford, **8** (1937), 278-279

[41] E.M. Wright, *Representation of a number as a sum of three or four squares*, Proc. London Math. Soc., **42** (1937), 481-500.