

A halmazelmélet axiómái

1. A ZFC axiómarendszer (Zermelo-Fraenkel + Axiom of choice)

A halmazelmélet nyelve egy darab relációjelből, az $\in$ jelből áll. Ez azt jelenti, hogy az axiómák logikai jelekből ($\wedge$: és, $\vee$: vagy, $\forall$: minden, $=$: egyenlő stb.) és az $\in$ jelből álló formulák. Minden változójel halmazt jelöl, más objektumokra nincsen szükség.

- 1. Meghatározottsági axióma:** Ha két halmaznak ugyanazok az elemei, akkor a két halmaz megegyezik.

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

- 2. Pár axióma:** Tetszőleges két halmazhoz van olyan halmaz aminek pontosan ezek az elemei.

$$\forall x \forall y \exists z (w \in z \leftrightarrow (w = x \vee w = y))$$

Azaz minden x, y halmazhoz létezik a $z = \{x, y\}$ halmaz.

- 3. Unió axióma:** Halmaznyi sok halmaz uniója is halmaz.

$$\forall x \exists y (z \in y \leftrightarrow (\exists w (z \in w \wedge w \in x)))$$

Azaz minden x halmazhoz létezik az $y = \cup x = \bigcup_{w \in x} w$ halmaz, az x (elemeinek az) uniója.

- 4. Hatványhalmaz axióma:** Egy halmaz összes részhalmazainak a halmaza is halmaz.

$$\forall x \exists y (z \in y \leftrightarrow (\forall w (w \in z \rightarrow w \in x)))$$

Azaz minden x halmazhoz létezik $y = \mathcal{P}(x) = \{z \mid z \subseteq x\}$, az x hatványhalmaza.

- 5. Részhalmaz axiómaséma:** Egy halmaz bizonyos tulajdonságú elemei halmazt alkotnak.

Minden ϕ formulára:

$$\forall \vec{p} \forall x \exists y (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \phi(z, \vec{p}))) .$$

Azaz (a $\vec{p}$ paraméterek tetszőleges rögzítése mellett) minden x halmazhoz létezik $y = \{z \in x \mid \phi(z, \vec{p})\}$, az x " ϕ tulajdonságú" elemeinek a halmaza.

Ezen a ponton érdemes bevezetni a függvény fogalmát. Definiáljuk először a *rendezett párt*: $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, vagy bármi olyan kifejezés megfelel, amellyel $(x, y) = (z, w) \leftrightarrow (x = z \wedge y = w)$ teljesül. Egy f halmaz *függvény*, ha minden eleme rendezett pár és minden x -hez legföljebb egy olyan y van, amellyel $(x, y) \in f$. Szokásosabb írásmódban: $f(x) = y$. Az külön bizonyítást igényel, és az eddig felsorolt axiómákból következik, hogy egy függvény értelmezési tartománya és értékkészlete is halmaz.

Vannak olyan hozzárendelések, amik nem függvények, mert az értelmezési tartományuk nem halmaz, például a mindenre értelmezett $x \mapsto \{x\}$. Ezeket *operációknak* nevezzük.

- 6. Pótlás axiómaséma:** Egy operációt halmazra megszorítva függvényt kapunk. (Másképpen: egy halmaz operációnál vett képe is halmaz.)
Minden $\phi(z, w, \vec{p})$ formulára:

$$\forall \vec{p} (\forall z \exists! w \phi(z, w, \vec{p}) \rightarrow \forall x \exists y (w \in y \leftrightarrow \exists z (z \in x \wedge \phi(z, w, \vec{p})))) .$$

Azaz, ha a ϕ formula a $\vec{p}$ paraméterekkel operációt definiál, akkor minden x halmaznak ezen operáció szerinti képe, $y = \{w \mid \exists z \in x, \text{ hogy } \phi(z, w, \vec{p})\}$ is halmaz.

- 7. Végtelenségi axióma:** Van végtelen halmaz.

$$\exists x (\exists w (w \in x \wedge \forall z (z \notin w)) \wedge \forall w (w \in x \rightarrow \exists z (z \in x \wedge (y \in z \leftrightarrow (y \in w \vee y = w)))))$$

Azaz létezik az $x = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$ halmaz, a természetes számok halmazának Neumann-féle modellje ($0 = \emptyset, n + 1 = \{0, 1, 2, \dots, n\} = n \cup \{n\}$).

- 8. Jófundáltsági axióma:** Minden nem üres halmaznak van tőle diszjunkt eleme.

$$\forall x (\exists w (w \in x) \rightarrow \exists y (y \in x \wedge \forall z (z \notin x \vee z \notin y)))$$

- 9. Kiválasztási axióma:** Ha egy halmaz elemei nem üres halmazok, akkor van olyan függvény, amely mindegyikükből kiválaszt egy elemet.

$$\forall x (\forall y (y \in x \rightarrow \exists z (z \in y)) \rightarrow \exists f ((f : x \rightarrow \cup x \text{ függvény}) \wedge \forall y (y \in x \rightarrow f(y) \in y)))$$

2. Megjegyzések

- Ez végtelen sok axióma: a két axiómaséma minden formulára egy-egy axióma, formulákból pedig (megszámlálhatóan) végtelen sok van.
- A Részhalmaz axiómaséma következik a Pótlásból, tehát azt fölösleges külön fölteni.
- Ha azonban mégis fölteszük, akkor az Unió, a Hatványhalmaz és a Pótlás axiómákat is gyengíthetjük: elég az ezen axiómákban szereplő y -nál bővebb halmaz létezését fölteni, hiszen ebből már következik az y létezése is a Részhalmaz axiómaséma miatt.
- A Pótlás és a Részhalmaz axiómasémákban a $\vec{p}$ több változót jelöl(het), ezek úgy mond paraméterek. Bizonyos tulajdonságoknak eleget tevő halmazok "összességét" *osztálynak* nevezzük, vagyis egy adott $\phi(x, \vec{p})$ formulát (rögzített paraméterértékek mellett) kielégítő x -ek osztályt alkotnak. A Részhalmaz axiómasémát így is fogalmazhatjuk: halmaz és osztály metszete halmaz.
- Egyetlen axióma van, amely egy halmaz létezését mondja ki, a végtelenségi axióma. A többi axióma (a Meghatározottság kivételével) mind arról szól, hogy már meglévő halmazokból milyen új halmazokat lehet előállítani.
- A Jófundáltság csak egy technikai föltevés, ezzel kizárjuk például azt, hogy egy halmaz eleme lehessen önmagának, vagy hogy $x \in y$ és $y \in x$ is fennállhasson.
- A kumulatív hierarchia: minden rendszámhoz definiálunk egy halmazt. $V_0 = \emptyset, V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ és $V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$, ha α limeszrendszám. A Jófundáltsági axióma ekvivalens azzal, hogy minden halmaz benne van a kumulatív hierarchiában, vagyis minden x -hez van olyan α rendszám, hogy $x \in V_\alpha$. Másképp szólva, minden halmaz fölépíthető az üres halmazból.