

VARIÁCIÓK A RAMSEY TÉMÁRA

In memoriam Gallai Tibor

GYÁRFÁS ANDRÁS¹

1. KLIKKFEDÉS TÉTEL ÉS GALLAI SZÁMOK

1.1. Intervallumuniók Gallai számai

Az első fejezetben szereplő vizsgálatok előzménye és bizonyos fokig ihletője Gallai egy kérdése volt 1968-ban. Tekintsük a sík két párhuzamos egyenesét, R_1 -et és R_2 -t. *Szeperált intervallumpárok* rendszerén értsünk olyan véges halmazrendszert (hipergráfot), melynek elemei (élei) R_1 és R_2 egy-egy zárt intervallumának egyesítéseként írhatók. Gallai kérdése az volt, igaz-e, hogy páronként metsző szeperált intervallumpárok rendszerét két pont lefoglalja? Vezessük be [DGK] nyomán hipergráfok $\mathcal{H}$ családjának $g(\mathcal{H}, t)$ Gallai számait:

$$g(\mathcal{H}, t) = \sup_{H \in \mathcal{H}} \{ \tau(H) : \nu(H) = t \}$$

ahol $\tau(H)$ jelöli H minimális lefoglaló pontthalmazának számosságát, $\nu(H)$ pedig H páronként diszjunkt éleinek maximális számát.²

Szeperált intervallumpárok mintájára vezessük be a szeperált k -intervallumok $\mathcal{S}^k$ családját: ezek olyan véges halmazrendszerek, melynek elemei $R_1, R_2, \dots, R_k$ párhuzamos egyenesekről vett zárt intervallumok egyesítéseként írhatók. A $k = 1$ esetben $\mathcal{S}^1$ nem más, mint az intervallumrendszerek $\mathcal{I}$ családja, és Gallai egy közismert (publikálatlan) tétele szerint $g(\mathcal{I}, t) = t$ minden t természetes számra (ez alapvető tétel a gráfok elméletében). Gallai már említett kérdése az volt, hogy fennáll-e $g(\mathcal{S}^2, 1) = 2$. Ez, valamint $g(\mathcal{S}^k, t) < \infty$ (k és t fix) a következő tétel folyománya.

1.1.1 tétel. ([GYL1]) $g(\mathcal{S}^k, t) \leq g(\mathcal{S}^{k-1}, T) + t$, ahol $T = ((t+1)^{k-1} - 1)t$.

A tétel bizonyítása a következő lemmán alapszik, mely k szerinti indukcióval könnyen bizonyítható.

¹ Az ELTE matematikus szakán 1968-ban szerzett diplomát. Az MTA SZTAKI tudományos főmunkatársa.

² A cikk végén, a függelékben ismertetjük a gyakrabban használt jelöléseket és definíciókat.

1.1.2 lemma. ([GYL1]) Legyen $t \geq 2$ és $H_1, H_2, \dots, H_t \in S^k$. Ha $\nu(\{A_1, A_2, \dots, A_t\}) < t$ minden $A_j \in H_j$ választásra, akkor valamely $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ -re $\nu(H_i) < t^k$.

1.1.3 kérdés. Milyen kisebb függvény írható t^k helyett az 1.1.2 lemmában?

A $k = 1$ esetben a lemma és Gallai tétele ezt adja:

1.1.4 következmény. Ha $H_1, H_2, \dots, H_t \in \mathcal{I}$ ($t \geq 2$) és $\nu(\{A_1, A_2, \dots, A_t\}) < t$ minden $A_j \in H_j$ választásra, akkor valamely $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ -re $\tau(H_i) < t$.

Ez a következmény a Gallai tétel és a Helly tétel Lovász-féle általánosításának ([LO1]) közös megfogalmazása ($H_1 = H_2 = \dots = H_t$ esetén az előbbi, $t = 2$ esetén az utóbbi).

1.1.1 tétel bizonyítása. Legyen $H = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ szeparált k -intervallumok rendszere, $\nu(H) = t$. Írjuk A_i -t $A_i = I_i \cup B_i$ alakban, ahol $I_i \subset R_1$, B_i pedig $(k-1)$ -intervallum. Defináljunk R_1 -en egy pontsorozatot. Legyen $P_0 = -\infty$ és legyen P_j a lehető legjobbra a következő tulajdonság mellett:

$$\nu(\{B_i : I_i \subset (P_{j-1}, P_j)\}) = (t+1)^{k-1} - 1$$

Legyen $H_j = \{B_i : I_i \subset (P_{j-1}, P_j)\}$. Ekkor P_j definíciója miatt $\nu(H_j) = (t+1)^{k-1}$ és 1.1.2 lemma miatt $P_{t+1} = \infty$. Ezért a $P_1, \dots, P_t$ pontokkal le nem fogott H -beli k -intervallumok az $R_2, R_3, \dots, R_k$ egyeneseken olyan H' $(k-1)$ -intervallumrendszert alkotnak, melyre $\nu(H') \leq t((t+1)^{k-1} - 1)$. Ebből a tétel következik. ■

A $k = 2, t = 1$ esetben az 1.1.1 tételből $g(S^2, 1) \leq 2$ adódik. Mivel $g(S^2, 1) \geq 2$ triviális példából következik, kapjuk:

1.1.5 következmény. ([GYL1]) $g(S^2, 1) = 2$.

Az 1.1.1 tétel bizonyítási módszere már $k = 3, t = 1$ esetén is durva, $g(S^3, 1) \leq 43$ -at ad. Ezzel szemben az igazság:

1.1.6 tétel. ([GYL1]) $g(S^3, 1) = 4$.

Mivel a bizonyítás elég komplikált, mellőzzük. Mindenesetre jó tudni, hogy általában $g(S^k, 1) \neq k$.

1.1.7 probléma. Kíváncsú lenne $g(S^k, 1)$ jó becslése, esetleg olyan, mely közvetlenül $g(S^{k-1}, 1)$ függvényében korlátozza $g(S^k, 1)$ -et. Érdekes lenne még $g(S^2, t)$ helyes nagyságrendje (az 1.1.1 tételből $g(S^2, t) \leq t^2 + t$ adódik).

1.1.8. Intervallumgráfok uniójának klikkfedése

A $g(S^k, t)$ Gallai szám interpretálható a következőképpen is. Tekintsük azon G gráfokat, melyekre $\alpha(G) = t$ és melyek felírhatók k intervallumgráf, $G_1, \dots, G_k$

egyesítéseként. Ekkor $g(S^k, t)$ a minimális m , melyre minden ilyen G gráf csúcsai lefedhetők legfeljebb m olyan teljes gráffal, melyek valamely G_i -ben vannak. Az 1.1.1 tétel szerint m csak k -tól és t -től függ. A klikkfedés tétele (1.2.3') szerint ez akkor is igaz marad, ha csak annyit teszünk fel, hogy nem tartalmaznak a G_i gráfok feszített részgráfként C_4 -et (négy pontú kört).

1.1.9. Nem szeparált k -intervallumok Gallai számai

Azt a természetes kérdést is megvizsgáltuk a [GYL1] dolgozatban, hogy mi történik, ha nem követeljük meg a k -intervallumok szeparáltságát, azaz $R_1 = R_2 = \dots = R_k = R$. Jelölje $\mathcal{I}^k$ a k -intervallumok családját, tehát $H \in \mathcal{I}^k$, ha H véges sok olyan halmazból áll, melyek R k zárt intervallumának egyesítéseként írhatók.

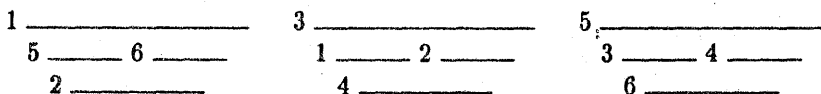
1.1.10 tétel. ([GYL1]) Fix k és t esetén $g(\mathcal{I}^k, t) < \infty$.

Bizonyítás. (k -intervallumok szeparációja). Legyen $H \in \mathcal{I}^k$, $\nu(H) = t$. Legyen H_1 az a rendszer, melyet H -ból kapunk a k -intervallumok első két komponensét uniójuk konvex burkával pótolva. Ekkor H_1 -nek van T_1 transzverzálisa, melyre $|T_1| \leq g(\mathcal{I}^{k-1}, t)$. A T_1 által lefoglalt halmazokat H -ból elhagyva, a maradék második és harmadik komponenseit pótoljuk konvex burkukkal, így kapjuk a H_2 rendszert, melynek megint van $|T_2| \leq g(\mathcal{I}^{k-1}, t)$ -nek eleget tevő T_2 transzverzálisa. Az eljárást $(k-1)$ -szer iteráljuk. Azok a k -intervallumok H -ban, melyeket nem fog le a $T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_{k-1}$ halmaz, szeparálhatók az $x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1}$ pontrendszerek valamelyikével, ahol az x_i -k egymástól függetlenül végigfutnak T_i elemein. Így a bizonyítás az 1.1.1 tételre való hivatkozással fejezhető be. ■

A $k = 2, t = 1$ esetben pontos tétel adódik.

1.1.11 tétel. ([GYL1]) $g(\mathcal{I}^2, 1) = 3$.

Bizonyítás. Legyen $H \in \mathcal{I}^2$, $\nu(H) = 1$ és legyen H_1 az az intervallumrendszer, melyet H -ból kapunk az intervallumpárokat konvex burkukkal helyettesítve. Ekkor H_1 lefoglalható egy $x \in R$ ponttal és H -ból elhagyva az x által lefoglalt párokat, a többi párt x szeparálja, így 1.1.5 alapján két ponttal lefoglalható a többi pár. Tehát $g(\mathcal{I}^2, 1) \leq 3$. A következő példa mutatja, hogy $g(\mathcal{I}^2, 1) \geq 3$:



1.1.12. Fák részerdői

Az előző szakaszok minden kérdése általánosítható úgy, hogy a számegyes intervallumai helyett egy fa részfáit tekintjük. A [GYL1] eredményei azt mutatják, hogy egyes tételek változatlanul igazak ebben az általánosabb formában. Például az 1.1.5 és 1.1.11 tételekkel ez a helyzet ([GYL1]). Az utóbbi esetben az általánosítás bizonyítása azonban jóval nehezebb az 1.1.11 tételénél. Az egzisztenciátételek

(1.1.1 és 1.1.10) általánosítására a klikkfedés tétel használható (1.3.3 A, 1.3.5). Nem ismert azonban olyan módszer, mellyel Gallai számok egyenlőségét lehetne bizonyítani.

1.1.13 probléma. ([LE]) Igaz-e, hogy k -intervallumok és k komponensű erdők Gallai számai egyenlők?

1.2. Klikkfedés tétel

A szeparált k -intervallumok Gallai számainak korlátossága (1.1.1 tétel) felveti, hogy nem lehetne-e olyan általánosítást találni, mely az intervallumrendszernek csupán bizonyos strukturális tulajdonságait használja. A [GY1] dolgozatban ilyen egzisztenciátétel szerepel, mely a gráfokra vonatkozó Ramsey tétel lényeges általánosítása és több szempontból is a lehető legtagább általánosítás. Ezt a tételt fogjuk kimondani és bebizonyítani ebben a szakaszban. Alkalmazásait az 1.3 szakaszban tekintjük át (de az 1.4.2 tételnél is alkalmazzuk). Először szükség van néhány definícióra.

1.2.1. A $\mathcal{Q}$ gráfosztály

Jelölje $\mathcal{Q}$ azon gráfok osztályát, melyek komplementerében nincs két élnek közös pontja. Ez a gráfosztály igen közel áll a teljes gráfokhoz, $\mathcal{Q} = \bigcup_{p,q} \mathcal{Q}_{p,q}$ ahol $\mathcal{Q}_{p,q}$ jelöli azt a gráfot, melynek komplementere p független élből és q izolált pontból áll. Legyen $\mathcal{Q}_p = \mathcal{Q}_{p,0}$, ezt szokás $2p$ pontú kottépartiti gráfnak, vagy oktaéder gráfnak nevezni. A $\mathcal{Q}_2$ gráf nem más, mint C_4 , a négypontú kör. A $\mathcal{Q}_{0,q}$ gráf pedig a q pontú teljes gráf, K_q .

1.2.2. Színezett élű gráfok klikkfedési száma

Legyenek a G gráf élei k színnel színezve, egy él több színt is kaphat. Ekkor G klikkfedési száma, $\theta(G)$, jelentse azt a legkisebb m számot, melyre G pontjai lefedhetők m egyszínű teljes részgráf pontjaival. A $k = 1$ esetben a definíció és a jelölés összhangban van a színezetlen gráfok $\theta(G)$ klikkfedési számával, vagyis G komplementerének kromatikus számával. Ezért a $\theta(G)$ jelölést színezett és színezetlen élű gráfokra egyaránt használhatjuk.

1.2.3 tétel. (Klikkfedés tétel, [GY1]) Rögzített $G_1, G_2, \dots, G_k \in \mathcal{Q}$ gráfokhoz létezik olyan $s = s(G_1, G_2, \dots, G_k)$ természetes szám, melyre igaz a következő: ha K teljes gráf éleit úgy színezzük k színnel, hogy $\theta(K) \geq s$, akkor valamely i -re ($1 \leq i \leq k$) K feszítve tartalmazza G_i -t az i színben.

Megjegyzések.

1. Ha $G_1, G_2, \dots, G_k$ teljes gráfok és a hozzájuk tartozó Ramsey számot $R = R(G_1, G_2, \dots, G_k)$ jelöli, akkor

$$s < R \leq \left(\max_{1 \leq i \leq k} |V(G_i)| - 1 \right) (s - 1) + 1$$

tehát s létezéséből triviálisan következik R létezése.

2. A tételben a $\mathcal{Q}$ gráfosztály nem bővíthető „diagonális” értelemben: ha olyan $\mathcal{H}$ gráfosztályt keresünk, melyre minden $G_1, G_2, \dots, G_k \in \mathcal{H}$ választás esetén fennáll a tétel, akkor $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{Q}$ ([GY1]). Lehetséges azonban „nem diagonális” kérdés, melyre az 1.4.1 szakaszban térünk vissza.

3. A tételben K teljes gráf helyett nyilván tetszőleges G gráfot írhatunk, azon az áron, hogy s nem csak $G_1, G_2, \dots, G_k$ -től, hanem $\alpha(G)$ -től is függ. Így az 1.2.3 tétel következő variánsát kapjuk.

1.2.3' tétel. ([GY1]) A $G_1, G_2, \dots, G_k \in \mathcal{Q}$ gráfokhoz és α_0 természetes számhoz létezik olyan $s = s(G_1, G_2, \dots, G_k, \alpha_0)$ szám, melyre igaz: ha egy G gráfra $\alpha(G) \leq \alpha_0$ és G éleit úgy színezzük k színnel (egy él több színt is kaphat), hogy $\theta(G) \geq s$, akkor valamely i -re ($1 \leq i \leq k$) G feszítve tartalmazza G_i -t az i színben.

1.2.3 tétel bizonyítása (osztályozó struktúra keresése).

a. Nyilván elég azt az esetet tekinteni, amikor $G_i = Q_{p_i}$ ($1 \leq i \leq k$), hiszen tetszőleges $\mathcal{Q}$ -beli gráf feszített részgráfja Q_p -nek valamely p -re.

b. A bizonyítás egyszerűbb eleme a Ramsey tételből ismert indukció a $(p_1, p_2, \dots, p_k)$ vektor komponenseire. A kezdőeset triviális, hiszen $s(Q_{p_1}, Q_{p_2}, \dots, Q_{p_k}) = 1$ ha bármelyik $p_i = 1$.

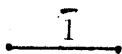
c. A bizonyítás lelke az „osztályozó struktúra” rekurzív definíciója. A $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ színhalmazzal színezett K teljes gráfban $H(C)$ osztályozó struktúrát így definiáljuk: ha $C = \{c_i\}$ (azaz $|C| = 1$), akkor $H(C)$ egy olyan él K -ban, mely nincs a c_i színnel színezve. Ha $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ és $k \geq 2$ akkor legyen $H(C)$ -nek egy kitüntetett x pontja, melyet $H(C)$ centrumának nevezünk. A $H(C)$ - x legyen felírható $T_1 UT_2 U \dots UT_k$ alakban, ahol tetszőleges $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ -re igaz:

— T_i osztályozó struktúra a $C - \{c_i\}$ színhalmazra

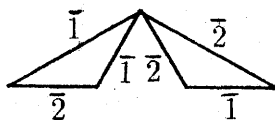
— ha $y \in V(T_i)$, akkor az xy élen nincs c_i szín

Példa:

$$C = \{1\}$$



$$C = \{1, 2\}$$



(A felülvonás azt jelenti, hogy az élen nem szerepel az illető szín.)

Az osztályozó struktúra definíciójából bizonyíthatók az alábbi állítások.

d. állítás. Egy osztályozó struktúra pontszáma felülről becsülhető a színszám (k) függvényében.

e. állítás. Tegyük fel, hogy K élei a $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ színhalmazzal vannak színezve és $H(C)$ egy osztályozó struktúra K -ban. Ekkor minden $y \in V(K) - V(H)$ beosztható $H(C)$ valamely u, v pontpárjához úgy, hogy valamely i -re ($1 \leq i \leq k$) az uv élen nincs c_i szín, de az yu és yv éleken van c_i szín.

Ha K $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ színhalmazzal való színezésében van $H(C)$ osztályozó struktúra, akkor e. alapján $V(K) - H(C)$ pontjai legfeljebb $k \binom{|H|}{2}$ csoportba oszthatók és minden csoport klikkfedése korlátos b. alapján. A csoportok száma a d. állítás miatt korlátos. Így a bizonyítás teljes, ha belátjuk:

f. állítás. Ha K teljes gráf $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ színhalmazzal színezésében nincs $H(C)$ osztályozó struktúra, sem Q_p , feszítve az i színben, akkor $\theta(K)$ korlátos.

Ezt az állítást a b. indukció és k -ra vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. Jelölje L_{c_i} K azon pontjait, melyek $\bar{c}_i$ -környezetében nincs $C - \{c_i\}$ színekre osztályozó struktúra. (Az u pont $\bar{c}_i$ -környezete azon v pontokból áll, melyekre uv nem c_i színű.) Elég $\theta(L_{c_i})$ korlátosságát belátni, mert az L_{c_i} halmazok egyesítése $V(K)$. Legyen uv olyan él L_{c_i} -ben, melyen nincs c_i szín. Az L_{c_i} definíciója miatt u (és v) $\bar{c}_i$ -környezetei L_{c_i} -ben nem tartalmaznak $C - \{c_i\}$ -re osztályozó struktúrát, így k -ra vonatkozó indukcióra hivatkozhatunk. Az L_{c_i} azon pontjainál, melyek mind u , mind v c_i -környezetében benne vannak, a korlátos fedés b.-ből következik.

1.3. A klikkfedés tétel alkalmazásai

Legyen G egy gráf. A H hipergráfot G -mentesnek nevezzük, ha metszésgráfja, $L(H)$, nem tartalmazza G -t feszített részgráfként. Egy hipergráfcsalád G -mentes, ha minden hipergráfja G -mentes. A klikkfedés tételt először arra alkalmazzuk, hogy hipergráfok összegének részhipergráfjaira bizonyítsuk a Gallai számok korlátosságát.

1.3.1. Hipergráfok összege, többszörözése

Legyenek $H_1, H_2, \dots, H_k$ hipergráfok. Összegük, $\sum H_i$, az a hipergráf, melynek pontthalmaza $\cup V(H_i)$, élhalmaza pedig $\{e = e_1 \cup e_2 \cup \dots \cup e_k : e_i \in H_i\}$. Amennyiben $H_1 = H_2 = \dots = H_k = H$, akkor H többszörözéséről (k -szorozásáról) beszélünk, melyet H^k -val jelölünk. Az összeg ezen definíciója ugyanaz, mint a „join” ([BERGE] 488.old.) vagy „union” ([WELSH] 288.old.). Ha például $R_1, R_2, \dots, R_k$ a sík párhuzamos egyenesei és H_i az R_i összes zárt intervallumainak hipergráfja, akkor $\sum H_i$ részhipergráfjainak családja nem más, mint S^k , a szeparált k -intervallumok családja. Ha a példát úgy módosítjuk, hogy $R_1 = R_2 = \dots = R_k = R$ és H az R összes zárt intervallumából álló hipergráf, akkor H^k részhipergráfjainak családja I^k lesz, a k -intervallumok családja.

1.3.2. Diszjunkt összeg részhipergráfjainak Gallai számai

A klikkfedés tétel közvetlen alkalmazása az

1.3.3-tétel. ([GY1]) Legyenek $G_1, G_2, \dots, G_k \in \mathcal{Q}$ gráfok és $H_1, H_2, \dots, H_k$ pont-diszjunkt hipergráfok. Tegyük fel, hogy H_i G_i -mentes és $g(\text{rész}(H_i), 1) < \infty$. $(\text{rész}(H))$ jelöli H véges sok élből álló részhipergráfjainak családját, lásd 4.1). Ekkor $g(\text{rész}(\sum H_i), t) < \infty$.

Bizonyítás. Legyen $H \in \text{rész}(\sum H_i)$ és $\nu(H) = t$. Jelölje G H metszésgráfját, ekkor $\alpha(G) = \nu(H) = t$. Színezzük ki G éleit a következőképpen. Ha $e, f \in H$ és $e = e_1 \cup e_2 \cup \dots \cup e_k$, $f = f_1 \cup f_2 \cup \dots \cup f_k$, továbbá $e \cap f \neq \emptyset$, akkor G $v_e v_f$ élét színezzük mindazon j színekkel, melyekre $e_j \cap f_j \neq \emptyset$. A H_i hipergráfok diszjunktága miatt G minden éle színezve van és 1.2.3' tételt alkalmazva kapjuk, hogy $\theta(G)$ korlátos. A G klikkfedésének egyszínű klikkjei viszont páronként metsző éleknek felelnek meg H_i -ben, melyek $g(\text{rész}(H_i), 1) < \infty$ ponttal lefoghatók.

Az 1.3.3. tétel olyan H hipergráfra alkalmazható, mely G -mentes valamely $G \in \mathcal{Q}$ -ra és $g(\text{rész}(H), 1) < \infty$. A következő példák az intervallumok különböző irányú általánosításai, így ezekre alkalmazva az 1.3.3 tételt, az 1.1.1 tétel különböző általánosításait kapjuk.

A. Fák részfái. Legyen H egy fa részfáiból álló hipergráf. Ekkor H $\mathcal{Q}_2$ -mentes (sőt, metszésgráfja merevkörű) és $g(\text{rész}(H), 1) = 1$ (Helly tulajdonság).

B. A d dimenziós tér téglái (boxai). Ha H hipergráf élei a d dimenziós tér tengelypárhuzamos oldalú téglái (boxok), akkor H $\mathcal{Q}_{d+1}$ -mentes ([RO]) és nyilván $g(\text{rész}(H), 1) = 1$.

C. Homotetikus konvex sokszögek. Legyen P a sík egy konvex sokszöge. Ha $H = H(P)$ hipergráf élei azok a sokszögek, melyek P -ből pozitív homotéciával állnak elő, akkor $g(\text{rész}(H), 1) < \infty$ ([DGK]). Másrészt H $\mathcal{Q}_{h+1}$ -mentes, ahol h jelöli P oldalirányainak számát ([GY1]).

1.3.4. Többszörözés részhipergráfjainak Gallai száma

Az 1.3.3 tételben lényeges a hipergráfok diszjunktága, így az csak szeparált rendszerek Gallai számainak korlátosságát mutathatja. A $\mathcal{Q}_2$ -mentes hipergráfokra viszont többszörözés esetén is igaz az 1.3.3 megfelelője. A következő tétel ezért 1.1.10 általánosítása.

1.3.5 tétel. ([GYL3]) Ha H hipergráf $\mathcal{Q}_2$ -mentes és $g(\text{rész}(H), 1) < \infty$, akkor $g(\text{rész}(H^k), t) < \infty$. (k, t rögzített.)

Bizonyítás. Legyen $M \in \text{rész}(H^k)$, $\nu(M) = t$. Minden $e_i \in M$ él felírható $e_i = e_{i1} \cup e_{i2} \cup \dots \cup e_{ik}$ alakban, ahol $e_{ij} \in H$. Nevezzük e_{ij} -t e_i j -edik komponensének. Jelölje G M metszésgráfját és színezzük ki G éleit a következő módon. Ha e_i és e_j M két metsző éle, i és j jelölje G megfelelő pontjait. Színezzük G ij élét

- p színnel ($1 \leq p \leq k$) ha e_i és e_j p -edik komponensei metszők (egy él itt több szint is kaphat),
- késsel, ha e_i -nek és e_j -nek van közös komponense,
- pirossal, ha az előzőkben nem kapott szint.

Ily módon G minden élét kiszíneztük legalább egy színnel, legfeljebb $k + 2$ szint használva. Az $1, 2, \dots, k$ színekben G nem tartalmazhatja feszítve Q_2 gráfot, mert H Q_2 -mentes. Könnyű belátni, hogy G kék színben nem tartalmazhat k^2 -nél több pontú klikket. Tegyük fel, hogy G piros színben tartalmaz egy K_s klikket, az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy K_s pontjai $1, 2, \dots, s$. Tekintsük azt a T gráfot, melynek x_{ij} pontjai $e_{ij} \in H$ éleknek felelnek meg, $i = 1, 2, \dots, s$ és $j = 1, 2, \dots, k$. Ha $i_1 \neq i_2$ akkor az $x_{i_1 j_1}$ és $x_{i_2 j_2}$ pontok között T -ben pontosan akkor legyen él, ha $e_{i_1 j_1} \cap e_{i_2 j_2} \neq \emptyset$. A piros élek definíciójából következik, hogy $j_1 = j_2$ esetén $x_{i_1 j_1}$ és $x_{i_2 j_2}$ közt nincs él T -ben, továbbá bármely $i_1 \neq i_2$ esetén van olyan j_1 és j_2 , hogy $x_{i_1 j_1}$ és $x_{i_2 j_2}$ között van él T -ben. Ezért T k -osztályú gráf, melynek legalább $\binom{s}{2}$ éle van, így van két olyan osztálya, melyek között legalább $\binom{s}{2} / \binom{k}{2}$ él van. Jól ismert sűrűségtétel szerint ([GRS]) 95.old.) e két osztály közötti élek C_4 -et határoznak meg, ha s elég nagy, ez pedig ellentmond annak, hogy H Q_2 -mentes. Tehát s nem lehet nagyobb ck^2 -nél.

A G gráf tehát $k + 2$ színnel színezett, $\alpha(G) = t$, és minden színben tiltott Q osztály valamely gráfja. Ebből 1.2.3' tétellel következik tételünk. ■

Az 1.3.5 tétel Q_2 helyett Q_3 -mal már nem igaz, ezt a következő példa mutatja ([GYL3]). Legyen H a sík függőleges és vízszintes egyeneseiből álló hipergráf, H Q_3 -mentes és $g(\text{rész}(H), 1) = 1$. Viszont az $x = i$, $y = i$ egyenespárok $i = 1, 2, \dots, n$ -re H^2 -nek olyan M részhipergráfját adják, melyre $\nu(M) = 1$, $\tau(M) = \lceil n/2 \rceil$ és így $g(\text{rész}(H^2), 1) = \infty$.

1.3.6. Magasabb dimenziós Gallai számok

Definiáljuk $\mathcal{H}$ hipergráfcsalád p -dimenziós Gallai számait $1 \leq p \leq t$ esetén:

$$g(\mathcal{H}, t, p) = \sup_{H \in \mathcal{H}} \{ \tau(H) : \nu_p(H) = t \}$$

ahol $\nu_p(H)$ jelenti H azon éleinek maximális számát, melyek között nincs $p + 1$ élnek közös pontja. Mivel $\nu_1(H) = \nu(H)$, az eddig definiált Gallai számok az egydimenziós Gallai számok. A klikkfedés tételt az 1.3.5 tétel bizonyításában látott módon használva, Lehel bebizonyította az 1.3.5 következő általánosítását.

1.3.7 tétel. ([LE]) Legyen H Q_{d+1} -mentes hipergráf, $g(\text{rész}(H), 1) < \infty$ és $p = \min(k, d)$. Ekkor (fix $t, d, k - ra$) $g(\text{rész}(H^k), t, p) < \infty$.

Ez a tétel $d = 1$ esetén az 1.3.5 tételt adja. Fő alkalmazása az, amikor H a d dimenziós téglák hipergráfja.

Régi nyitott kérdés, hogy igaz-e $g(\text{rész}(H), 3, 2) < \infty$ a sík konvex halmazából álló H hipergráfra ([DGK]). Ennél gyengébb állítást be lehet látni a klikkfedés tétel segítségével.

1.3.8 tétel. Jelölje $\mathcal{H}_j$ a sík konvex halmazaiból álló olyan H hipergráfok családját, melyekhez van olyan $H' \subset H$, melyre $|H'| \leq j$ és $\tau(H') = 3$. Ekkor $g(\mathcal{H}_j, 3, 2) < \infty$ (j fix).

1.4. A klikkfedés tétel általánosítási lehetőségei

1.4.1 Nem diagonális eset gráfokra

A klikkfedés tételnél azt a legszélesebb gráfosztályt határoztuk meg (a $\mathcal{Q}$ gráfosztályt), melyre minden $G_1, G_2, \dots, G_k \in \mathcal{Q}$ esetén a K teljes gráf éleinek minden $\theta(K) \geq f(G_1, G_2, \dots, G_k)$ feltételnek eleget tevő k -színezésében valamely i -re ($1 \leq i \leq k$) K az i színben feszítve tartalmazza G_i -t. Ez diagonális Ramsey típusú tétel. A nem-diagonális esetnek az felel meg, hogy olyan $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_k$ gráfosztályokat keressük, melyekre $G_i \in \mathcal{G}_i$ tetszőleges választására K teljes gráf éleinek minden „nagy klikkfedésű” k -színezésében lesz G_i feszítve az i színben. A [GY2] konstrukció alapján kiderül, hogy triviális esetektől eltekintve csak két lehetőség van a $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_k$ osztályok választására:

- (1) Minden $\mathcal{G}_i = \mathcal{Q}$
- (2) Egy kivétellel minden $\mathcal{G}_i$ teljes gráfokból áll, a kivételes osztály pedig olyan gráfokból, melyek komplementerében nincs kör.

Az (1) esetet a klikkfedés tétel elintézi. A (2) esetben egyszerű megfontolás mutatja, hogy elég a $k = 2$ esetre szorítkozni, továbbá feltételezhetjük, hogy K olyan 2-színezéséről van szó, melyben minden élnek egyetlen színe van. Ezen redukciók után a (2) feltételnek megfelelő klikkfedési probléma a következő sejtéshez vezet.

1.4.2. Feszített fa sejtés. ([GY2], [SU]) Legyen F körnélküli gráf, p pedig természetes szám. Van olyan $m = m(F, p)$ szám, hogy amennyiben G gráfra $\omega(G) \leq p$ és $\chi(G) \geq m$, akkor F feszített részgráfja G -nek.

Ez a sejtés vezetett a χ -korlátos gráfok vizsgálatához, melyet a második fejezetben tárgyalunk.

1.4.3. Nem-diagonális klikkfedés hipergráfokra

A [GY1]-ben már szerepel az a megjegyzés, hogy a diagonális klikkfedés tétel hipergráfokra már nem ad újat a Ramsey tételhez képest. Pontosabban, r -uniform hipergráfok esetén a diagonális klikkfedés tétel csak arra az osztályra áll, mely a teljes r -uniform hipergráfokat és azt a (triviális) hipergráfot tartalmazza, melynek r pontja van és nincs éle. A gráfokhoz hasonlóan, itt is csak akkor van remény klikkfedés tételre, ha $\mathcal{H}_1$ teljes hipergráfokból áll, $\mathcal{H}_2$ pedig olyan hipergráfokból, melyek komplementerében nincs kör. A legelső eset a 3-uniform hipergráfok esete, $H_1 = K_4^3$, $H_2 = K_4^3 - e$ választással. Ebben az esetben igaz a klikkfedés tétel és a bizonyítás a gráfok diagonális klikkfedés tételét használja $Q_2 \in \mathcal{Q}$ választással, két színre. Az 1.4.4 tétel után két konstrukció következik, melyek azt mutatják, hogy a tétel nem általánosítható bizonyos értelemben.

1.4.4 tétel. Van olyan c konstans, melyre igaz: ha H 3-uniform hipergráfra $\alpha(H) = 3$ és $K_4^3 - e$ nem feszített részhipergráfja H -nak, akkor $\theta(H) \leq c$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $ABC \notin H$. A $V(H) - \{A, B, C\}$ partícionálható X_1, X_2, X_3 halmazokra, hogy $PAB \notin H$ ha $P \in X_1$, $PAC \notin H$ ha $P \in X_2$, $PBC \notin H$ ha $P \in X_3$. Elég belátni, hogy X_1 lefedhető c klikkel. Legyen $D, E \in X_1$, $D \neq E$. Mivel $DAB, EAB \notin H$, $DEA \in H$ vagy $DEB \in H$ ($\alpha(H) = 3$ feltétel miatt). Ezért X_1 felfogható egy két színnel (A és B) színekkel színezett teljes gráfnak, melyet K_1 -el jelölünk (egy él két színt is kaphat). A K_1 egyszínű klikkjei H -ban is klikket feszítenek a $K_4^3 - e$ tiltása miatt. Tegyük fel, hogy K_1 -ben van egy egyszínű feszített Q_2 , mondjuk A színben. Mivel $\alpha(H) = 3$, Q_2 valamely hárompontú részhalmaza él H -ban. Ezen él pontjaihoz A -t hozzávéve $K_4^3 - e$ keletkezik H -ban, ami ellentmondás. Tehát K_1 színezésében nincs egyszínű Q_2 , ezért a klikkfedés tétel (1.2.3) alapján a tétel következik.

1.4.5 kérdés. Mi c legkisebb értéke 1.4.4-ben?

1.4.6 konstrukció. Az 1.4.4 tétel $\alpha(H) = 4$ esetén már nem igaz. Tetszőleges p pozitív egészre legyen G_p olyan gráf, melyre $\theta(G_p) \geq p$ és G_p komplementere nem tartalmaz 3,4,5 hosszúságú köröket ([EH2]). Ekkor G_p pontjain definiáljuk H 3-uniform hipergráfot úgy, hogy $ABC \in H$ akkor és csak akkor, ha ABC a G_p gráfban K_3 -mal izomorf.

1.4.7 konstrukció. Az 1.4.4 tétel nem igaz r -uniform hipergráfra $r \geq 4$ esetén. Legyen $r \geq 4$ és H' olyan $(r-1)$ -uniform hipergráf, melynek komplementerében nincs 2 és 3 hosszúságú kör, továbbá $\theta(H') = p$. Ilyen hipergráf létezése jól ismert ([LO4], [NERÖ]). Definiáljuk H -t H' ponthalmazán úgy, hogy H egy r elemű részhalmaza pontosan akkor él, ha H' -ben klikket határoz meg.

1.4.8. Klikkfedés tiltott részhipergráf nélkül

Korlátos klikkfedést tiltott részgráf (vagy részhipergráf) nélkül is lehet garantálni, ha elég erős metszetfeltételt teszünk fel. Érdekes, hogy a korlátosság határa pontosan megállapítható.

1.4.9 tétel. ([GY3]) Legyenek $r, m \geq 2$ természetes számok, $M = rm + i$, $0 \leq i < r$. Ha H r -uniform hipergráf, melyben bármely M pont között van $M - m + 1$ pontú klikk, akkor $\theta(H) \leq m + 1$. Ha csak azt tesszük fel, hogy bármely M pont között $M - m$ pontú klikk van, akkor $\theta(H)$ tetszőleges nagy lehet (nem függ r, m, i -től).

A tétel egyszerűen bizonyítható, és a következő kérdést veti fel.

1.4.10 kérdés. Igaz-e 1.4.9 tétel $\theta(H) \leq m$ következtetéssel? (Könnyű látni, hogy $\theta(H) \leq m - 1$ már nem igaz.) Az $r = 2$ eset könnyű (1.4.11). A legérdekesebbnek az $m = 2$ eset látszik, mivel ekkor $\theta(H) \leq 2$ -t kellene bizonyítani, ami a

2-színezhetőség komplementer fogalma. Ebben az alakban a kérdés így szól: $(m = 2, i = 0)$ ha H r -uniform hipergráf legalább $2r$ pontú és bármely $2r$ pontja közti élek egy ponttal lefoghathók, akkor H 2-színezhető?

1.4.11 tétel. (GYUP1) Ha a G gráfra $|V(G)| \geq 2m$ és G bármely $2m$ pontja közt van $m + 1$ pontú klikk, akkor $\theta(G) \leq m$.

Bizonyítás. Indukció $|V(G)|$ -re. Ha $|V(G)| = 2m$, akkor az állítás nyilvánvaló. Ha $|V(G)| = n > 2m$, akkor legyen $x \in V(G)$. Indukció miatt $\theta(G - x) = m$ és feltehető, hogy x nincs összekötve legalább m ponttal G -ben. Ezért G egy m pontú teljes részgráfiának $a_1, a_2, \dots, a_m$ pontjaihoz választhatók $b_1, b_2, \dots, b_m$ különböző pontok úgy, hogy $a_i b_i \notin E(G)$ $i = 1, 2, \dots, m$. Az a_i és b_i pontok által feszített részgráf megsérti a tétel feltételét. ■

2. χ -KORLÁTOS GRÁFOSZTÁLYOK

Definiáljuk a χ -korlátos gráfok osztályát, ennek előzményei az 1. fejezetben, illetve [GY2], [GYL3] dolgozatokban szerepeltek. A fogalom és a felmerülő alapproblémák szisztemetikus vizsgálata [GY6] és [GY7]-ben történt, sok nyitott kérdést kitűzve. Itt nagyjából [GY7] tárgyalását követem, kiegészítve χ -korlátos gráfosztályok on-line színezési algoritmusaihoz kapcsolódó eredményekkel ([GYL5], [GYL7], [GYL8]).

A χ -korlátosság komplementáris fogalma a θ -korlátosság. Kérdés, hogy a perfekt gráf tételhez ([LO3]) hasonló tétel összekapcsolja-e a két fogalmat (2.6). A χ -korlátossággal analóg (és ahhoz kapcsolódó) fogalmak hipergráfokra is vizsgálhatók. Ilyen fogalom például a τ -korlátosság, melynek duális fogalma a ρ -korlátosság ([GYL3]). Az előbbi a Gallai számok korlátosságának felel meg (1. fejezet), az utóbbra [GYL3]-ban és [BL]-ben vannak példák.

2.1. χ -korlátos és θ -korlátos gráfok

Egy $f : N \rightarrow N$ függvényt χ -korlát függvénynek nevezünk $\mathcal{G}$ gráfcsaládra, ha minden $G \in \mathcal{G}$ és minden $G' \subset G$ feszített részgráfra

$$\chi(G') \leq f(\omega(G')).$$

A $\mathcal{G}$ gráfcsalád χ -korlátos, ha létezik χ -korlát függvénye. Ha $\mathcal{G}$ család χ -korlátos, akkor van legkisebb χ -korlát függvénye, nevezetesen

$$f^*(x) = \max\{\chi(G') : G' \subset G \in \mathcal{G}, \omega(G') = x\}$$

A χ -korlátosság komplementáris fogalma a θ -korlátosság. Egy $\mathcal{G}$ gráfcsalád θ -korlátos f θ -korlát függvénnyel, ha

$$\theta(G') \leq f(\alpha(G'))$$

teljesül minden $G' \subset G \in \mathcal{G}$ -re (G' feszített részgráfja G -nek). Nyilván $\mathcal{G}$ θ -korlátos f θ -korlát függvénnyel pontosan akkor, ha $\bar{\mathcal{G}}$ χ -korlátos f χ -korlát függvénnyel ($\bar{\mathcal{G}}$ jelöli $\mathcal{G}$ komplementereiből álló családot).

Példaként tekintsünk néhány geometriailag definiált hipergráfcsalád metszés-gráfjait.

A. Húrgráfok (kör húrjainak metszésgráfjai, lásd[GO]). Itt a legkisebb χ -korlát legfeljebb exponenciális ([GY5], [KO]), de nem lineáris ([KO]). Ugyancsak Kostochka tétele, hogy a legkisebb θ -korlát $\Omega(x \log x)$.

B. Box gráfok (a sík tengelypárhuzamos oldalú téglalapjaiból álló hipergráfok metszésgráfjai). A legkisebb χ -korlát függvény legfeljebb $O(x^2)$ és $f^*(2) = 6$ ([AG]). Igen meglepő, hogy a 3-dimenziós box gráfok osztálya nem χ -korlátos ([BUR]). A legkisebb θ -korlátra Károlyi nemrég bebizonyította, hogy legfeljebb $O(x \log x)$.

C. k -intervallum gráfok (k -intervallumok metszésgráfjai). A θ -korlátosság itt 1.1.10 tételből következik. A χ -korlátosság bizonyítása egyszerűbb, és lineáris ($2k(x-1)$) korlátfüggvény van ([GY5]).

2.2. A feszített fa sejtés

Jelölje $\mathcal{G}(G)$ a G gráfot feszítve nem tartalmazó gráfok osztályát. Ekkor a feszített fa sejtés (1.4.2) így fogalmazható.

2.2.1 sejtés Ha F erdő, akkor $\mathcal{G}(F)$ χ -korlátos.

A sejtést elég fákra belátni, hiszen minden F erdő feszített részgráfja egy fának. Így azonban minden T fára igazolni kellene $\mathcal{G}(T)$ χ -korlátosságát ahhoz, hogy $\mathcal{G}(F)$ χ -korlátossága következzen. Ezért hasznos a következő

2.2.2 proposíció. Ha F erdő minden C komponensére $\mathcal{G}(C)$ χ -korlátos, akkor $\mathcal{G}(F)$ is χ -korlátos.

2.2.3 tétel. ([GY7]) Jelölje P_n az n pontú utat. A $\mathcal{G}(P_n)$ osztály χ -korlátos és legkisebb $f_n^*(x)$ korlátfüggvényére fennáll

$$\frac{R(\lceil \frac{n}{2} \rceil, x+1) - 1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} \leq f_n^*(x) \leq (n-1)^{x-1}$$

Megjegyzés. Az $n = 3$ és $n = 4$ esetekben az alsó korlát x és ez pontos, mivel $\mathcal{G}(P_3)$ és $\mathcal{G}(P_4)$ perfekt gráfosztályok. Az $n = 5$ esetben azonban csak exponenciális felső korlát ismeretes $f_5(X)$ -re. Érdekes lenne eldönteni, hogy van-e polinomiális korlát.

Ha van, következne belőle Erdős és Hajnal egy problémájának speciális esete: van olyan ε , hogy ha $g \in \mathcal{G}(P_5)$, $|V(G)| = n$, akkor G vagy $\bar{G}$ tartalmaz egy legalább n^ε pontú teljes részgráfot (sejtés szerint ez P_5 helyett tetszőleges gráfra igaz).

2.2.3 bizonyítása. Fix n mellett $\omega(G)$ -re vonatkozó indukció, melynek kezdő esete ($\omega(G) = 1$) triviális. Az indukciós feltételt használva a következő állítást lehet bizonyítani, mely $(R_1 R_2 \dots R_n)$ feszített utat mutatva G -ben) ellentmondásra vezet.

Állítás. Ha $G \in \mathcal{G}(P_n)$ és $\chi(G) > (n-1)^{\omega(G)-1}$ akkor definiálhatók $V(G) \supset V(G_1) \supset V(G_2) \supset \dots \supset V(G_n)$ részgráfok és $R_i \in V(G_i)$ pontok, melyekre minden $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ -re teljesül:

- (i) G_i összefüggő részgráf G -ben
- (ii) $\chi(G_i) > (n-i)(n-1)^{\omega(G)-1}$
- (iii) Ha $1 \leq j < i$ és $R_j \in V(G_i)$ akkor $R_j R_i$ pontosan akkor élé G -nek, ha $j = i-1$ és $R = R_i$. ■

A csillag esete jóval egyszerűbb az úténál. Ha $K_{1,n}$ jelöli az n élű csillagot, akkor igaz

2.2.4 propozíció. ([GY7]) A $\mathcal{G}(K_{1,n})$ legkisebb $f_n^*(x)$ χ -korlát függvényére

$$\frac{R(n, x+1) - 1}{n-1} \leq f_n^*(x) \leq R(n, x)$$

A faktor, mK_2 esetén a klikkfedés tétel bizonyítása $O(x^{2(m-1)})$ χ -korlát függvényt ad a $\mathcal{G}(mK_2)$ osztályra, ez explicit formában szerepel [WA]-ban.

2.2.5. Kis erdők χ -korlát függvényei

Kis erdők esetén a legkisebb χ -korlát függvények Ramsey számok közelében vannak. A következő eredmények [GY7]-ből valók (az első két esetben a korlátok kielégítőek, az utóbbi két esetben nem világos a helyes nagyságrend).

- | | |
|------------------------------|---|
| 1. $\mathcal{G}(4K_1)$ | $\frac{R(4, x+1) - 1}{3} \leq f^*(x) \leq \frac{R(4, x+1) + 2R(3, x+1)}{3}$ |
| 2. $\mathcal{G}(P_3 + K_1)$ | $\frac{R(3, x+1) - 1}{2} \leq f^*(x) \leq \frac{R(3, x+1) + x - 2}{2}$ |
| 3. $\mathcal{G}(K_2 + 2K_1)$ | $\frac{R(3, x+1) - 1}{2} \leq f^*(x) \leq \binom{x+1}{2} + x - 1$ |
| 4. $\mathcal{G}(2K_2)$ | $\frac{R(C_4, K_{x+1})}{3} \leq f^*(x) \leq \binom{x+1}{2}$ |

A 4. esetben a felső korlátot a klikkfedés tétel módszere adja, explicit formában szerepel [WA]-ban. Az alsó becslés (ahol a négyes kör-teljes gráf Ramsey száma áll) Chung ([CHU]) eredménye alapján legalább $cx^{1+\varepsilon}$. A probléma újra felmerül

Erdős és El-Zahar ([EEL]) dolgozatában, melynek kapcsán Nagy és Szentmiklóssy 20 dollárt keresett $f^*(3) = 4$ bizonyításával.

Legfeljebb öt pontú F erdőkre $\mathcal{G}(F)$ χ -korlátossága miatt ismert, hatpontúak között van két hiányzó eset.

5. Probléma. Bizonyítsuk $\mathcal{G}(F)$ χ -korlátosságát, ha F a következő két fa valamelyike:



2.2.6. Háromszögmentes gráfok

A feszített fa sejtés még akkor is nyitott a legtöbb fára, ha háromszögmentes gráfokra szorítkozunk. Itt az út mellett a kétszintes fákra van megoldva a sejtés. Egy fa kétszintes, ha valamely pontjából minden más pont elérhető legfeljebb két élű úton.

2.2.7 tétel. ([GYSZT]) Legyen F rögzített kétszintes fa. Ha $G \in \mathcal{G}(F)$ és $K_3 \not\subset G$, akkor $\chi(G) \leq c = c(F)$.

A bizonyítás nehéz, ezért mellőzöm. Ha C_3 mellett C_4 is tiltott gráf, akkor a feszített fa sejtés könnyen bizonyítható minden fára.

2.2.8 tétel. ([GYSZT]) Legyen F rögzített k pontú fa. Ha $G \in \mathcal{G}(F)$, $C_3, C_4 \not\subset G$, akkor $\chi(G) \leq k$.

2.2.9 probléma. Háromszögmentes gráfok esetén a legkisebb fa, melyre a feszített fa sejtés nyitott:



2.3. Irányított részfák tiltása

Érdekes lehet annak vizsgálata, mi történik, ha irányított fákra nézzük a feszített fa sejtést. Ennek ötlete más témából ered. Egy irányított D gráf k -tranzitív, ha bármely k élű $P_1 P_2 \dots P_k P_{k+1}$ irányított útjára $P_1 P_{k+1}$ él D -ben. Ez a fogalom Hararytól származik, néhány eredmény van [GYJK]-ban. Igaz-e, hogy a k -tranzitívan irányítható gráfok osztálya χ -korlátos. (A $k = 2$ esetben a tranzitívan irányítható gráfok osztályáról van szó, ami perfekt.) A $k = 3$ esetben ahhoz a problémához jutunk, hogy χ -korlátos-e az irányított P_4 -et feszítve nem tartalmazó irányított gráfok osztálya. Vezessük be a következő jelöléseket. Legyen T egy irányított fa és

$\mathcal{G}(T)$: azon gráfok osztálya, melyek irányíthatók úgy, hogy nincs bennük T feszített részként

$\mathcal{G}_{AC}(T)$: azon gráfok osztálya, melyek aciklikusan irányíthatók feszített T nélkül.

Kérdés, hogy $\mathcal{G}_{AC}(T)$ (vagy általánosabban) $\mathcal{G}(T)$ mikor lesz χ -korlátos. Az eredmények és kérdések a következők. (Írányított részgráfokat feszítve tartalmazó gráfok és Ramsey elmélet kapcsolatáról lásd [CD]-t.)

2.3.1. P_4 irányításai ([GY9])

A. A $\mathcal{G}_{AC}(\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet)$ osztály Chvátal tétele ([CH2]) szerint perfekt. Kérdés: $\mathcal{G}(\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet)$ χ -korlátos?

B. Kérdés: $\mathcal{G}_{AC}(\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet)$ χ -korlátos?

C. Meglepetés: $\mathcal{G}_{AC}(\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet)$ nem χ -korlátos.

Tekintsük a jól ismert Erdős–Hajnal gráfot ([EH1]), melynek pontjai az (i, j) párok $1 \leq i < j \leq n$ esetén és (a, b) , (c, d) pontok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $b = c$ vagy $a = d$. Az előbbi esetben legyen az irányítás $(a, b) \rightarrow (b, d)$, az utóbbiban $(c, d) \rightarrow (b, d)$. Ennél az irányításnál nincs $(\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet)$ feszítve, $\omega(G_n) = 2$, $\chi(G_n) = \lfloor \log n \rfloor$ ([LO2]).

2.3.2. Csillagok. Jelölje $S_{i,j}$ azt az irányított csillagot, melynek befoka i , kifoka j . Könnyen bizonyítható, hogy $\mathcal{G}(S_{0,j})$ χ -korlátos, kevésbé egyszerű, hogy $\mathcal{G}_{AC}(S_{1,j})$ is az. Nem világos azonban, hogy $\mathcal{G}(S_{1,2})$ és $\mathcal{G}_{AC}(S_{2,2})$ χ -korlátos-e.

2.4. Több részgráf tiltása

Egy részgráf helyett több (esetleg végtelen sok) részgráf tiltásának is fontos szerepe van a χ -korlátosságnál. Például Kierstead bebizonyította, hogy $K_{1,3}$ és K_5 -e tiltása esetén $x + 1$ a legkisebb χ -korlát függvény ([KI2]), és ez általánosan is igaz ([KI3]). Hasonló eredmény van [DH]-ban. Nyitott kérdés például, hogy χ -korlátos-e a négyenél hosszabb köröket feszítve nem tartalmazó gráfok osztálya ([GY7]). Egyik legmeglepőbb kérdés, hogy χ -korlátos-e a Berge gráfok osztálya ([GYL3]).

Ha (mint a Berge gráfok esetén) a tiltott gráfok osztálya komplementerképzésre zárt, akkor a χ - és θ -korlátosság (és a legkisebb χ - és θ -korlát függvény) ugyanazt jelenti. A következő két tétel [GY7]-ből való.

2.4.1 tétel. $\mathcal{G}(K_{1,3}, \overline{K}_{1,3})$ legkisebb korlátfüggvénye $\lfloor 3x/2 \rfloor$.

Bizonyítás. Ha $G \in \mathcal{G}(K_{1,3}, \overline{K}_{1,3})$ és G nem perfekt, akkor Parthasarathy és Ravindra tétele ([PARA]) miatt G -ben van feszített részgráfként legalább öt pontú páratlan kör, vagy komplementere. Nem nehéz belátni, hogy a többi pontja G -nek vagy teljesen össze van kötve ezzel a részgráffal, vagy egyáltalán nincs vele összekötve. Ebből indukcióval adódik a tétel. ■

2.1.2 tétel. $\mathcal{G}(2K_2, \overline{2K_2})$ legkisebb korlátfüggvénye $x + 1$.

Bizonyítás. Azt elég bebizonyítani, hogy $G \in \mathcal{G}(2K_2, \overline{2K_2})$ esetén $V(G)$ két klikkre és egy független halmazra partícionálható. Legyen S független halmaz G -ben, melyre $|S| = \alpha(G)$. Ha $x, y \in V(G) - S$, $xy \notin E(G)$ akkor $2K_2 \not\subseteq G$ miatt $\Gamma(x) \cap S$ és $\Gamma(y) \cap S$ nem üres, tartalmazkodó halmazok, mondjuk $\Gamma(x) \cap S \subseteq \Gamma(y) \cap S$. Mivel $\overline{2K_2} \not\subseteq G$, ezért $|\Gamma(x) \cap S| = 1$. A fentiek miatt $K_1 = \{x : x \in V(G) - S, |\Gamma(x) \cap S| > 1\}$ klikk. Belátjuk, hogy $V(G) - (S \cup K_1)$ is klikk. Ha $u, v \in V(G) - (S \cup K_1)$ és $uv \notin E(G)$ akkor $|\Gamma(u) \cap S| = |\Gamma(v) \cap S| = 1$. De $\Gamma(u) \cap S = \Gamma(v) \cap S$ ellentmond S maximalitásának, $\Gamma(u) \cap S \neq \Gamma(v) \cap S$ pedig a $2K_2 \not\subseteq G$ feltételnek. ■

2.5. Komplementáris korlátfüggvények

Jelölje $\mathcal{G}_f$ azon gráfok osztályát, melyekre az f függvény θ -korlát. Az f függvénynek létezik komplementáris korlátfüggvénye, ha $\mathcal{G}_f$ χ -korlátos. Ekkor $\mathcal{G}_f$ legkisebb χ -korlát függvényét f komplementáris korlátfüggvényének nevezzük. Vegyük észre, hogy χ és θ szerepet cserélhet a definícióban.

Milyen függvényeknek van komplementáris korlátfüggvényük? A perfekt gráf tétel ([LO3]) szerint az $f(x) = x$ önmagának komplementere. A következő tétel szerint csak kis függvényeknek lehet komplementáris korlátfüggvényük.

2.5.1 tétel. ([GY7]). Ha $f(x)$ -nek van komplementáris korlátfüggvénye, akkor $\inf f(x)/x = 1$.

Bizonyítás. Elég belátni, hogy az $f_\epsilon(x) = (1 + \epsilon)x$ függvénynek nincs komplementáris korlátfüggvénye, ahol ϵ tetszőleges valós szám, $0 < \epsilon \leq 1$. Erdős és Hajnal ([EH3]) bizonyította olyan G_k^ϵ gráfok létezését (minden $\epsilon \in (0, 1]$ és minden pozitív egész k esetén), melyekre

$$(1) \quad \chi(G_k^\epsilon) = k$$

$$(2) \quad \frac{|V(G)|}{\alpha(G)} < 2 + \epsilon \quad \text{bármely } G \subset G_k^\epsilon \quad \text{feszített részgráf esetén.}$$

Mivel (2) miatt $\omega(G_k^\epsilon) = 2$, (1) alapján a $\mathcal{G}_\epsilon = \{G_1^\epsilon, G_2^\epsilon, \dots, G_m^\epsilon, \dots\}$ osztály nem χ -korlátos. Belátjuk, hogy ugyanakkor $f_\epsilon(x)$ θ -korlát függvény $\mathcal{G}_\epsilon$ -ra.

Legyen ugyanis $G \subset G_k^\epsilon$ (feszítve). Azt kell igazolni, hogy $\theta(G) \leq (1 + \epsilon)\alpha(G)$. A Tutte–Berge formula segítségével ($\theta(G) = |V(G)| - \nu(G)$ használatával) így írható át az egyenlőtlenség:

$$\alpha(G) \geq \frac{|V(H)| + \sigma(H)}{2(1 + \epsilon)}$$

minden $H \subset G$ feszített részgráfra, ahol $\sigma(H)$ H páratlan komponenseinek száma. Legyenek $H_1, H_2, \dots, H_m$ H komponensei és partícionáljuk $\{1, 2, \dots, m\}$ indexhalmazzá három részre:

$i \in I_1$ ha H_i páros gráf és $|V(H_i)|$ páros

$i \in I_2$ ha H_i páros gráf és $|V(H_i)|$ páratlan

$i \in I_3$ ha H_i nem páros gráf.

Ekkor fennáll:

$$\alpha(H_i) \geq \frac{|V(H_i)|}{2} \quad \text{ha } i \in I_1,$$

$$\alpha(H_i) \geq \frac{|V(H_i)| + 1}{2} \quad \text{ha } i \in I_2,$$

$$\alpha(H_i) \geq \frac{|V(H_i)| + 1}{2(1 + \varepsilon)} \quad \text{ha } i \in I_3,$$

és itt csak az utolsó egyenlőtlenség nem triviális, de (2)-ből könnyen következik. E három egyenlőtlenséget használva

$$\begin{aligned} \alpha(G) &\geq \sum_{i=1}^m \alpha(H_i) = \sum_{i \in I_1} \alpha(H_i) + \sum_{i \in I_2} \alpha(H_i) + \sum_{i \in I_3} \alpha(H_i) \geq \\ &\geq \frac{|V(H)| + |I_2 \cup I_3|}{2(1 + \varepsilon)} \geq \frac{|V(H)| + \sigma(H)}{2(1 + \varepsilon)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nem sikerült azonban megválaszolni a következő alapkérdést.

2.5.2 kérdés. ([GY7]) Van-e az $f(x) = x + 1$ függvénynek komplementáris korlátfüggvénye?

Ezt a részt a perfekt gráf tétel stabilitását mutató egyszerű tétellel zárjuk.

2.5.3 tétel ([GY7]). Ha $f(x)$ komplementáris korlátfüggvénye önmaga, akkor $f(x) = x$.

Bizonyítás.

A. $f(2) = 2$. Ha $f(x) \neq x$ valamely $x \in N$ -re, akkor $k \in N$ legyen a legkisebb szám, melyre $f(k) > k$. Ekkor f nyilván θ -korlát függvény a C_{2k+1} gráfra, de nem χ -korlát függvény. Az ellentmondás azt mutatja, hogy $f(x) = x$ minden $x \in N$ -re.

B. $f(2) > 2$ és valamely $k \in N$ -re $f(k) < \lceil \frac{3k-1}{2} \rceil$. Tekintsük azt a G_k gráfot, melynek komplementere $\lfloor k/2 \rfloor$ diszjunkt C_5 és páratlan k esetén még van egy minden más ponttal összekötött pontja. Ekkor f θ -korlát függvény G_k -ra, de nem χ -korlát függvény, mivel $\omega(G_k) = k$, $\chi(G_k) = \lceil \frac{3k-1}{2} \rceil$.

C. $f(k) \geq \lceil \frac{3k-1}{2} \rceil$ minden $k \in N$ -re. Ekkor 2.5.1 tétel szerint f -nek egyáltalán nincs komplementáris korlátfüggvénye. $\blacksquare$

2.6. Korlátos közelítő és on-line algoritmusok

A χ -korlátossághoz közvetlenül kapcsolódik a *korlátos színező algoritmus* fogalma. Nevezünk egy színező algoritmust $\mathcal{G}$ gráfosztályon korlátnak, ha van olyan f függvény, hogy az algoritmus minden $G \in \mathcal{G}$ gráfot legfeljebb $f(\chi(G))$ színnel jól színez. Általában persze könnyebb azt igazolni, hogy G -nek van jó színezése $f(\omega(G))$ színnel és a korlátos színező algoritmusok ezen alapulnak.

2.6.1. Korlátos közelítő algoritmusok

Különböző perfekt gráfcsoportokra polinomiális algoritmusok vannak a pontok $\chi(G) = \omega(G)$ színnel történő színezésére ([GO]). Kiderült, hogy ilyen polinomiális algoritmus az összes perfekt gráfok osztályán is létezik ([GLS]).

A χ -korlátos gráfosztályok természetes jelöltek polinomiális közelítő algoritmusokra a színezési problémában. Mivel itt szinte mindig olyan $\mathcal{G}$ osztályokról van szó, ahol a színezési probléma NP -teljes, indokolt közelítő algoritmus keresése. Tipikus eset, hogy egy f χ -korlát függvény létezésének bizonyítása egy $\mathcal{G}$ családra polinomiális algoritmust szolgáltat $\mathcal{G}$ gráfjainak jó színezésére legfeljebb $f(\omega(G))$ színnel. Ebben az esetben korlátos polinomiális algoritmusunk van, melynek hatásaránya (performance ratio) legfeljebb $f(\omega(G))/\chi(G) \leq f(\omega(G))/\omega(G)$. Ez a becslés persze annál jobb, minél kisebb az f függvény. A legkedvezőbb esetben f lineáris függvény, ekkor a hatásarány konstans.

A fentiek ugyanúgy érvényesek a klikkfedési problémára θ -korlátos gráfosztály esetén. Ilyenkor persze olyan klikkfedési algoritmust nevezünk korlátnak, mely minden $G \in \mathcal{G}$ gráfot legfeljebb $f(\alpha(G))$ klikkel tud fedni.

Illusztrációképpen megemlíjtük, hogy a k -klikkintervallumgráfok színezésére konstans $(2k)$ hatásarányú közelítő polinomiális algoritmus van ([GY5], a probléma $k \geq 2$ esetén NP -teljes, lásd [GJMP]). A klikkfedési problémára viszont az 1.1.1 tételből kiolvasható korlátos algoritmus nem „jó”, mert a θ -korlát függvény igen nagy.

2.6.2. Korlátos on-line algoritmusok

Egy színezési algoritmus *on-line*, ha úgy színezi jól egy gráf pontjait, hogy a pontokat egyesével kapja és a pont színét a következő pont beérkezése előtt véglegesen el kell döntenie (az eddig beérkezett pontok részgráfjának ismeretében). A legismertebb on-line színezési algoritmus a „first fit”, alias „mohó” algoritmus, mely az 1, 2, ... színekkel színez és minden lépésben azt a legkisebb színt használja, amelyre az addig színezett részgráf jól színezett.

A χ - és θ -korlátosság és az on-line algoritmusok viszonyával foglalkoznak [GYL5], [GYL7], [GYL8] és [KI1], ehhez kapcsolódó további cikkek [LST], [KI4], [KIT1].

A 2.2.3 tétel alapján $\mathcal{G}(P_n)$ χ -korlátos. A korlátos on-line algoritmusok szempontjából a következőket mondhatjuk.

2.6.3 tétel. ([GYL3]) $\mathcal{G}(P_4)$ -en a first fit színezés tökéletes, azaz a kromatikus számnyi színnel színez.

Bizonyítás. Csak azt a közismert állítást kell ismerni, hogy $\mathcal{G}(P_4)$ -ben bármely nem növelhető független halmaz és nem növelhető klikk metsző ([BEDU]).

2.6.4 tétel. ([GYL8]) A $\mathcal{G}(P_6)$ osztályon van korlátos on-line algoritmus.

A 2.6.4 tétel bizonyítás a 2.2.3 bizonyításának on-line változata, de sok nehézséget kell leküzdeni. A [GY5]-ben kitűztük azt a problémát, hogy a first fit színezés korlátos-e $\mathcal{G}(P_6)$ osztályon. Legújabb hírek szerint ezt Kierstead, Trotter és Penrose bebizonyították.

2.6.5 tétel. ([GYL5]) A $\mathcal{G}(P_6)$ osztályon nincs korlátos on-line algoritmus. Sőt, minden k -hoz van olyan $G_k \in \mathcal{G}(P_6)$ páros gráf, melyet bármely on-line algoritmus legalább k színnel színez.

A 2.2.2 proposíció szerint $\mathcal{G}(H)$ osztály χ -korlátossága következik abból, ha $\mathcal{G}(C)$ χ -korlátos H minden C komponensére. Ez igaz marad on-line algoritmusokra a következő értelemben.

2.6.6 tétel. ([GYL7]) A $\mathcal{G}(H)$ osztályon van korlátos on-line algoritmus, ha H minden C komponensére a $\mathcal{G}(C)$ osztályon van korlátos on-line algoritmus.

A 2.6.6 tétel értelmében például a $\mathcal{G}(mK_2)$ osztályon van korlátos on-line színező algoritmus. A $\mathcal{G}(2K_2)$ osztályon még a first fit algoritmus is korlátos, de a $\mathcal{G}(3K_2)$ osztályon (sőt a $\mathcal{G}(K_2 + 2K_1)$ osztályon) már nem ([GYL5]).

Az on-line (speciálisan a first fit) algoritmusok szempontjából a perfekt gráfok különösen érdekesek, hiszen itt egy $f(\omega(G))$ színnel történő színezés esetén $f(\omega(G))/\omega(G) = f(\omega(G))/\chi(G)$ pontosan az algoritmus hatásaránya. A legegyszerűbb perfekt gráfokra, a páros gráfokra, sőt a fákra sincsenek korlátos on-line algoritmusok.

2.6.7 tétel. ([GYL5]) A fák osztályán nincs korlátos on-line színező algoritmus, sőt minden n -re van olyan T_n fa, melyre bármely on-line színező algoritmus legalább n színt használ.

Bizonyítás. T_n konstrukciója emlékeztet Zykov háromszögmentes nagy kromatikus gráfot konstruáló módszerére ([ZY]). Legyen T_{n-1} olyan fa, melyen minden on-line algoritmus legalább $n-1$ színt használ. Tekintsük $T_{n-1} \vee (T_{n-1})$ $(n-1)$ diszjunkt példányát és minden példányban jelöljünk ki egy gyökeret úgy, hogy T_{n-1} minden pontja pontosan $n-1$ példányban legyen gyökér. Az így kapott erdőhöz adjunk egy új pontot, melyet a gyökerekkel kötünk össze. Az így definiált fa lesz T_n .

Legyen A on-line színező algoritmus. Adjuk be T_{n-1} $n-1$ diszjunkt példányát rendre olyan sorrendben, mely $n-1$ színt kényszerít. Ekkor találunk $n-1$ különböző

példányon $n - 1$ különböző szint. Ezután beadunk egy pontot, mely ezen $n - 1$ ponttal van összekötve. Beadott gráfunknak T_n részgráfja és már eddig is n szint használt az A algoritmus. ■

Vannak viszont olyan perfekt gráfosztályok, melyeken már a first fit színezés is konstans hatásarányú. A hatásarány split gráfoknál 1, páros gráfok komplementerén $3/2$, merevkörű gráfok komplementerén 2 ([GYL5]). Intervallumgráfok esetén sokáig nyitott kérdés volt, hogy a first fit színezés hatásaránya konstans-e. Ezt nemrégiben Kierstead oldotta meg ([K14]). Egy régebbi szép eredmény, hogy intervallumgráfokon egy egyszerű on-line algoritmus 3 hatásaránnyal működik ([KIT1]).

3. FÜGGELÉK

Gyakrabban használt jelölések, definíciók.

H hipergráfon értünk egy (V, E) párt, ahol V tetszőleges halmaz, a pontok halmaza, E pedig V bizonyos részhalmazaiából áll, melyeket éleknek nevezzünk. Megengedünk többszörös éleket is. Hipergráfot $H = (V, E)$ jelöléssel, vagy $H = (V(H), e(H))$ jelöléssel adhatunk meg. Geometria jellegű hipergráfoknál sokszor megengedjük, hogy $|V(H)| = \infty$ és $e \in E(H)$ esetén $|e| = \infty$ legyen. Viszont az élék száma szinte mindig véges. Rövidség kedvéért $e \in H$ jelentse azt, hogy $e \in E(H)$, azaz e éle H -nak, továbbá $|H|$ jelölje a hipergráf élszámát, $|E(H)|$ -t.

Írott nagy betűk hipergráfcsoportokat (osztályokat) jelölnek. Például $\mathcal{I}$ azon hipergráfok családja, melyek pontthalmaza a számegyenes, élthalmaza pedig zárt intervallumokból áll.

Egy H' hipergráf H részhipergráfja, ha $V(H') \subseteq V(H)$ és $E(H') \subseteq E(H)$. Ha H hipergráf és $S \subseteq V(H)$ akkor H_S legyen az a H' részhipergráfja H -nak, melyre $V(H') = S$ és $e \in H'$ pontosan akkor, ha $e \subseteq S$ és $e \in H$. A H hipergráf feszített részhipergráfjai a H_S hipergráfok, ahol S végigfut $V(H)$ részhalmazain. A részhipergráfra (és a feszített részhipergráfra is) a $H' \subset H$ jelölést alkalmazzuk. Ha H egy hipergráf, $\text{rész}(H)$ jelöli H összes véges sok élű részhipergrájából álló családot.

Egy H hipergráf x pontjának foka, $d(x)$, az x -et tartalmazó élék száma. A maximális fokszám, $D(H) = \max_{x \in V(H)} d(x)$. Egy H hipergráfban $T \subset V(H)$ transzverzális, vagy lefogó halmaz, ha $T \cap e \neq \emptyset$ minden $e \in H$ esetén. A minimális számosságú lefogó halmaz számosságát $\tau(H)$ jelöli. Egy páronként diszjunkt élhalmazt H -ban matchingnek nevezünk, $\nu(H)$ jelöli a lehető legtöbb élű matching élszámát. Nyilván $\nu(H) \leq \tau(H)$ bármely H hipergráfra.

Egy H hipergráf összefüggő, ha nem lehet $V(H)$ -t úgy partícionálni két részre, hogy minden $e \in H$ teljesen az egyik részben van. Nem összefüggő hipergráf egyértelműen felbontható páronként idegen összefüggő hipergráfokra, melyeket H komponenseinek nevezünk.

Egy H hipergráf *duálisa*, H^* , az a hipergráf, melyet H -ból a pontok és az élek felcserélésével kapunk, a pont-él illeszkedéseket megtartva.

Egy H hipergráf *meteszgráfja*, $M(H)$, az a G gráf, melynek pontjai H éleinek felelnek meg és G -ben két pont pontosan akkor határoz meg élt, ha H megfelelő élei metszők.

Egy H hipergráf r -uniform, ha $|e| = r$ minden $e \in H$ esetén. A 2-uniform hipergráfokat nevezzük gráfoknak. A K_n^r hipergráfot, melynek n pontja van és minden r elemű részhalmaz (egyszeres) éle, *teljesnek*, vagy *klikknek* nevezzük. A K_n^2 helyett gráfoknál K_n -et szokás használni.

Továbbiakban legyen minden hipergráf r -uniform. A H hipergráf *komplementere*, $\overline{H}$, az a hipergráf, melyre $V(\overline{H}) = V(H)$ és egy r elemű részhalmaz pontosan akkor él $\overline{H}$ -ban, ha nem él H -ban. A H *klikkmérete*, $\omega(H)$, a legnagyobb m szám, melyre van H -ban K_m^r -el izomorf részhipergráf. Az $S \subset V(H)$ *független halmaz*, ha bármely $e \in H$ -ra $e \not\subset S$, azaz S klikk $\overline{H}$ -ben. A H *kromatikus száma*, $\chi(H)$, a legkisebb m , melyre $V(H)$ partícionálható m független halmazra. A *klikkfedési szám*, $\theta(H)$, az a legkisebb m , melyre $V(H)$ partícionálható m klikkre. A H legnagyobb független halmazának számosságát $\alpha(H)$ -val jelöljük. Gráfok esetén $\omega(G) \leq \chi(G)$, $\alpha(G) \leq \theta(G)$. Azokat a G gráfokat, melyekre $\omega(G') = \chi(G')$ minden $G' \subset G$ feszített részgráf esetén, *perfekt gráfoknak* nevezik. Lovász *perfekt gráf tétele* szerint ([LO3]) a definícióban $\alpha(G') = \theta(G')$ is írható.

Még néhány jelölés gráfokra. Ha $xy \in E(G)$, ezt gyakran úgy fejezzük ki, hogy „ x és y szomszédos”, vagy „ x és y össze van kötve”. Ha $x \in V(G)$, akkor $\Gamma(x)$ jelöli az x -el szomszédos pontok halmazát.

Végül még néhány jelölés:

C_i : i pontú kör

P_i : i pontú út

K_n : n pontú klikk

$K_{m,n}$: teljes páros gráf, osztályaiban m és n ponttal

$G_1 + G_2$: két pontdiszjunkt gráf egyesítése

mG : G m diszjunkt példányának egyesítése

$G_{m,n}$: páros gráf m és n ponttal a két osztályban

$\overline{G}$: G gráf komplementere

Hivatkozások

AG. E. Asplund, B. Grünbaum, On a coloring problem, Math. Scand. 8. (1960) 181–188.

BEDU. C. Berge, P. Duchet, Strongly perfect graphs, Annals of Discrete Math. 21. (1984) 57–61.

- BERGE.** C. Berge, *Graphs and Hypergraphs* (1982), North Holland.
- BL.** I. Bárány, J. Lehel, Covering with Euclidean boxes, *Europ. J. Combinatorics* **8.** (1987) 113–119.
- BUR.** J. P. Burling, On coloring problem of families of prototypes, Ph.D. Thesis, Univ. Colorado, 1965.
- CD.** M. Cochand, P. Duchet, Some remarks on orientation of graphs and Ramsey theory, *Irregularities of Partitions, Alg. and Combinatorics* **8.** 39–46.
- CH2.** V. Chvatal, Perfectly ordered graphs, *Ann. of Discrete Math.* **21.** (1984) 63–65.
- CHU.** F. R. K. Chung, On the covering of graphs, *Discrete Math.* **30.** (1980) 89–93.
- DGK.** L. Danzer, B. Grünbaum, V. Klee, Helly's theorem and its relatives, in *Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. VII, Providence, (1963) 101–180.
- DH.** M. DHurandhar, On the chromatic number of a graph with two forbidden subgraphs, *J. Comb. Theory B.* **46.** 1–6.
- EEL.** P. Erdős, M. El-Zahar, On the existence of two non-neighboring subgraphs in a graph, *Combinatorica* **5.** (1985) 295–300.
- EH1.** P. Erdős, A. Hajnal, Some remarks on set theory, IX. *Michigan Math. J.* **11.** (1964) 107–127.
- EH2.** P. Erdős, A. Hajnal, On chromatic number of graphs and set systems, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **17** (1976) 61–99.
- GJMP.** M. R. Garey, D. S. Johnson, G. L. Miller, C. H. Papadimitrou, The complexity of coloring circular arcs and chords, *SIAM J. Alg. Disc. Methods* **1.** (1980) 216–227.
- GO.** M. C. Golumbic, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press, 1980.
- GLS.** M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver, The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization, *Combinatorica* **1.** (1981) 169–197.
- GYL1.** A. Gyárfás, J. Lehel, A Helly-type problem in trees, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* **4.** *Combinatorial Theory and its Applications* (1969) 571–584. MR 45,7602
- GY1.** A. Gyárfás, A Ramsey-type theorem and its applications to relatives of Helly's theorem, *Periodica Math. Hung.* **3.** (1973) 261–270. MR 49, 112
- GYL2.** A. Gyárfás, J. Lehel, A Ramsey type problem in directed and bipartite graphs, *Periodica Math. Hung.* **3** (1973) 299–304. MR 49, 136
- GY2.** A. Gyárfás, On Ramsey covering numbers, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* **10.** *Infinite and Finite sets*, (1973), 801–816. MR 52,2939
- GY3.** A. Gyárfás, Partition covers and blocking sets in hypergraphs, Ph. D. Thesis, MTA SZTAKI Tanulmányok, **71.** (1977) (in Hungarian). MR 58, 5392
- GYSZT.** A. Gyárfás, E. Szemerédi, Zs. Tuza, Induced subtrees in graphs of large chromatic number, *Discrete Math.* **30.** (1980) 235–244. MR 81e,05060
- GYL3.** A. Gyárfás, J. Lehel, Hypergraph families with bounded edge cover or transversal number, *Combinatorica* **3.** (1983) 351–358. MR 85d 05186
- GY5.** A. Gyárfás, On the chromatic number of multiple interval graphs and overlap graphs, *Discrete Math.* **55.** (1985) 161–166. MR 86k, 05052

- GY6.** A. Gyárfás, Problems from the world surrounding perfect graphs, MTA SZTAKI tanulmányok, **177**. (1985) MR 88a, 05066
- GYL5.** A. Gyárfás, J. Lehel, On-line and first fit colorings of graphs, Journal of Graph Theory, **12**. (1988) 217–227. MR 89c, 05037
- GY7.** A. Gyárfás, Problems from the world surrounding perfect graphs, Zastowania Matematyki, Applicationes Math. **XIX**, 3–4. (1987) 413–441. MR 89e, 05089
- GY9.** A. Gyárfás, Problem 115, Discrete Math. **79**. (1989) 109–110.
- GYL7.** A. Gyárfás, J. Lehel, First fit and on-line chromatic number of families of graphs, Ars Comb.
- GYL8.** A. Gyárfás, J. Lehel, Effective on-line coloring of P_5 -free graphs, Combinatorica.
- FGY.** Z. Füredi, A. Gyárfás, Covering t -element subsets by partitions, subm. to European J. of Comb.
- GYJK.** A. Gyárfás, M. S. Jacobson, L.F. Kinch, On a generalization of transitivity for digraphs, Discrete Math. **69**. (1988) 35–41.
- KI2.** H.A. Kierstead, On the chromatic index of multigraphs without large triangles, J. Comb. Theory **B**, **36**. (1984) 156–160.
- KI3.** H. A. Kierstead, Application of edge coloring of multigraphs to vertex colorings of graphs, Discrete Math. **74**. (1989) 117–124.
- KI4.** H.A. Kierstead, The linearity of first fit for coloring interval graphs, SIAM J. on Disc. Math. **1**. (1988) 526–530.
- KIT1.** H. A. Kierstead, W. T. Trotter, Jr. An extremal problem in recursive combinatorics, Congressus Numerantium **33**. (1981) 143–153.
- KO.** A. V. Kostochka, personal communication.
- KO2.** A. V. Kostochka, Sequences of dominating sets, manuscript.
- LE.** J. Lehel, Gallai type results for multiple boxes and forests, Europ. J. Combinatorics, **9**. (1988) 113–120.
- LO1.** L. Lovász, Problem 206. Mat. Lapok (1983) 394–395.
- LO2.** L. Lovász, Combinatorial problems and exercises, North Holland, 1979.
- LO3.** L. Lovász, Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture, Discrete Math. **2**. (1972) 253–267.
- LO4.** L. Lovász, On chromatic number of finite set systems, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **19**. (1968) 59–67.
- LST.** L. Lovász, M. Saks, W. T. Trotter, An on-line graph coloring algorithm with sublinear performance ratio, Discrete Math. **75**. (1989) 47–53.
- NERŐ.** J. Nešetřil, V. Rödl, A short proof of the existence of highly chromatic hypergraphs without short cycles, J. Comb. Theory.
- PARA.** K. R. Partasarathy, G. Ravindra, The strong perfect graph conjecture is true for $K_{1,3}$ -free graphs, J. Comb. Theory **B** **21**. (1976) 212–223.
- RO.** F. S. Roberts, On the boxicity and cubicity of graphs, Recent Progress in Combinatorics AP. (1969) 301–310.
- SU.** D. P. Sumner, Subtrees of a graph and the chromatic number, in Theory and Applications of Graphs, John Wiley (1981) 557–576.

- WA.** S. Wagon, A bound on the chromatic number of graphs without certain induced subgraphs, *J. Combin. Theory B* **29**. (1980) 345-346.
- WELSH.** D. J. A. Welsh, *Matroid theory*, Academic Press, (1976).
- WI.** J. E. Williamson, A Ramsey-type problem for paths in digraphs, *Math. Ann.* **203** (1973) 117-118.
- ZY.** A. A. Zykov, On some properties of linear complexes, (in Russian), *Russian Math. Sb. N. S.* **24**. (1949) 163-188.