100 éve született Erdős Pál

Gyárfás András *

Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

April 25, 2013

1 A Szent István Reálgimnázium

Hat éves szibériai hadifogságból hazatérve, itt tanított 1920-tól Erdős Pál édesapja, Erdős Lajos. "Apuka, te tényleg öreg vagy!" - így üdvözölte a 7 éves Pali, aki ekkor már fejben szorzott négyjegyű számokat és rég túl volt a negatív számok felfedezésén: "Anyuka, ha 100-ból elveszünk 250-et, 0 alatt kapunk 150-et!", ujságolta 4 éves korában.

Apuka magántanítványokat is vállalt, Vágó Márta mesélte udvarlójának, József Attilának, hogy Erdős Lajos készíti fel matek érettségire - "nagyon büdös szivarokat szív!". Pali bácsi nem találkozott Attilával, de Apuka igen, mert ő járt Vágóékhoz Mártit tanítani - Vágóék szalonjában sok híres ember megfordult.

Pali a 9 - 12 osztályt végezte az Istvánban, 1930-ban érettségizett jeles eredménnyel de ki tudja miért, mennyiségtan írásbelije csak JÓ...

*A Szent István gimnáziumban 2013 március 25-én tartott előadás alapján

2 A Középiskolai Matematikai Lapok - 1926

A Kömal bűvkörébe vonzotta (és azóta is vonzza) a matekkedvelőket. Pali bácsi versenytársai között voltak Alpár László, Grünwald (Gallai) Tibor, Hajós György, Klein Eszter, Szekeres György, Turán Pál, Wachsberger (Svéd) Márta, Weiszfeld (Vázsonyi) Endre - csak azokat említem, akiket ismertem, vagy Pali bácsi mesélt róluk... Az első Erdős Pál cikk is itt jelent meg, [1].

3 Egyetem, Városliget, Anonymus szobor 1930-1934

Az egyetemen aztán személyesen is találkozhatott sok Kömal versenytárs. Néhányan jó - sőt igen közeli - kapcsolatba is kerültek, egyik kedvenc találkahelyük lett a Városliget, az Anonymus szobor... Pali bácsi szavaival, "hagyjuk a fecsegést, térjünk a lényegre", idézzük fel, miről beszélgettek a szobornál... Általános helyzetű pontok adottak a síkon (nincs három egy egyenesen). Ekkor

- 5 pont között mindig van konvex négyszög (Klein Eszter)
- 9 pont között mindig van konvex ötszög (Turán Pál)
- 17 pont között mindig van konvex hatszög (Szekeres György)
- $2^{n-2} + 1$ pont között mindig van konvex n-szög???

Ezekről a kérdésekről szól Erdős és Szekeres cikke [2] és a problémát Pali bácsi "happy end" problémának keresztelte, mert Klein Eszter és Szekeres György egymásra találtak. Néhány évvel később Eszter már új néven, új helyszinről jelentkezik új problémával a Monthlyban (lásd 5. rész): *E 449. [1940] .... Proposed by Esther Szekeres, Sanghai, China.*

4 Új bizonyítás a Csebisev tételre

Erdős első feltünést keltő eredménye egyetemista korából a Csebisev tétel új bizonyítása volt [3]. Aki nem tudja mi a tétel, megtudhatja Pali bácsi versikéjéből:

- "Chebychev said it, and I'll say it again

  There's always a prime between N and $2N$"

- Elmondom újra Csebisev szavát:

  N és $2N$ közt prímszámot találsz!

- Csebisev szavára Erdős felelt rímmel,

  N és $2N$ között találkozunk prímmel!

5 American Mathematical Monthly feladatok

Ez a folyóirat kicsit hasonlít a Kömalhoz, de hatalmas olvasóközönsége van, hiszen angolul jelenik meg. Nem csoda, hogy Pali bácsi célba vette a problémarovatot.

- *3739 [1935]. Proposed by Paul Erdős, The University of Manchester, England.* Adott $n+1$ pozitív egész szám, $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, mindegyik legfeljebb $2n$, bizonyítsuk be, hogy valamelyik osztója egy másiknak. (*Erdős gyakran adta ezt fel csodagyerekeknek, mint Bollobás, Pósa, Lovász...*)

- ....

- *4083 [1943]. Proposed by Paul Erdős, Princeton, N.J.* Legyen $a_1 < a_2 < \ldots < a_x \leq n$ pozitív számok tetszőleges sorozata, melyben egyik a_i sem osztója a többi szorzatának. Ekkor $x \leq \pi(n)$, ahol $\pi(n)$ az n-nél nem nagyobb prímek száma.

- *4137 [1943] Proposed by P. Erdős, Purdue University.*

- ......

- *10282 [1993]. Proposed by Paul Erdős, Hungarian Academy of Sciences, Budapest, Hungary.*

Az összesen 114 kitűzött probléma valószinűleg világrekord. Figyeljük meg, hogy változtatja helyét a világvándor... A 3739 feladat megoldása a volt kömalos társaktól érkezett:

- *Solution by Martha Wachsberger and E. Weiszfeld, Budapest, Hungary.* Emeljük ki 2 legnagyobb hatványát a számokból, legyen

  $$a_r = 2^{b_r} c$$

  ahol c páratlan. Mivel csak n páratlan pozitív egész lehet kisebb $2n$-nél, van $a_i < a_k$, melyekhez ugyanaz a c tartozik, ezért a_i osztója a_k-nak.

6 Erdős problémák

Hány Erdős cikk van a "probléma" szóval a cikk címében? Nem kevés, 547 - igaz, ebben a Monthly-ban kitűzött problémák is benne vannak. Pali bácsi így írt erről: "Egy jól választott probléma rámutathat a témakör nehézségére, viszonyitási alap lehet a témakör fejlődése során. Lehet ízletes apró csemege, ami néhány élvezetes pillanatot szerez. De lehet makk is, mély és megtermékenyítő új gondolatot hordozó, melyből terebélyes tölgy nő majd."

Erdős szeretett pénzdíjakat kitűzni problémái megoldóinak ("átadtam neki 100 dollár vigaszdíjat", "tízezer dollárt szoktam ajánlani annak bizonyításáért, hogy...") de a dicsőség többet ért a pénzdíjnál. Erdős szellemében a 4038-as feladat első 5 (középiskolás) megoldójának 1000 Ft tiszteletdíjat ajánlok fel, a megoldásokat gyarfas@renyi.hu címre kérem.

Erdős többszáz problémaköréből nézzünk meg kettőt közelebbről!

6.1 Ismerősök és ismeretlenek

1. Szimmetrikus ismeretség (ha A ismeri B-t, akkor B is ismeri A-t).

- 6 ember között van 3 (páronként) ismerős vagy 3 (páronként) ismeretlen - de 5 ember között nem biztos
- 18 ember között van 4 ismerős vagy 4 ismeretlen - de 17 ember között nem biztos
- x ember között van 5 ismerős vagy 5 ismeretlen - de $x-1$ ember között nem biztos ($43 \leq x \leq 49$ és x Erdős szerint csak nagyszabású nemzetközi együttműködéssel határozható meg)
- y ember között van 6 ismerős vagy 6 ismeretlen - de $y-1$ ember között nem biztos ($102 \leq y \leq 165$ és y-t Erdős szerint soha nem fogja tudni az emberiség)
- Erdős-Szekeres 1938: 4^n ember között van n ismerős vagy n ismeretlen - de
- Erdős 1947: $2^{n/2}$ ember között ez már nem biztos!

2. *Nem szimmetrikus ismeretség (lehetséges, hogy A ismeri B-t, de B nem ismeri A-t).*

- 9 ember között van tranzitiv hármas ismeretség ($A \to B, B \to C, A \to C$) vagy 3 ismeretlen - de 8 ember között nem biztos
- 15 ember között van tranzitiv hármas ismeretség vagy 4 ismeretlen - de 14 ember között ez már nem biztos

3. *Végtelen sok ember*

- $\mathbb{N}$ a természetes számok, $\mathbb{R}$ a valós számok halmaza, $|\mathbb{N}|, |\mathbb{R}|$ a számosságuk (megszámlálható és kontinuum)
- $|\mathbb{N}|$ ember között van $|\mathbb{N}|$ (páronként) ismerős vagy $|\mathbb{N}|$ (páronként) ismeretlen
- de $|\mathbb{R}|$ között NINCS MINDIG $|\mathbb{R}|$ ismerős vagy $|\mathbb{R}|$ ismeretlen
- $|\mathbb{N}|$ ember felsorakozhat két sorba, hogy az egyikben minden szomszéd ismerős, a másikban minden szomszéd ismeretlen (Rado, 1978)

4. $|\mathbb{R}|$ *ember,* $|\mathbb{N}|$ *reláció.*

- $|\mathbb{R}|$ ember között $|\mathbb{N}|$ reláció, mondjuk a szeretet foka 1,2,...
- hánynak lesz páronként ugyanaz a szeretet-foka?
- Lehet, hogy csak kettőnek... Ha $\mathbb{R}$ elemeit végtelen $0-1$ sorozatokkal reprezentáljuk, az x, y közötti szeretet-fok lehet a legkisebb i amelyre x, y az i-ik koordinátában különbözik.
- és $|\mathbb{R}|$ ember között hányat tudunk sorba állitani, úgy, hogy a szomszédoknak ugyanaz legyen a szeretet-foka?
- három embert lehet.... Bárki lehet középső!
- lehet négyet is találni?

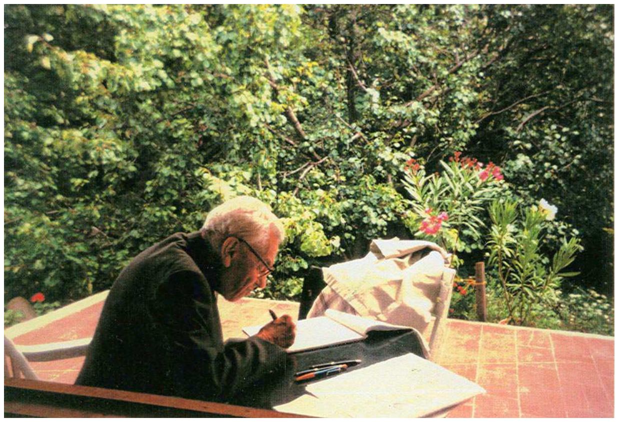
Itt belép a képbe valami, ami Erdősnek nem nagyon tetszett... "Az eldönthetetlenség csúf feje mindenfelé felbukkan és ez sok problémánkat (Hajnal Andrással) megválaszolta vagy eldönthetetlenné tette - legtöbbször az utóbbi történt." Erdős itt a kontinuumhipotézis függetlenségének következményeire utal. És két Erdős tételt használva (Erdős-Kakutani, illetve Erdős-Hajnal) meglepő választ kapunk a legutóbbi problémára: a (speciális) kontinuumhipotézistől függ! Ha NINCS számosság $|\mathbb{N}|$ és $|\mathbb{R}|$ között akkor négy embert már nem mindig lehet sorba állitani. Ha VAN számosság $|\mathbb{N}|$ és $|\mathbb{R}|$ között akkor mindig sorba lehet állítani végtelen sok embert is... (Köszönet Komjáth Péternek a megoldásért).

6.2 Számtani sorozatok

"Hatvan éve Turánnal úgy gondoltuk, hogy az $1, 2, \ldots n$ számok pozitív százalékában biztos van tetszőleges hosszúságú számtani sorozat (ha n elég nagy)." Pontosabban fogalmazva, tetszőleges $t > 0$ százalék és tetszőleges k sorozathossz esetén van olyan $n_0 = n_0(t, k)$ határ, hogy $n \geq n_0$ esetén igaz: az $1, 2, \ldots n$ számok legalább t százalékát akárhogy is választjuk ki, találunk közöttük k tagú számtani sorozatot. Gondoljuk meg, hogy $n_0(100, k) = k, n_0(1, 2) = 101$ nyilvánvaló - de $n_0(1, 3)$ létezése már korántsem az!

" A 70-es évek elején 1000 dollárt ajánlottam érte... Szemerédi 1974-ben bebizonyította. Bizonyítása mestermű és a bizonyítás során felfedezett regularitás lemmáját azóta sokszor alkalmazták a kombinatorikában és a gráfelméletben. Fürstenberg is bebizonyította ugyanezt 1977-ben, ergodelméletetet használva. Az ő módszere is sikeres lett a kombinatorikus számelméletben. Sőt, egyre több olyan eredmény született, melyet csak ergodelméleti úton tudtak bizonyítani (eddig)."

"Az, hogy a prímszámok tetszőleges hosszúságú számtani sorozatot tartalmaznak, támadhatatlannak tűnik" - írta erdős 1994-ben. Ám 10 év kellett csak, hogy Tao és Green megoldja ezt, mindkét módszerre (Szemerédi és Fürstenberg) támaszkodva. (2012: Szemerédi Abel-díjas lett!)



A tölgy egy ága nem nő még: tetszőleges hosszúságú számtani sorozatot tartalmaz minden olyan $a_1, a_2, \ldots$ sorozat, melyre

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty$$

A prímszámok sorozatára ez igaz - Erdős mesélte, hogy ezt Apuka ezt nem tudta... "5000 dollárt ajánlok a bizonyításért (vagy cáfolatért). Sem Szemerédi sem Fürstenberg módszere nem tudja ezt eldönteni, de talán a következő évszázad során kiderül."

Akár kiderül, akár nem, az Erdős által ültetett makkokból növekedő tölgyfák körülöttünk lesznek.

References

[1] P. Erdős: A magasabb rendű számtani sorokról, *Köz. Mat. Lapok* (1929) 187–189.

[2] P. Erdős, G. Szekeres: A combinatorial problem in geometry, *Compositio Math.* 2 (1935), 463–470.

[3] P. Erdős: Beweis eines Satzes von Tschebyschef , *Acta Litt. Sci. Szeged* 5 (1932) 194–198.