

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
SZÁMITÁSTECHNIKAI ÉS AUTOMATIZÁLÁSI KUTATÓ INTÉZETE

PARTICIÓFEDÉSEK ÉS LEFOGÓHALMAZOK HIPERGRÁFOKBAN

Írta:

Gyárfás András

Kandidátusi értekezés

A kiadásért felel:

DR. VÁMOS TIBOR

ISBN 963 311 053 X

ISSN 0324-2951

Készült:

az Országos Műszaki Könyvtár és Dokumentációs Központ

házi sokszorosítójában

F.v.: Janoch Gyula

## Tartalom

|                                                                                                       |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <u>Bevezetés</u>                                                                                      | 5  |
| 1. <u>Particiófedések hipergráfokon</u>                                                               | 9  |
| 1. Alapvető definíciók                                                                                | 9  |
| 2. Összefüggő részhipergráfok                                                                         | 10 |
| 3. $s$ osztályu hipergráfok                                                                           | 11 |
| 4. Feloldható blokkrendszerek                                                                         | 13 |
| 2. <u>Teljes uniform hipergráfok particiófedései</u>                                                  | 14 |
| 1. Példák particiófedésekre                                                                           | 14 |
| 2. $K_n^s$ $s$ -rétű particiófedéséről                                                                | 16 |
| 3. $K_n^2$ 3-rétű particiófedéséről                                                                   | 18 |
| 4. $K_n^2$ 4-rétű particiófedéséről                                                                   | 23 |
| 5. $K_n^2$ $s$ -rétű particiófedéséről                                                                | 26 |
| 6. $K_n^r$ particiófedései $r$ -nél nem sokkal<br>többnél                                             | 28 |
| 3. <u>Teljes <math>r</math> osztályu hipergráfok particiófedései</u>                                  | 36 |
| 1. Két tétel $r$ osztályu hipergráfokra                                                               | 36 |
| 2. Teljes páros gráfok particiófedései                                                                | 40 |
| 4. <u><math>\mathcal{V}_k</math> és <math>\mathcal{T}</math> kapcsolatáról hipergráfok összegében</u> | 47 |
| 1. $\mathcal{V}_k$ és $\mathcal{T}$ hipergráfok $t$ -szerezésében                                     | 47 |
| 2. $\mathcal{V}_k$ és $\mathcal{T}$ hipergráfok diszjunkt összegében                                  | 52 |
| 5. <u>Nem csökkenthető lefogóhalmazok számáról</u>                                                    | 57 |
| 6. <u>Fogalmak, jelölések</u>                                                                         | 59 |

## Bevezetés

Ezen értekezés a kombinatorika egy jelentős, viszonylag új, és dinamikusan fejlődő ágához, a hipergráfok elméletéhez kapcsolódik. A hipergráfok a gráfok általánosításai. Az első monográfia, melyben a hipergráfoknak külön fejezetek vannak szentelve, C.Berge könyve [3]. E könyv megjelenésétől /1970/ általános a hipergráf elnevezés, az elmélet alapjai azonban régebbre nyulnak vissza, halmazrendszerek,  $r$ -gráfok, általánosított gráfok elnevezéssel sok dolgozat foglalkozott olyan kérdésekkel, melyeket ma a hipergráfok elméletéhez sorolunk.

Ertekezésünk hipergráfok éleinek csucspartíciókkal történő lefedéseivel, továbbá hipergráfok éleinek lefoghalmazaival foglalkozik, és e két kérdés összefüggéseivel. Az előbbit azért tartjuk érdekesnek, mert több ismert problémához kapcsolódik - ezt későbbiekben részletezzük - az utóbbira pedig a kombinatorika számos kérdése visszavezethető. Lefoghalmazokkal kapcsolatos eredmények és problémák sokasága található [3] és [13] művekben.

Az értekezés nagyobb része /1.,2.,3. fejezet/ egy problémakörrel, teljes és  $s$ -osztályu teljes hipergráfok partíciófedéseivel foglalkozik. Egy hipergráf partíciófedésén a csucsok olyan partícióit értjük, melynél minden él benne van valamelyik partíció valamelyik osztályában. Egy  $s$  számú partícióból álló partíciófedést  $s$ -rétű partíciófedésnek nevezünk. Erdeklődésünk főleg olyan problémák

felé irányul, hogy egy  $s$ -rétű particiófedés esetén mekkora fedőhalmaznak kell léteznie, illetve hány fedőhalmazzal fedhetők le a hipergráf csúcsai. Kiderül, hogy e kérdéseknek több arculata van. A következő tételt három ekvivalens alakban is kimondjuk, ezzel érzékeltetve ezt a többarcúságot:

1.tétel:  $K_n^s$  /a teljes  $s$  rangú uniform  $n$  pontú hipergráf,  
 $s \leq n/$   $s$ -rétű particiófedése csak triviális lehet, azaz  
 valamelyik partició egyetlen fedőhalmazból áll.

1'.tétel:  $K_n^s$  éleinek minden  $s$  szinnel való színezésében  
 valamelyik szín élei összefüggő,  $n$  csúcsú részhipergráfot  
 alkotnak.

1''.tétel: Ha egy  $s$  osztályú hipergráfban bármely  $s$  élnek  
 van közös csúcsa, akkor az összes élnek van közös csúcsa.  
 /feltételezve, hogy létezik legalább  $s$  számú él./

Általában  $H$  hipergráf  $s$ -rétű particiófedéseire vonatkozó kérdéseket  $H$  duális hipergráfjára átfogalmazva  $s$ -osztályú hipergráfokra vonatkozó problémákat nyerünk - ezek közül az egyik H.Ryser egy sejtése, mely szerint egy  $s$  osztályú hipergráfra  $T \leq (s-1)V$ , ahol  $V$  a független élek maximális számát,  $T$  pedig az éleket lefogó csúcsok minimális számát jelenti. E sejtésnek két speciális esetét bizonyítjuk be, a  $V = 1$ ,  $s=3$  és a  $V = 1$ ,  $s=4$  eseteket / 2.tétel és 4.tétel/.  $V = 1$  esetére minden  $s$ -re bebi-

zonyitjuk e sejtés egy következményét, hogy egy  $s$  osztályu  $e$  élű hipergráf  $V = 1$  esetén tartalmaz  $\left[ \frac{e}{s-1} \right]^*$  fokú csucot / 5.tétel/. A Ryser sejtés  $s=2$ -re Kőnig Dénes ismert tételét adja [12], mely szerint páros gráfban a független élek maximális száma és az éleket lefogó pontok minimális száma megegyezik. Az  $s \geq 3$  esetben a nehézség éppen az, hogy a lefogóhalmazokat és az élpakolásokat nem tudjuk célszerűen kapcsolatba hozni.

A particiófedések témája egy másik megfogalmazásban általánosított Ramsey-típusu problémákhoz kapcsolódik: azt kérdezzük, hogy egy teljes /vagy  $s$  osztályu teljes/ hipergráf éleit színezve, mekkora összefüggő monokromatikus részhipergráf létezik? Ezt a kérdést gráfok esetére Gerencsér László és a szerző [6] dolgozatában vetette fel. Itt hipergráfokra vetjük fel ugyanezt a kérdést. Megjegyezzük, hogy ebből az irányból kezdtük vizsgálni a particiófedések kérdését. A 3.tétel általánosítja a [6] ill.

[1]-ben szereplő eredményt, mely szerint egy teljes gráf éleinek 3-színezésében mindig van egy, kb. a pontszám fele nagyságú összefüggő egyszínű részgráf. Az 5.tétel megjavítja [6] becslését  $s$  színnel való színezés esetére, lényegében a lehető legjobb becslést kapjuk:  $n$  pontu teljes gráf éleit  $s$  színnel színezve, mindig van egy legalább  $\left[ \frac{n}{s-1} \right]^*$  pontu egyszínű összefüggő részgráf. A 6. és 7.tétel "valódi" hipergráf-tétel, olyan értelemben, hogy gráfokra nem érvényesek. A 7.tétel így szól:  $s \geq 3$  esetén  $K_n^s$  éleit  $s+1$  színnel színezve, valamelyik színben van egy legalább  $\left[ \frac{n \cdot s}{s+1} \right]^*$  pontu összefüggő egyszínű részhipergráf -

és ez a lehető legjobb eredmény. A 6.tétel ezt  $s+1$ -ről  $s+j$  színre általánosítja, ahol  $j$  kicsi  $s$ -hez képest. Ebben az esetben az eredmény csak asszimptotikusan pontos.

Egy hipergráf lefogóhalmazán csucsainak olyan rész-halmazát szokás érteni, melynek minden éllel van közös csuccsa. Az eddig vázolt problémák legtöbbször kapcsolatban van lefogóhalmazokkal, ez az oka annak, hogy további két fejezetben foglalkozunk velük. A 4. fejezet hipergráfok összegének lefogóhalmazáival foglalkozik - ezek a vizsgálatok Lehel Jenő és a szerző korábbi / [7] és [8] / dolgozataihoz kapcsolódnak, itt azonban elsősorban hipergráf-elméleti szempontból vizsgáljuk a kérdést. Bebizonyítjuk C.Berge egy sejtését /12.tétel/ továbbá, hogy kiegyensúlyozott /balanced/ hipergráfok összegében  $\vee$  korlátossága  $\mathcal{T}$  korlátosságát vonja maga után. A fejezet néhány negatív eredményt is tartalmaz. Az 5. fejezet egy minimális lefogóhalmazok számára vonatkozó becslést ismerttet egy következményével: egy  $r$  rangú hipergráfnak legfeljebb  $r^k$  legfeljebb  $k$  elemű minimális lefogóhalmaza lehet.

A szokásostól eltérően a használt fogalmakat és jelöléseket a disszertáció végére helyeztük el.

## 1. Particiófedések hipergráfokon.

1. Legyen  $H = /V, E/$  egy hipergráf.  $H$  csucsainak particióján  $V$  diszjunkt, nem üres osztályozását értjük. Legyen adva  $H$  csucsainak néhány, mondjuk  $s$  számú particiója. Azt mondjuk, hogy ezen  $s$  partició lefedí  $H$  éleit, ha  $E$  minden elemét tartalmazza valamelyik partició valamelyik osztálya. A particiók osztályait fedőhalmazoknak fogjuk nevezni.  $H$  éleinek lefedését  $s$  particióval az  $s$ -rétű particiófedés kifejezéssel is helyettesíteni fogjuk a rövidség kedvéért. Ha nem lényeges az, hogy hány partició szerepel, egyszerűen particiófedésről beszélünk.

Legyen  $P$  és  $Q$  két partició  $H$  hipergráfon. Azt mondjuk, hogy  $P$  finomabb  $Q$ -nál, ha  $P$  minden fedőhalmaza része  $Q$  valamely fedőhalmazának. Egy hipergráf particióin ez nyilván részben rendezést definiál. Ha  $P$  és  $Q$  particiófedések  $H$  hipergráfon, akkor  $P$ -t finomabbnak mondjuk  $Q$ -nál, ha minden  $P$ -beli partició finomabb valamely  $Q$ -belinél.

Egy partició triviális, ha egyetlen fedőhalmazból áll. Egy particiófedés triviális, ha van triviális particiója. Nyilvánvaló, hogy egy triviális particiófedésnél minden más particiófedés finomabb.

Legyen  $P$  particiófedés  $H = /V, E/$  hipergráfon. Tekintsük azt a hipergráfot, melynek csucshalmaza  $V$ , élei pedig  $P$  particióinak fedőhalmazai. Ha egy fedőhalmaz több particióban is szerepel, akkor ezt megfelelő multiplicitás-



sal vesszük. Az így definiált hipergráfot P fedéshipergráfjának nevezzük, és  $H/P/$ -vel jelöljük. Jegyezzük meg, hogy  $H/P/$  hipergráf nem mindig egyszerű hipergráf.  $H/P/$  azon részhipergráfjait, melyek egy partíció fedőhalmazából állnak, a partíció párhuzamos osztályának nevezzük. Egy párhuzamos osztály nyilván  $H/P/$  csucsait lefedő független érendszer. A  $H/P/$  hipergráf élei természetesen lefedik  $H$  éleit.

Sokszor fog szerephez jutni  $H/P/$ -nek az a részhipergráfja, mely  $H/P/$  /tartalmazásra/ maximális éleiből áll - egy élt csak egyszeres multiplicitással számolva. Ezt a hipergráfot P partíciófedés bázishipergráfjának nevezzük és  $H/P_{\max}/$ -al jelöljük. Beszélhetünk  $H/P_{\max}/$  párhuzamos osztályairól is - ezek  $H/P_{\max}/$  azon részhipergráfjai, melyek élei egy partícióhoz tartoznak. Egy párhuzamos osztály  $H/P_{\max}/$ -ban független érendszer -  $H/P_{\max}/$  csucsait azonban nem biztos, hogy lefedi egy párhuzamos osztály. Jegyezzük meg, hogy  $H/P_{\max}/$  bármely két különböző élére  $e \neq f$ . Két partíciófedés hasonló, ha bázishipergráfjaik izomorfak, és a párhuzamos osztályok is egymásba mennek át az izomorfizmusnál. A hasonlóság nyilván ekvivalencia reláció egy hipergráf partíciófedései között.

2. Tekintsük most a  $H=V, E/$  hipergráf egy élszínezését  $s$  színnel.  $H$  maximális egyszínű részhipergráfjainak összefüggő komponensei  $s$ -rétű partíciófedést definiálnak  $H$ -n. Ezt a partíciófedést az élszínezés által generált parti-

ciófedésnek nevezzük. Másrészt, ha kiindulunk  $H$  egy  $s$ -rétű particiófedéséből, akkor ebből kaphatunk élszinezést úgy, hogy azokat az éleket, melyek az  $i$ . partició egy fedőhalmazába esnek, az  $i$ . szinnel szinezünk, minden  $1 \leq i \leq s$ -re. Ily módon persze egy él több színt kaphat, ezért a többször szinezett élekről hagyjunk el színeket izlés szerint, amíg végül minden élhez csak egy szín lesz rendelve. Egy élszinezést, mely a fenti módon adódik, particiófedés által generált élszinezésnek nevezzük. A definíciók közvetlen folyományai a következő állítások:

- A1:  $H$  hipergráfon egy  $s$ -rétű particiófedés olyan élszinezéseket generál, melyekben legfeljebb  $s$  szín van.
- A2: Ha egy élszinezést  $H$  hipergráfon  $P$  particiófedés generálja, akkor ez az élszinezés olyan  $Q$  particiófedést generál  $H$ -n, mely  $P$ -nél finomabb.
- A3: Az élek  $s$  szinnel való szinezése  $s$ -rétű particiófedést generál.

3. Legyen  $P$  particiófedés  $H$  hipergráfon és tekintsük ennek  $H/P/$  fedéshipergráfját.  $H/P/$  duális hipergráfjára mondunk ki két állítást, melyek a definíciók következményei:

- A4: Ha  $P$   $s$ -rétű particiófedés  $H$ -n, akkor  $H/P/$  duálisa  $s$ -osztályu hipergráf, melyben nincs izolált csucs.
- A5:  $H$  hipergráf egy élének  $H/P/$  duálisában élhalmaz felel meg - ezen élhalmaznak van közös csucsa.

Egy  $s$  osztályu, izolált csucsot nem tartalmazó hipergráfból kiindulva, a duális hipergráf segítségével  $s$ -rétű par-

ticiófedést konstruálhatunk. Vegyünk egy  $s$  osztályu, izolált csucst nem tartalmazó hipergráfot, melyben élhalmazok vannak kijelölve, úgy, hogy minden egyes élhalmaznak van közös csucsa. Tekintsük ennek duális hipergráfját, és legyen

$V$  a duális hipergráf csucsainak halmaza

$E$  az  $s$  osztályu hipergráf kijelölt élhalmazainak megfelelő pontthalmazok  $V$ -ben

$P$  particiófedés egyes particióit az  $s$  osztályu hipergráf csucssztályai definiálják - azaz a duális hipergráf élei alkotják a particiófedést.

A6: A fenti módszerrel kapott  $H = /V, E/$  hipergráfon  $P$  s-rétű particiófedés.

Erdemes kiemelni azt az esetet, amikor  $P$  particiófedést egy teljes, uniform hipergráfon definiáljuk. Ebben az esetben ugyanis az A4., A5., A6. állításokban megfogalmazott párhuzam az  $s$  osztályu hipergráfok és a particiófedések között egyszerűsödik:

A7: Ha  $K_n^r$ -en  $P$  egy s-rétű particiófedés, akkor  $K_n^r$  fedés-hipergráfjának duális hipergráfja olyan  $s$  osztályu,  $n$  élű hipergráf, melyben bármely  $r$  élnek van közös csucsa. Fordítva, egy  $n$  élű,  $s$  osztályu hipergráf, melyben bármely  $r$  élnek van közös csucsa, és nincs izolált pontja, definiál egy s-rétű particiófedést  $K_n^r$  hipergráfon.

Jegyezzük meg, hogy az s-rétű particiófedések és a megfelelő  $s$  osztályu hipergráfok ekvivalens fogalmak. Ez

azt jelenti, hogy az A4., A5., A6. és A7.-ben kifejezett leképezések az s-rétű partíciófedések és bizonyos s osztályu hipergráfok között egymás inverzei. Ennek átgondolásához csak az kell, hogy egy hipergráf duálisának duálisa az eredeti hipergráffal izomorf.

4. Tekintsük azt az esetet, amikor H-t teljes uniform hipergráfnak választjuk, azaz  $H = K_n^t$  /A későbbi tételek nagy részénél így fogjuk H-t megválasztani/. Ebben az esetben a partíciófedéseknek kapcsolatuk van az u.n. feloldható /resolvable/ t-design-okkal. [5]. Minden feloldható t-design  $\lambda = 1$  -el egy partíciófedést ad, amelyben egy paralell osztály felel meg egy partíciónak, a blokkok pedig a fedőhalmazoknak. A partíciófedés a feloldható t-designoknál "szabadabb" struktúra, hiszen itt azt akarjuk csupán, hogy H minden éle legalább egy fedőhalmazban legyen benne. Bizonyos "kritikus" esetekben azonban egy partíciófedés léte vagy nemléte pontosan a megfelelő feloldható t-design létezésén múlik.

## 2. Teljes, uniform hipergráfok particiófedései.

1. Néhány példát adunk particiófedésekre.

P1. Legyen  $n \geq r$  és osszuk fel  $K_n^r$  csucsait egyenletesen  $r+1$  részre, jelölje  $A_i$  az  $i$ . részt.  $K_n^r$   $r+1$ -rétű particiófedését definiáljuk így: az  $i$ . partició egyik fedőhalmaza  $A_i$ , a másik  $V/K_n^r - A_i$ . A fedéshipergráf és bázishipergráf rangja  $\left[ \frac{n \cdot r}{r+1} \right]^*$ , és a bázishipergráfban minden pont foka  $r$ .

P2.  $j, u \geq 1$  és  $n = \lfloor r-1/j \rfloor u + \lfloor j+1/u \rfloor$  választással bontsuk fel  $K_n^r$  csucsait  $A_1, A_2, \dots, A_j, A_{j+1}$  diszjunkt  $u$  elemű halmazokra, továbbá  $B_1, B_2, \dots, B_{r-1}$  diszjunkt  $ju$  elemű halmazokra.  $K_n^r$   $r+j$ -rétű particiófedésének bázishipergráfját definiáljuk: az élek az  $\bigcup_{k=1}^{r-1} B_k \cup A_i$  halmazok  $/i=1, 2, \dots, j, j+1/$  és az  $\bigcup_{k=1}^{j+1} A_k \cup \bigcup_{k \neq i} B_k$  halmazok  $/i=1, 2, \dots, r/$ . Az ilyen módon kapott bázishipergráf uniform, rangja  $\lfloor r-1/j \rfloor u + u$ . Minden pont foka  $r$  vagy  $r+1$ . Megjegyezzük, hogy  $j=1$  esetén az első példát, P1-et adja P2 is.

P3. Legyen  $r$  páratlan és 3-al osztható. Tekintsünk  $r/r+1$  pontot egy  $M$  mátrixban elhelyezve, melynek  $r$  sora és  $r+1$  oszlopa van. A mátrix elemei lesznek hipergráfunk pontjai. Definiáljuk  $E_1, E_2, \dots, E_k$  éleket  $k = \frac{3/r+1/}{2}$ -re a következő módon:

- a.  $1 \leq i \leq r+1$ -re, páratlan  $i$ -re  $E_i$ -t úgy kapjuk, hogy  $M$ -ből elhagyjuk az  $i$ . oszlopot és az  $i+1$ -ik oszlop felső  $\frac{r}{3}$  elemét.

$1 \leq i \leq r+1$  -re, páros  $i$ -re  $E_i$ -t úgy kapjuk, hogy  $M$ -ből elhagyjuk az  $i$ . oszlopot és az  $i-1$  -ik oszlop felső  $\frac{r}{3}$  elemét.

b.  $1 \leq i \leq \frac{r+1}{2}$  -re  $E_{r+1+i}$  -t úgy kapjuk, hogy  $M$ -ből elhagyjuk a  $2i$  -edik és  $2i-1$  -edik oszlop alsó  $\frac{2 \cdot r}{3}$  elemét.

Könnyű belátni, hogy az  $E_i$  élek  $/1 \leq i \leq k/$  lefedik  $M$  összes  $r$  elemű részalmazát, ezért az  $E_i$ ,  $M - E_i$  élek egy  $k$ -rétű partíciófedést alkotnak  $K_{r/r+1}^r$  -en. A bázishipergráf uniform és rangja  $r/r - \frac{1}{3}$ .

Megjegyzés: a fenti konstrukció kiterjeszthető minden  $r/r+1/u$  alakú  $n$  számra  $/u \geq 1, \text{ egész}/$ , úgy, hogy egy pont helyébe  $u$  pontot teszünk. Ekkor továbbra is  $k$ -rétű partíciófedést kapunk, a bázishipergráf /és fedéshipergráf/ rangja pedig  $u \cdot r / r - \frac{1}{3}$  lesz.

P4. Legyen  $n$  ponton adva egy feloldható  $t$ -design,  $\lambda = 1$  paraméterrel,  $r$  párhuzamos osztállyal, melyben  $b$  nagyságú blokkok vannak. /Például  $n=8$ ,  $t=3$ ,  $r=7$ ,  $b=4$  esetén az 1234-5678, 1256-3478, 3456-1278, 1457-2368, 2357-1468, 2458-1367, 1358-2467 egy ilyen 3-design/

Tekintsük most a fenti adatokkal  $K_n^t$   $r$ -rétű fedését. Ha ezt úgy akarjuk megcsinálni, hogy a fedéshipergráf rangja a lehető legkisebb legyen, akkor ez a rang nyilván  $b$ , és a feloldható  $t$ -design egy ilyen  $r$ -rétű fedést szolgáltat.

Baranyai Zsolt szép eredménye szerint [2], ha  $n$  osztható  $t$ -vel, akkor az  $n$  elemű halmaz összes  $t$  elemű részalmazából álló  $t$ -design  $/\lambda = 1/$  feloldható, ezért igaz

a következő tétel:

Tétel: Ha  $n$  osztható  $t$ -vel, akkor  $K_n^t$ -nek van olyan  $t \cdot \binom{n}{t} \cdot \frac{1}{n}$ -rétű particiófedése, melyben a fedéshipergráf rangja  $t$ .

Egy másik, szép eredmény D.K.Ray-Chaudhuri és R.M.Wilson tétele [5], mely a  $t=2$  esetre vonatkozik, és azt mondja ki, hogy minden  $k \geq 2$ -höz van olyan  $C/k$  konstans, hogy  $n \geq C/k$  és  $n \equiv k \pmod{k-1}$  esetén létezik  $/n, k, 1/$  feloldható blokkrendszer. Ez példát ad particiófedésre is.

## 2. $K_n^s$ $s$ -rétű particiófedése.

Irjunk fel egy egyszerű állítást, mely Erdős Páltól származik:

A8: Ha  $K_n^2$  éleit két színnel színezzük, akkor tartalmaz  $n$  pontu egyszínű, összefüggő részgráfot.

Ezzel ekvivalens állításokat írhatunk fel az első fejezet fogalmait és apró állításait használva:

A9:  $K_n^2$  2-rétű particiófedése csak triviális lehet.

A10: Ha egy 2-osztályú hipergráfban /páros gráf/ bármely két élnek van közös pontja, akkor az összesnek is van.

Megjegyezzük, hogy A8 és A9 ekvivalenciája A1, A2 és A3-ból, A9 és A10 ekvivalenciája pedig A7-ből következik. Az állítások közül A10 az, melynek igazsága a legnyilvánvalóbb.

A továbbiakban előforduló tételek esetében is fennáll a lehetőség, hogy e három tálalás között válasszunk. Az első beállításban általánosított Ramsey-problémák, a má-

sodikban hipergráfok éleinek fedése, a harmadikban  $s$  osztályu hipergráfok tulajdonságai címszavakkal lehetne jelezni a tétel hovatartozását. Igyekezzünk mindig kiemelni azt a változatot, mely a leginkább kifejező.

Az A8. állítás tetszetős, de nem mély általánosítása a következő:

1. tétel:  $K_n^s$  éleit  $s$  színnel színezve, valamelyik színben van egyszínű  $n$  pontu összefüggő részhipergráf.

1. következmény:  $K_n^s$   $s$ -rétű partíciófedése mindig triviális.

2. következmény: Ha egy  $s$  osztályu hipergráfban bármely  $s$  élnek van közös pontja, akkor az összes élnek van. Ugy is kifejezhető ez, hogy  $\bigvee_{s-1} = s-1$  -ből  $\top = 1$  következik. /Itt, és a továbbiakban feltesszük, hogy a "bármely  $s$  élnek van közös pontja" kifejezés használata feltételezi, hogy legalább  $s$  él van./

1. tétel bizonyítása: A színek és a pontok számára vonatkozó indukciót alkalmazunk.  $s=2$  esetére a tétel A8.-ból következik minden  $n$ -re.  $n=s$  esetén a tétel nyilvánvalóan igaz minden  $s$ -re. E két dolog biztosítja, hogy az indukció működik. Legyen  $s \geq 3$ ,  $n > s$  és  $p$  tetszőleges pont  $K_n^s$  -ből. Hagyjuk el a  $p$  pontot  $K_n^s$  -ből, a kapott  $K_{n-1}^s$  hipergráfnak az indukciós feltevés értelmében van egyszínű, pl. piros  $n-1$  pontu, összefüggő  $H$  részhipergráfja. Ha  $p$ -re illeszkedik  $K_n^s$  -ben piros él, akkor ezt  $H$ -hoz hozzávéve  $n$  pontu összefüggő piros részhipergráfot kapunk, és ezt akartuk bizonyítani. Ha  $p$ -re nem illeszke-



dik piros él, akkor vágjuk le  $p$ -t  $K_n^S$ -ből. Így a  $K_{n-1}^{S-1}$  hipergráfhoz jutunk, az indukciós feltevés értelmében ennek van egyszínű, pl. kék  $n-1$  pontu összefüggő  $H'$  részhipergráfja.  $H'$  minden éléhez  $p$  pontot visszatéve  $K_n^S$  kék,  $n$  pontu, összefüggő részhipergráfját kapjuk.  $\square\square\square$

### 3. $K_n^2$ 3-rétű fedéseiről.

Láttuk, hogy  $K_n^2$  2-rétű particiófedése csak triviális lehet. Nézzük meg  $K_n^2$  3-rétű particiófedéseinek strukturáját.  $K_n^2$  hipergráfon speciális 3-rétű particiófedéseket definiálunk. Legyen  $V/K_n^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ , ahol  $A_i$ -k diszjunkt halmazok és  $A_4$  üres is lehet, a többi azonban nem üres. A particiófedés bázishipergráfjának élei az  $A_i \cup A_j$  halmazok  $i \neq j$ -re. Megadjuk a párhuzamos osztályokat:

$$\begin{aligned} PO_1 &= \{A_1 \cup A_2, A_3 \cup A_4\} & PO_1 &= \{A_1 \cup A_2\} \\ PO_2 &= \{A_1 \cup A_3, A_2 \cup A_4\} \text{ ha } A_4 \neq \emptyset & PO_2 &= \{A_1 \cup A_3\} \text{ ha } A_4 = \emptyset \\ PO_3 &= \{A_1 \cup A_4, A_2 \cup A_3\} & PO_3 &= \{A_2 \cup A_3\} \end{aligned}$$

A definiált bázishipergráfokat  $B_1$ -el és  $B_2$ -vel jelöljük. Megjegyezzük,  $A_4 \neq \emptyset$  esetén a párhuzamos osztályok megadásával már particiófedést kaptunk,  $A_4 = \emptyset$  esetén azonban még nem.

2.Tétel:  $K_n^2$  3-rétű, nem triviális particiófedésének bázishipergráfja izomorf a fent megadott hipergráfok valamelyikével. /Az izomorfia a párhuzamos osztályok megfeleltetését is beleértve/.

1.Következmény:  $K_n^2$  3-rétű nem-triviális  $P$  particiófedé-

sénél  $\varphi / H/P// = 2$ .

2.Következmény:  $K_n^2$  éleinek minden 3-színezésében van egy legalább  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^*$  pontu egyszínű, összefüggő részgráf.

A 2.Tétel segítségével a 2.Következménynél erősebb állítást is kimondhatunk, mely az ugynevezett általánosított Ramsey elméletbe is beleillik. Ehhez vezessük be a következő jelölést:  $r/k_1, k_2, k_3/$  jelölje azt a legkisebb természetes számot, melyre igaz a következő:  $n = r/k_1, k_2, k_3/$ -re  $K_n^2$  gráf éleit tetszőlegesen három színnel színezve, valamely  $i$ -re  $/i=1, 2, 3/$   $K_n^2$  tartalmaz egy legalább  $k_i$  pontu összefüggő, egyszínű részgráfot.

3.Tétel: legyen  $2 \leq k_1 \leq k_2 \leq k_3$ , ekkor

$$r/k_1, k_2, k_3/ = \begin{cases} 4m - 2 & \text{ha } k_1 = k_2 = k_3 = 2m \\ \max / 2k_1 - 1, \left\lfloor \frac{k_1 + k_2 + k_3 - 1}{2} \right\rfloor, k_3 / \end{cases}$$

Megjegyzés: A tétel speciális esete, a  $k_1 = k_2 = k_3 = k$  u.n. diagonális eset szerepel [6]-ban,  $k=2m$  esetére hibásan, ezt Andrásfai javította [1].

2.Tétel bizonyítása: legyen  $P \neq K_n^2$  nem triviális 3-rétű fedése. Tekintsük  $P$  bázishipergráfját, ebben minden párhuzamos osztályban van él - ellenkező esetben  $K_n^2$ -t  $P$  két particiója is lefedi, ekkor A9. állítás miatt ez csak triviális particiófedés lehet, ami ellentmond annak, hogy  $P$  nem triviális. Legyen  $e$  és  $f$   $H/P_{\max}/$  két éle különböző párhuzamos osztályokból.  $e-f$  és  $f-e$  nem üres, a közöttük futó éleket  $H/P_{\max}/$  harmadik párhuzamos osztályá-

ból való  $g$  él fedheti csak le.  $e \cap f \neq \emptyset$ , különben  $g \supseteq e$  /és  $g \supseteq f$ / lenne, ami  $H/P_{\max}$ -ban lehetetlen. Két eset lehet: a./ ha  $e \cup f = V/H$  akkor könnyű látni, hogy  $e, f, g$  élek alkotják  $H/P_{\max}$  éleit, ekkor  $H/P_{\max}$  nyilván izomorf  $B_2$ -vel. / $e \cap f$ ,  $e \cap g$  és  $f \cap g$  alkotják  $A_1, A_2, A_3$  halmazokat/. b./ ha  $e \cup f$  valódi része  $V/H$ -nak, akkor  $e \cap f$  és  $V/H - /e \cup f/$  közötti éleket  $H/P_{\max}$  valamely  $g_1$  éle fedheti csak, mely  $e$ -t és  $f$ -et tartalmazó párhuzamos osztályban nincs benne.  $g \cap g_1 = \emptyset$ , hiszen  $g$  és  $g_1$  ugyanabban a párhuzamos osztályban van. Az előzőhöz hasonló érvelés mutatja, hogy  $V/H - /e \cup f/$  és  $e-f$  közötti éleket olyan  $f_1$ ,  $V/H - /e \cup f/$  és  $e-f$  közötti éleket olyan  $e_1$  él fedheti csak, melyre  $e, e_1$  ill.  $f, f_1$  ugyanabban a párhuzamos osztályban van.  $e, e_1, f, f_1, g, g_1$  éleken kívül több él nem is lehet  $H/P_{\max}$ -ban, ezt könnyű ellenőrizni, ily módon  $H/P_{\max}$  izomorf  $B_1$ -el.  $\square$

3.Tétel bizonyítása: jelölje  $f = f/k_1, k_2, k_3/$  a tételben szereplő függvényt. Belátjuk először, hogy

$$r/k_1, k_2, k_3/ \leq f \quad /i/$$

Tekintsük e célból  $K_f^2$ -nek tetszőleges 3-színezését, és nézzük a színezés által generált particiófedést  $K_f^2$ -n. Ha ez triviális, akkor valamely színben van egy összefüggő, egyszínű részgráf és  $f$  definíciója olyan, hogy  $\max/k_1, k_2, k_3/ \leq f$ . Feltehetjük ezért, hogy a particiófedés nem triviális. Alkalmazzuk a 2.Tételt, e szerint a particiófedés bázishipergráfja izomorf  $B_1$ -el, vagy  $B_2$ -vel. a. Ha  $B_1$ -el izomorf, válasszuk ki azt az  $A_i, A_j$  párt, melyre  $|A_i| + |A_j|$  a legnagyobb.  $k_1 = k_2 = k_3 = 2m$

esetén  $f=4m-2$ , ezért  $|A_i| + |A_j| \geq 2m-1$ , de ha itt egyenlőség áll, akkor pl.  $|A_i| \geq m$ . Mivel a másik két halmaz is  $2m-1$  elemű együttesen, ezért pl.  $|A_k| \geq m$ , ahol  $k$  különbözik  $i$ -től és  $j$ -től.  $|A_i| + |A_k| \geq 2m$ , ami ellentmond  $A_i$  és  $A_j$  választásának. Azt találtuk tehát, hogy  $|A_i| + |A_j| \geq 2m = k_1 = k_2 = k_3$ .  $A_i \cup A_j$  azonban a particiófedéshez tartozó fedőhalmaz, ezért összefüggő egyszínű részgráfnak felel meg, ezzel a  $k_1 = k_2 = k_3 = 2m$  esetet elintéztük. Minden más esetben  $f \geq 2k_1 - 1$  és az első színnek megfelelő párhuzamos osztály két diszjunkt éle közül valamelyik legalább  $k_1$  elemű, ami egy legalább  $k_1$  pontu, összefüggő összefüggő egyszínű részgráfot jelent az első színben.

b./ Ha  $K_F^2$  3-színezése által generált particiófedés bázishipergráfja  $B_2$ -vel izomorf, akkor az

$$f \geq \left\lfloor \frac{k_1 + k_2 + k_3 - 1}{2} \right\rfloor$$
 egyenlőtlenséget használjuk ki, melyhez csak a  $k_1 = k_2 = k_3 = 2m$  esetben férhet kétség, azonban ekkor is  $f = 4m - 2 \geq \left\lfloor \frac{6m - 1}{2} \right\rfloor$  minden  $m \geq 1$ -re.

A  $B_2$  definíciójában szereplő  $A_1, A_2, A_3$  halmazokra feltehetjük, hogy  $|A_1| + |A_2| \leq k_1 - 1$ ,  $|A_1| + |A_3| \leq k_2 - 1$  és  $|A_2| + |A_3| \leq k_3 - 1$ , különben nincs mit bizonyítani. Ezen egyenlőtlenségeket összeadva  $2f \leq k_1 + k_2 + k_3 - 3$  adódik, ahonnan

$$f \leq \frac{k_1 + k_2 + k_3 - 3}{2} < \left\lfloor \frac{k_1 + k_2 + k_3 - 1}{2} \right\rfloor$$
 ami ellentmondás, ezzel /i/-t igazoltuk.

Hátra van még annak igazolása, hogy

$$r/k_1, k_2, k_3/ \geq f \quad //ii//$$

Definiálnunk kell ehhez  $K_{f-1}^2$  alkalmas 3-színezését. Ha

$k_1=k_2=k_3=2m$ , akkor  $f-1=4m-3$ .  $B_1$  -ben  $|A_1| = |A_2| = |A_3| = m-1$ ,  $|A_4| = m$  választással a bázishipergráf által generált színezésben legfeljebb  $2m-1$  nagyságú egyszínű összefüggő rész lesz. Ha  $f=2k_1-1$  és  $k_1$  páros, pl.  $k_1=2m$ , akkor  $B_1$ -ben legyen  $|A_1| = |A_4| = m$ ,  $|A_2| = |A_3| = m-1$ . Ekkor az 1-es és a 2-es színben legfeljebb  $2m-1$ , a hármas színben  $2m$  nagyságú összefüggő részt generál  $B_1$ .  $k_2 \geq k_1$  és  $k_3 > k_1$  miatt ez megfelel.  $/k_3 = k_1$  nem lehet, mert ekkor  $k_1=k_2=k_3=2m$  lenne, amit már előzőleg elintéztünk/. Ha  $f=2k_1-1$  és  $k_1$  páratlan, pl.  $k_1=2m+1$ , akkor  $f-1=4m$ , és  $B_1$ -ben valamennyi  $A_i$ -t  $/i=1,2,3,4/$   $m$ -eleműnek választva, mindhárom színben legfeljebb  $2m=k_1-1$  nagyságú összefüggő részt generál  $B_1$ .

Ha  $\sum_{i=1}^3 k_i$  páratlan, és  $f = \left\lfloor \frac{k_1+k_2+k_3-1}{2} \right\rfloor$ , akkor

$B_2$ -ben

$$|A_1| = \frac{k_1+k_2+k_3-1}{2}, \quad |A_2| = \frac{k_1+k_3+k_2-1}{2}, \quad |A_3| = \frac{k_2+k_3-k_1-1}{2}$$

választással egész számok a törtek, továbbá nem negatívak, ezt elég  $A_1$  esetén ellenőrizni:  $k_3 < f$ , mert különben  $k_3$  lett volna a maximum  $/k_3=f$  esetet ott intézzük el, ahol  $k_3$  a maximum/.

$$k_3 < f = \frac{k_1+k_2+k_3-1}{2}, \quad \text{ahonnan } 0 < k_1+k_2-k_3-1$$

adódik. A  $B_2$  által generált színezésben  $k_1-1, k_2-1, k_3-1$  nagyságú összefüggő részek vannak az egyes színekben, és

$$\sum_{i=1}^3 |A_i| = f-1.$$

Ha  $\sum_{i=1}^3 k_i$  páros, akkor  $A_i$ -k elemszámát csöppet módosítani kell:

$$|A_1| = \frac{k_1+k_2-k_3}{2}, \quad |A_2| = \frac{k_1+k_3-k_2-2}{2}, \quad |A_3| = \frac{k_2+k_3-k_1-2}{2}$$

Ebben az esetben  $k_1-1$ ,  $k_2-1$ ,  $k_3-2$  nagyságu összefüggő egyszínű részgráfok vannak legfeljebb a  $B_2$  által generált színezésben.

Végezetül, ha  $f=k_3$ , akkor  $K_{f-1}^2$  valamennyi élét a harmadik színnel színezzük ki. Ezzel /ii/-t igazoltuk.  $\square\square\square$

#### 4. $K_n^2$ 4-rétű fedéseiről.

$K_n^2$  4-rétű fedései esetében a 2.Tételhez hasonló strukturátételt nem mondunk ki, mert nem érné meg a vesződséget. Kimondjuk azonban a 2.Tétel 1. Következményének analógiájára a következőt:

4.Tétel:  $H=K_n^2$  4-rétű  $P$  partíciófedésénél  $\vartheta(H/P//) \leq 3$ .

4A.Tétel: Ha  $K_n^2$  gráf éleit 4 színnel színezzük, akkor pontjai lefedhetők legfeljebb három egyszínű, összefüggő részgráf pontjaival.

Következmény:  $K_n^2$  éleinek minden 4-színezésében van egy legalább  $\left[\frac{n}{3}\right]^*$  pontu összefüggő egyszínű részgráf.

Megjegyezzük, hogy ezen következmény általánosítását a következő pontban fogjuk tárgyalni. A 4.Tétel lényegében pontos, amint azt a  $t=2, r=4, b=3, n=9$  paraméterekkel rendelkező feloldható blokkrendszer mutatja. Ebből kiindulva minden 9-el osztható  $n$ -re konstruálható olyan 4-rétű partíciófedés, melynek fedéshipergráfjára  $\vartheta = 3$ . A konstrukció egyben a Következmény pontosságát is mutatja.

A 4.Tételt a 4A. alakjában fogjuk bizonyítani. A bizonyításhoz szükség lesz az alábbi lemmára:

Lemma: legyen  $G=K_n^2$  csucsainak halmaza három diszjunkt, nem-üres részre felbontva:  $V/G = \bigcup_{i=1}^3 V_i$ . Tegyük fel, hogy  $G$  élei 4 szinnel vannak kiszínezve, olymódon, hogy  $V_i$ -re nem illeszkedik él, melynek színe  $i$  és csak az egyik végpontja van  $V_i$ -ben.  $/i=1,2,3/$ . Ekkor igaz a következő két állítás valamelyike:

1.  $G$  csucsai lefedhetők legfeljebb két, a 4. színben összefüggő részgráf csucsáival.

2.  $G-V_i$  csucsai lefedhetők egy egyszínű összefüggő részgráf csucsáival valamely  $i$ -re.  $/i=1,2,3/$ .

Bizonyítás: A  $V_i$  és  $V_j$  közötti élek két szinnel vannak színezve, így a 9. Tétel, ill. annak 9A. megfogalmazása alapján  $V_i \cup V_j$  lefedhető legfeljebb két összefüggő egyszínű részgráf csucsáival. Feltehető, hogy pontosan két-tővel fedhető le minden  $V_i, V_j$  pár, ellenkező esetben nincs mit bizonyítani - a lemma 2. állítása teljesül.

Ha valamelyik  $V_i, V_j$  pár, például  $V_1$  és  $V_2$  uniója lefedhető két, a negyedik színben összefüggő részgráffal, akkor osszuk  $V_3$  pontjait két osztályba:  $A$  legyen azon pontok halmaza, melyekből indul 4. színű él  $V_1$  vagy  $V_2$  felé,  $B$  pedig legyen  $V_3-A$ . Ha  $A=\emptyset$ , akkor teljesül a lemma 2. állítása, ha  $B=\emptyset$ , akkor a lemma 1. állítása igaz. Feltehető ezért, hogy  $A$  és  $B$  nem üres. Ha  $A$  minden pontjából indul  $V_1$  felé a 2. színben él, akkor a  $V_1 \cup V_3$  lefedhető a 2. színben összefüggő részgráffal, hiszen  $B$  és  $V_1$  között minden él színe 2-es. Ebben az esetben teljesül a lemma 2. állítása. Ha viszont  $A$ -ban van egy  $p$  pont, melyből  $V_1$  minden pontjába 4. színű él fut, akkor a  $V_1 \cup V_2 \cup$

$\cup \{p\}$  pontok közötti 4. színű élek egy összefüggő gráfot határoznak meg, ezért teljesül a lemma 2. állítása.

A fentiek alapján feltehetjük, hogy bármely két  $V_i$  és  $V_j$  egyesítése csak két különböző színű összefüggő részgráffal fedhető le. Könnyű belátni, hogy ekkor a fedés csak olyan lehet, melyben mindkét színű összefüggő részgráf pontjai lefedik  $V_i$ -t vagy  $V_j$ -t. Egyszerűen adódik / két esetet kell csak megnézni/ ebből, hogy  $G-V_i$  valamely  $i$ -re lefedhető a 4. színben összefüggő részgráf csucsával, azaz a 2. állítás igaz.  $\square\square\square$

A 4. Tétel bizonyítása: legyenek  $G=K_n^2$  élei négy színnel kiszínezve, és tekintsünk tetszőleges  $p$  pontot  $G$ -ből. Legyen  $A_1, A_2, A_3$  a  $p$  pontot tartalmazó, az 1., 2., 3. színekben összefüggő, maximális részgráfok pontthalmazai. Ezen halmazok által kapott diszjunkt felbontását  $V/G/-$ nek  $X$ -el fogjuk jelölni, és indexként az  $X$ -hez azt írjuk, ahányadik  $A$  halmazban vannak egy halmaz pontjai a felbontásból.  $X_0$  -al azon pontok halmazát jelöljük, melyek egyik  $A_i$ -ban sincsenek benne. Pl.  $X_{23}$  jelöli az  $A_2$ -ben és  $A_3$ -ban lévő, de  $A_1$  -ben nem lévő pontok halmazát.

1. Ha  $X_0 = \emptyset$ , akkor  $A_i$ -k lefedik  $V/G/-$ t, azaz  $V/G/ = \bigcup_{i=1}^3 A_i$  és ezt akartuk bizonyítani. Tegyük fel ezért, hogy  $X_0 \neq \emptyset$ .

2.  $X_{123} \neq \emptyset$ , hiszen  $p \in X_{123}$ .  $X_{123}$  és  $X_0$  között nyilván minden él 4. színű  $A_i$ -k maximalitása miatt, ezért az  $X_{123} \cup X_0$  halmaz által 4. színben feszített részgráf összefüggő.

3. Ha  $X_i = \emptyset$  valamely  $i$ -re / $i=1,2,3$ / pl.  $X_1 = \emptyset$ ,



akkor  $A_2, A_3$  és  $X_{123} \cup X_0$  halmazok által a 2., 3., 4. színekben feszített részgráfok csúcsai lefedik  $G$  csúcsait és a tétel igaz.

4. Feltehetjük tehát 3. miatt, hogy  $X_i \neq \emptyset$   $i=1,2,3$  esetén. Alkalmazhatjuk a lemmát ezen halmazokra, hiszen  $X_i$  és  $X_j$  között nem mehet sem  $i$ . színű sem  $j$ . színű él  $A_i$  és  $A_j$  maximalitása miatt. A lemmából két dolog következhet:

A;  $X_1$  lefedhető két, a 4. színben összefüggő részgráf pontjaival, ekkor ezekhez a kettősmetszetek is hozzávehetők, hiszen  $X_1$  és  $X_{23}$ ,  $X_2$  és  $X_{13}$ ,  $X_3$  és  $X_{12}$  között minden él 4. színű.  $X_0 \cup X_{123}$  adja a harmadik halmazt  $G$  csúcsainak fedéséhez.

B;  $X_1 \cup X_j$  lefedhető egy összefüggő egyszínű részgráf pontjaival. Tegyük fel pl. azt, hogy  $X_1 \cup X_2$  lefedhető így. Ha  $X_{12} = \emptyset$ , akkor  $X_1 \cup X_2$ ,  $A_3$  és  $X_{123} \cup X_0$  halmazok szolgáltatják a kívánt fedést. Ha  $X_{12} \neq \emptyset$  és van  $X_0$  és  $X_{12}$  között 4. színű él, akkor  $X_{123} \cup X_0 \cup X_{12} \cup X_3$  összefüggő a 4. színben, ehhez  $X_1 \cup X_2$  fedőhalmazát és  $A_3$ -at hozzávéve kapjuk a kívánt fedést. Végül, ha  $X_0$  és  $X_{12}$  között nincs 4. színű él, akkor közöttük minden él 3. színű. Ekkor  $X_1 \cup X_2$  fedőhalmazához  $A_3$ -at és  $X_0 \cup X_{12}$ -t véve kapjuk a keresett fedést.  $\square$

## 5. $K_n^2$ s-rétű partíciófedéseiről.

$s=2,3,4$  esetén az előző szekciókban már kaptunk eredményeket. Az A8 állítás, a 2. Tétel 1. Következménye és a 4. Tétel általánosítása lenne H. Ryser következő sejtése:  
Sejtés:  $K_n^2$  s-rétű partíciófedésénél a fedéshipergráf fe-

dési száma legfeljebb  $s-1$ .

A sejtés másik alakja:

Sejtés:  $K_n^2$  minden  $s$ -színezésénél  $K_n^2$  pontjai lefedhetők legfeljebb  $s-1$  összefüggő egyszínű részgráf pontjaival.

A sejtés harmadik alakja:

Sejtés: Ha egy  $s$  osztályu hipergráfban  $V = 1$ , akkor  $T \leq s-1$ .

Ryser sejtése a fenténél általánosabb, a harmadik alakban elmondva így szól: egy  $s$  osztályu hipergráfban  $T \leq V/(s-1)$ . Ez  $s=2$  esetén lényegében a Kőnig tétel [12].

Érdekes megfogalmazni ezt a sejtést a második alakban is:

Sejtés: Ha egy gráf éleit, melyben a független pontok maximális száma  $\alpha$ ,  $s$  színnel színezzük, akkor a gráf csúcsai lefedhetők legfeljebb  $\alpha \cdot (s-1)$  számú összefüggő egyszínű részgráf csúcsaival. /  $\alpha = 2$  esetén a Kőnig tétellel ekvivalens/.

Ebben a részben a Ryser sejtés egy következményét igazoljuk, nevezetesen a 2.Tétel 2.Következményének és a 4A.Tétel következményének általánosítását:

5.Tétel:  $K_n^2$   $s$ -rétű particiófedésénél a fedéshipergráf rangja legalább  $\left[ \frac{n}{s-1} \right]^*$ .

Az előzőkhöz hasonlóan ezt a tételt is kimondjuk még két ekvivalens formában:

5A.Tétel:  $K_n^2$  éleinek minden  $s$ -színezésében van egy legalább  $\left[ \frac{n}{s-1} \right]^*$  pontu összefüggő egyszínű részgráf.

5B.Tétel: Egy  $s$  osztályu  $n$  élű hipergráfban  $V=1$  esetén van egy legalább  $\left[ \frac{n}{s-1} \right]^*$  foku pont.

Megjegyzés:  $n=s-1/2u$  és  $n=s-1/2u+1$  -re a tételek éle-

sek, ha létezik  $v=s-1/2$ ,  $k=s-1$ ,  $r=s$ ,  $\lambda=1$  paraméterű feloldható blokkrendszer. Ebben az esetben minden  $n$ -re feloszthatjuk  $K_n^2$  pontjait  $(s-1)^2$  részre egyenletesen, és ezen részekből, mint atomokból elkészítve a fenti blokkrendszert, a párhuzamos osztályok definiálják a particiófedést. Könnyű belátni, hogy a fedéshipergráf rangja  $\left[\frac{n}{s-1}\right]^*$ -el osztva 1-hez tart. Kérdés azonban, hogy olyan  $s$ -re, melyre a blokkrendszer nem létezik, pl.  $s=7$ -re, hogyan lehet olyan  $s$ -rétű particiófedést készíteni, hogy a fedéshipergráf rangja közelítse az  $\left[\frac{n}{s-1}\right]^*$  értéket.

5.Tétel bizonyítása: a tétel következik a páros gráfokra vonatkozó 10.Tételből. Legyen ugyanis  $K_n^2$  tetszőleges színezésében  $X$  egy tetszőleges egyszínű összefüggő komponens. Ha  $X$   $K_n^2$  összes pontját tartalmazza, nincs mit bizonyítani. Ellenkező esetben az  $X$  és  $K_n^2 - X$  közötti teljes páros gráf élei  $s-1$  színnel vannak színezve. A 10.Tétel szerint ekkor  $\left[\frac{n}{s-1}\right]^*$  nagyságú összefüggő egyszínű részgráf létezik, ezzel a tételt igazoltuk.□□□

6.  $K_n^r$  particiófedései  $r$ -nél nem sokkal több rétűen.

Az 2. szekcióban igazoltuk, hogy  $K_n^r$   $r$ -rétű particiófedésének fedéshipergráfja  $n$  rangú. Most azt vizsgáljuk, amikor  $r$ -nél több rétű particiófedésünk van  $K_n^r$ -en.

6.Tétel: Legyen  $r \leq s < \frac{3r+1}{2}$  és  $r \geq 3$ . Ekkor  $K_n^r$   $s$ -rétű particiófedésénél a fedéshipergráf csucsai lefedhetők  $s$  éllel, melyek közül minden csucs legalább  $r$ -et tartalmaz.

Ekvivalens alakban:

6A.Tétel: Ha  $r \leq s < \frac{3r+1}{2}$  és  $r \geq 3$ , akkor egy  $s$  osztályu hipergráfban, melyben bármely  $r$  élnek van közös pontja,  $T_r \leq s$ .

1.Következmény: Ha  $r \leq s < \frac{3r+1}{2}$  és  $r \geq 3$ , akkor  $K_n^r$  s-rétű particiófedésének fedéshipergráfja legalább  $\left[ \frac{rn}{s} \right]^*$  rangú.

Élszinezésre elmondva a következmény így szól:

1A.Következmény:  $r \leq s < \frac{3r+1}{2}$  és  $r \geq 3$  esetén  $K_n^r$  éleinek minden  $s$ -szinezésében van egy legalább  $\left[ \frac{rn}{s} \right]^*$  pontu egyszínű, összefüggő részhipergráf.

Az 1A.Következmény  $s=1$  esetén az 1.Tételt adja.  $s=r+1$  -re a becslés minden  $r \geq 3$ -ra pontos, ezért ezt külön kiemeljük:

7.Tétel:  $K_n^r$  -nek  $r \geq 3$  esetén minden  $r+1$  -rétű particiófedésében a fedéshipergráf rangja legalább  $\left[ \frac{rn}{r+1} \right]^*$ .  $K_n^r$  -nek van olyan  $r+1$  -rétű particiófedése, melyben a rang pontosan  $\left[ \frac{rn}{r+1} \right]^*$ .

7A.Tétel:  $K_n^r$  -nek  $r \geq 3$  esetén az élek minden  $r+1$  -szinezésében van egy legalább  $\left[ \frac{rn}{r+1} \right]^*$  pontu egyszínű, összefüggő részhipergráf, és van olyan  $r+1$ -szinezés, amelyben pontosan ennyi a legnagyobb összefüggő, egyszínű részhipergráf mérete.

1.Megjegyzés: Az  $r \geq 3$  lényeges megszorítás,  $r=2$ -re a fenti tételek nem igazak. Ebben az esetben a 3.Tétel érvényes. Azt, hogy a 7. és 7A. Tétel pontos, az 1. szekció Pl. példája mutatja.

2.Megjegyzés: A 6.Tétel nagyságrendileg a lehető legjobb,

ezt a P2. példa mutatja az 1. szakaszból, itt ugyanis a bázishipergráf rangja  $/r-1/ju+u$  és  $s=r+j$ , ezért

$$\frac{\frac{rn}{r+j}}{/r-1/ju+u} = \frac{\frac{r//r-1/ju+/j+1/u/}{r+j}}{/r-1/ju+u} = \dots = \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{r}}}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{j}}}$$

és ez 1-hez tart, ha  $\frac{1}{r}$  0-hoz és  $r$  végtelenhez tart.

Speciálisan tehát minden fix  $j$ -re  $/1 \leq j < \frac{r+1}{2}$  / asszimptotikusan pontos a tétel, de pl.  $j = [\sqrt{r}]$  esetén is.

3.Megjegyzés: A 6.Tétel  $\frac{3r+1}{2}$  -nél kisebb rétű particiófedésekkel foglalkozik. Az 1. szakasz P3. példája azt mutatja, hogy  $\frac{3r+3}{2}$  -rétű particiófedés esetén a 6. Tétel már nem asszimptotikusan pontos. Ennél a példánál ugyanis

$$\frac{\frac{rn}{s}}{r/r - \frac{1}{3}/} = \frac{\frac{r \cdot r/r + 1/}{\frac{3r+3}{2}}}{r/r - \frac{1}{3}/} = \frac{2r}{3r - 1} \quad \text{és ez } \frac{2}{3} \text{ -hoz tart}$$

ha  $r$  végtelenhez.

6.Tétel bizonyítása:  $r=s$  esetén igaz a tétel, ezt az 1.

Tétel biztosítja. Legyen  $r < s < \frac{3r+1}{2}$ . Feltehetjük, hogy  $K_n^r$  -nek olyan  $s$ -rétű particiófedése van adva, melyben egyik párhuzamos osztály sem felesleges, azaz minden  $i$ -re van olyan  $C_i$  fedőhalmaz az  $i$ . párhuzamos osztályból, hogy  $j \neq i$  esetén  $C_i \not\subseteq C_j$ , ahol  $C_j$  a  $j$ . párhuzamos osztály egy fedőhalmaza. /Ellenkező esetben indukciót alkalmazhatunk/. Válasszuk ki tehát  $C_1, C_2, \dots, C_s$  fedőhalmazokat különböző párhuzamos osztályokból, úgy, hogy ezek a

fedéshipergráf maximális élei legyenek. Jelölje  $L/H/$  a  $C_1, C_2, \dots, C_s$  élekből /és  $K_n^r$  pontjaiból/ álló  $H$  hipergráf élgráfját, tehát  $L/H/-$ nak  $s$  pontja van, és két pont között pontosan akkor van él, ha a megfelelő  $H$ -beli éleknek van közös pontja. Legyen  $j=s-r$ , ekkor feltételünk szerint  $j < \frac{r+1}{2}$ .

Bebizonyítjuk, hogy a  $H$  hipergráfban minden pont foka legalább  $r$ . Ebből a tétel már következik. Először egy lemmát bizonyítunk:

Lemma:  $L/H/-$ ban a független él maximális száma legalább  $j+1$ .

Lemma bizonyítása: Ha  $x_1y_1, \dots, x_ky_k$  egy maximális független élrendszer  $L/H/-$ ban, akkor ezen él végpontjainak elhagyásával visszamaradó  $X$  ponthalmaz üres és minden  $x_iy_i$  pár teljesíti a következő két tulajdonság valamelyikét:

1.  $x_i$ -ből vagy  $y_i$ -ből nem fut él  $X$ -be
2.  $x_i$ -ből és  $y_i$ -ből egyetlen él fut  $X$  ugyanazon pontjához.

Válasszuk ki minden  $x_iy_i$  párból azt a pontot, melyből legfeljebb egy él fut  $X$  felé, ezen pontok alkossák az  $Y$  halmazt. Az  $Y$ -beli pontoknak megfelelő  $H$ -beli éleknek van olyan reprezentánsrendszere  $V/H/-$ ban, mely idegen az  $X$ -nek megfelelő  $H$ -beli élektől, hiszen ha  $Y$  egy pontja nincs  $X$ -el összekötve, akkor ezen pontnak megfelelő  $H$ -beli él tetszőleges pontja megfelel, ha pedig  $Y$  egy  $y$  pontja egyetlen  $X$ -beli  $x$  ponttal van összekötve, akkor az  $y$ -nak megfelelő  $H$ -beli élből kivonva az  $x$ -nek megfe-

lelő  $H$ -beli élt, a különbség /nem üres, mert nincsenek tartalmazkodó élek  $H$ -ban/ tetszőleges pontja megfelel. A  $C_i$ -k átszámozásával elérhető, hogy az  $X$ -nek megfelelő  $H$ -beli élek legyenek  $C_1, \dots, C_u$ , az  $Y$ -nak megfelelő  $H$ -beli élek  $C_{u+1}, \dots, C_v$  és az utóbbiakból választott reprezentáns rendszer pedig  $p_{u+1}, \dots, p_w$ . / $w \leq v$ /. Ha  $w < r$ , akkor  $\bigcup_{i=1}^u C_i$  -től idegen pontokkal egészítsük ki a  $p_i$  pontok halmazát, ha  $w > r$ , akkor hagyjunk el néhány  $p_i$  pontot, esetleg  $C_i$  halmazt is, ha  $u > r$  - olymódon, hogy az új indexhatárokra  $\max\{u', w'\} = r$  legyen. Tekintsük azt az  $r$  osztályu teljes  $T$  hipergráfot, melynek osztályai a  $C_1, C_2, \dots, C_u$  halmazok és a  $p_{u'+1}, \dots, p_w$  pontok. / $u' < u$  esetén a pontok nem szerepelnek/. Ezen  $T$  hipergráf élei nem lehetnek az  $1, 2, \dots, u'$  -edik párhuzamos osztályba tartozó fedőhalmazzal lefedve, mert  $T$  egy éle tartalmaz pontot  $C_i$ -ből  $1 \leq i \leq u'$  -re és  $C_i$ -n kívülről is. Nem lehet  $T$  egy éle olyan párhuzamos osztályból sem fedve, amelyben az a  $C_i$  van, melyet  $p_i$  reprezentál  $u'+1 \leq i \leq w'$  -re, mert  $C_i$ -ből tartalmaz pontot / $p_i$ -t magát/, de tartalmaz  $C_i$ -n kívüli pontot is, hiszen feltevéssünk szerint  $C_i$  legfeljebb egy élt metsz  $C_1, \dots, C_u$  élek közül és  $u' \geq 2$  mivel  $u' \geq r-j > \frac{r-1}{2}$  / $j < \frac{r+1}{2}$  / és  $r \geq 3$ . Ilyen módon  $T$  éleit legalább  $v$  párhuzamos osztály nem fedi, ha  $w < r$  és legalább  $r$  párhuzamos osztály nem fedi, ha  $w \geq r$ . Miután azonban  $v = r+j - |Y|$  és  $j - |Y| \geq 0$ , ezért  $v \geq r$ , így elmondhatjuk, hogy  $T$  éleit legalább  $r$  számú párhuzamos osztály fedőhalmazai nem fedik, azaz legfeljebb  $r+j-r=j$  számú párhuzamos osztály fedőhalmazai

fedhetik. Alkalmazzuk a 3. Fejezet 8. Tételét, mely szerint  $r+1-j$  számú osztályát lefedti  $T$ -nek a  $T$  éleit fedő  $j$  számú párhuzamos osztály valamelyik  $F$  fedőhalmaza. Ha  $|Y| \leq j$ , akkor felhasználva, hogy  $r+1-j > j / \frac{r+1}{2} > j$  ekvivalens  $s < \frac{3r+1}{2}$  -vel/  $F$  tartalmaz egy  $C_i$  élt valamely  $1 \leq i \leq u$ -ra, ami ellentmondás, hiszen ez a  $C_i$  maximális volt, azaz önmagán kívül más él nem fedheti. Így  $|Y| = k > j$ , tehát legalább  $j+1$  független él van  $L/H/-$ ban.  $\square$

Folytatva a 6. Tétel bizonyítását, válasszunk ki  $j+1$  független élt  $L/H/-$ ből. Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy  $H$ -ban van olyan pont, melynek foka  $r$ -nél kisebb, legyen ez  $x_1$ . Jelöljük  $I_1$ -el azon  $i$  indexek halmazát, melyre  $x_1 \in C_i$ ,  $I_2$ -vel azon  $i$  indexek halmazát, melyre  $x_1 \notin C_i$ .  $|I_1| < r$  feltevésünk szerint. Két esetet különböztetünk meg:

A. ha  $|I_1| \leq j+1$ , akkor  $j+1-|I_1|$  független él van  $L/H/-$ ban melyek végpontjainak megfelelő élek  $H$ -ban az  $x_1$ -et tartalmazó élektől különbözők. Ezen élekből kiválasztható  $j+1-|I_1|$  számú pont, melyek az  $x_1$ -et nem tartalmazó élekből  $2/(j+1-|I_1|)$  számot lefognak, ezen pontok halmaza legyen  $X_1$ . Az  $X_1$  halmaz és az  $x_1$  pont által le nem fogott  $H$ -beli él számát legfeljebb  $s-2/(j+1-|I_1|) - |I_1|$ , ezért

$\max \{ |I_1|, s-2/(j+1-|I_1|) - |I_1| \} / i /$   
 számú pont kiválasztható  $H$ -ból, melyek az  $I_1$ -beli indexű él egyikében sincsenek benne, továbbá az  $x_1$  és  $X_1$  által le nem fogott él mindegyikét metszik. Ezt az  $X_2$  halmazt úgy konstruáljuk, hogy az  $x_1$  és  $X_1$  által le



nem fogott élekből kivonjuk az  $I_1$ -beli indexű éleket és a különbségalmazokból választunk pontokat. /A különbség nem üres, mivel  $H$ -ban nincsenek tartalmazkodó élek/. Ha  $/i/$ -ben a két szám, melynek maximumát vesszük, nem egyenlő, akkor bizonyos  $x_1$  ill.  $X_1$  által le nem fogott élekből nem kell kivonni  $I_1$ -beli indexű élt /ha a második mennyiség a nagyobb/ vagy bizonyos  $I_1$ -beli indexű élekhez külső pontot kell választani, nem törődve azzal, hogy ez milyen  $x_1$  és  $X_1$  által le nem fogott halmazban van benne /ha az első mennyiség nagyobb  $/i/$ -ben/. Az  $\{x_1\} \cup X_1 \cup X_2 = X$  halmaz  $H$  összes élet lefogja és "elkerüli" azaz minden  $H$ -beli  $e$  élhez van olyan  $x \in X$ , hogy  $x \notin e$ . Ha belátjuk, hogy  $|X| \leq r$ , akkor ez ellentmondás, hiszen ekkor  $X$ -et tetszőlegesen  $r$  elemű halmazzá egészítve ez az éle  $K_n^r$ -nek nem lehet lefedve egyetlen fedőhalmazzal sem. Valóban:

$|X| \leq 1+j+1-|I_1| + s-2/j+1-|I_1| / - |I_1| = s-j = r$ , amennyiben  $/i/$ -ben a 2. tag adja a maximumot, és

$|X| \leq 1+j+1-|I_1| + |I_1| = j+2 \leq r$ , ha  $/i/$ -ben az 1. tag adja a maximumot.  $j+2 \leq r$   $r \geq 3$  -ből és  $j < \frac{r+1}{2}$  -ből következik.

B.  $|I_1| > j+1$  esetén az A. esethez hasonlóan járunk el, csak ekkor a független élekre / és az  $X_1$  halmazra/ nincs szükség.  $X_2$  halmazt  $V/H$ -ban ekkor úgy konstruáljuk, hogy az  $I_1$  -beli indexű halmazokat és az  $I_2$  -beli indexűeket párosítjuk /amíg lehet/ úgy, hogy mindig egy  $I_1$ -beli indexű élből vonunk ki egy  $I_2$ -beli indexű élt, és a különbségből választunk pontot. Ekkor az  $X_2$  halmaz

$$\max /|I_1|, |I_2|/ \quad /ii/$$

számosságu lesz, ezért az  $X = \{x_1\} \cup X_2$  számosságára

$|X| \leq 1 + |I_1| \leq r$ , ha /ii/-ben az első tag a nagyobb, mivel  $|I_1| < r$  feltevés volt és

$|X| \leq 1 + |I_2| = 1 + s - |I_1| < 1 + s - j + 1 = s - j = r$ , ha a második tag adja a maximumot /ii/-ben. /Itt  $|I_1| > j + 1$  -et használtuk fel./

Mind az A. , mind a B. esetben ellentmondásra jutottunk, ezért  $|I_1| < r$  feltevésünk helytelen volt, ezzel a 6.Tételt igazoltuk.  $\square\square\square$

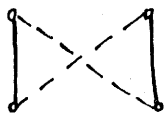
### 3. Teljes $r$ osztályu hipergráfok particiófedései.

1. Ebben a részben néhány,  $r$  osztályu hipergráfokra vonatkozó eredményt vizsgálunk, melyek önmagukban is érdekesek, de felhasználásra kerülnek más tételek bizonyítására is.

8.Tétel: Legyen  $H$  egy  $r$  osztályu teljes hipergráf és  $H$ -n egy  $s$ -rétű particiófedés. Tegyük fel, hogy  $1 \leq s \leq r+1$  és  $r \geq 3$ . Ekkor van olyan fedőhalmaz, mely  $H$ -nak legalább  $r+1-s$  osztályát lefedi.

Megjegyzés: A tétel a következő alakban is megfogalmazható: ha egy  $H$   $r$  osztályu  $/r \geq 3/$  teljes hipergráf éleit  $s$  színnel színezzük, akkor valamelyik színben van egy összefüggő, legalább  $r+1-s$  osztályt tartalmazó részgráf.

Következmény: Ha egy  $r$  osztályu teljes hipergráf éleit úgy fedjük particiókkal, hogy minden fedőhalmaz valódi módon kettévágja a hipergráf minden osztályát, akkor legalább  $r+1$  particióra van szükség  $r \geq 3$  esetén.  $r=2$  re két partició is elég, mint ezt az alábbi ábra mutatja:



Megjegyzés: A 8.Tétel éles, abban az értelemben, hogy minden  $1 \leq s \leq r+1$ ,  $r \geq 3$  esetén van olyan  $H$   $r$  osztályu teljes hipergráf és  $H$ -n olyan  $s$ -rétű particiófedés, melyben minden fedőhalmaz  $H$ -nak legfeljebb  $r+1-s$  osztályát tartalmazza. Ilyen  $H$ -t a következőképpen konstruálhatunk:

$H$  pontjait egy  $r$  sorból és  $s$  oszlopból álló mátrixban ábrázoljuk, a sorok felelnek meg  $H$  osztályainak. Az  $i$ . partició az  $i$ . oszlop felső  $s-1$  eleméből és ennek komplementer halmazából áll.

8.Tétel bizonyítása: Legyenek  $C_1, C_2, \dots, C_s$  olyan fedőhalmazok a particiófedés  $1., 2., \dots, s$ . particiójából, melyek mindegyike  $H$  legalább egy élet lefedi./Ha ilyen  $C_i$ -ket nem tudunk választani, akkor indukcióval  $s-1$  partició is lefed/. Tegyük fel, hogy ezen fedőhalmazok egyike sem teljesíti a tétel követelményét, azaz  $H$ -nak legfeljebb  $r-s$  osztályát tartalmazzák. Ebben az esetben minden  $C_i$  halmaz legalább  $s$  osztályt metsz  $H$ -ban valódi módon. Feltehető, hogy  $s \geq 2$ , hiszen  $s=1$  esetén állításunk evidens. Válasszunk ki két különböző osztályt  $H$ -ból, melyek egyikét  $C_1$ , másikat  $C_2$  metszi valódi módon. Válasszunk ki egy ezen osztályoktól különböző harmadik osztályt  $H$ -ból és ebből egy  $a$  pontot./ $r \geq 3$  /. Tegyük fel, hogy pl.  $a \in C_1$  és  $a \notin C_2$  - látni fogjuk, hogy egyéb illeszkedés esetén is hasonlóan megy a bizonyítás. A  $C_1$ -et valódi módon metsző osztályból vegyünk egy  $b$  pontot úgy, hogy  $b \notin C_1$ , a  $C_2$ -t valódi módon metsző osztályból pedig  $c$  pontot, úgy, hogy  $c \in C_2$ . Könnyű látni, hogy  $a, b, c$  pontok között van kettő, melyek  $C_1$ -re és  $C_2$ -re ellenkezően illeszkednek, hiszen  $b \in C_2$  esetén  $a$  és  $b$ ,  $c \notin C_1$  esetén  $a$  és  $c$ ,  $b \notin C_2$  és  $c \in C_1$  esetén  $b$  és  $c$  megfelel. Ezt a két pontot  $x_1$ -el és  $x_2$ -vel jelöljük. Megjegyezzük, hogy  $x_1$  és  $x_2$  különböző osztályból való. Ha  $x_1, x_2, \dots, x_j$  már ki van választva és  $j < s$ , akkor  $x_{j+1}$  -et válasszunk ki úgy, hogy

$x_{j+1}$  H egy újabb osztályában legyen az előző  $x_i$ -k osztályaihoz képest, továbbá  $C_{j+1}$ -ben való tartalmazkodásra  $x_1$ -hez képest. ellenkezően viselkedjen. Ez elérhető, mert feltevésünk szerint  $C_{j+1}$  legalább s osztályt metsz valódi módon, és  $x_1, x_2, \dots, x_j$   $j < s$  miatt nem "ronthatja el" ezek mindegyikét. A fenti eljárással kiválasztott  $x_1, \dots, x_s$  pontokat szükség esetén egészítsük ki további pontokkal úgy, hogy H egy E élét kapjuk. Ez az él nem lehet lefedve egyik partícióval sem, hiszen, ha a j. partíció lefed, akkor  $x_1, x_j \in E$  miatt  $x_1, x_j \in C_j$ , konstrukciónk azonban ennek ellentmond. Ezzel beláttuk, hogy  $C_1, C_2, \dots, C_s$  valamelyike legalább  $r+1$ -s osztályt tartalmaz H-ból.  $\square$

9.Tétel: Legyen H r-osztályu teljes hipergráfon P r-rétü partíciófedés. Ekkor  $\beta(H/P) \leq r$ .

9A.Tétel: Ha H teljes r osztályu hipergráf éleit r színnel színezzük, akkor H pontjai lefedhetők legfeljebb r számú egyszínű összefüggő részhipergráf pontjaival.

9.Tétel bizonyítása: r szerinti indukcióval bizonyítunk. Legyen  $r=2$  és tekintsük az első partíciót. Ha ebben valamely F fedőhalmaz belemetsz a páros gráf mindkét osztályába, X-be és Y-ba, akkor a kívánt fedést adja

- F ha  $X \cap F = X$  és  $Y \cap F = Y$
- F és  $(X - (X \cap F)) \cup Y$  -t tartalmazó fedőhalmaz a második partícióból, ha  $X \cap F \neq X$  és  $Y \cap F = Y$ .
- F és  $(Y - (Y \cap F)) \cup X$  -et tartalmazó fedőhalmaz a második partícióból, ha  $X \cap F = X$  és  $Y \cap F \neq Y$ .
- $(X - (X \cap F)) \cup (Y \cap F)$  -et és  $(Y - (Y \cap F)) \cup (X \cap F)$  -et

tartalmazó fedőhalmazok a második particióból, ha  $X \cap F \neq X$  és  $Y \cap F \neq Y$ .

Ha az első particióban nincs olyan fedőhalmaz, mely a páros gráf mindkét osztályába belemetsz, akkor a második partició triviális, azaz egyetlen fedőhalmaza lefed, ezzel az  $r=2$  esetet elintéztük.

Legyen most  $r \geq 3$  és tekintsük  $H$   $r$  osztályu teljes hipergráf  $r$ -rétű particiófedését. A 8.Tétel alapján van olyan  $F$  fedőhalmaz, mely  $H$  egy osztályát tartalmazza.  $H'$   $r-1$  osztályu teljes hipergráf pontjait definiáljuk úgy, hogy  $H$ -ból hagyjuk el az  $F$  által lefedett osztályt, más osztályokból pedig válasszunk  $F$  által le nem fedett pontokat, ha ilyen nincs, akkor tetszőleges pontot. Ha  $F$   $H'$  minden élét lefedi, akkor nincs mit bizonyítani.  $H$  particiófedése  $H'$ -n  $r-1$  rétű particiófedést indukál, mert  $H$   $F$ -et tartalmazó particiójában csak  $F$  fed élt. Az indukciós feltevés alapján  $H'$  pontjai legfeljebb  $r-1$  fedőhalmazzal lefedhetők, ezek kibővítései és  $F$  adják  $H$  kívánt fedését.  $\square\square\square$

Megjegyzés: A 9.Tétel pontos, abban az értelemben, hogy minden  $H$   $r$  osztályu teljes hipergráfnak, melyben van egy legalább  $r$  pontu osztály, van olyan  $r$ -rétű particiófedése, melynél a fedési szám pontosan  $r$ . Ezt úgy definiálhatjuk, hogy a legalább  $r$  pontu osztályt  $r$  nem üres diszjunkt részre bontjuk, és az  $i$ . partició az  $i$ . rész pontjaiból és a többi osztályokból és ennek komplementeréből áll.

## 2. Teljes páros gráfok particiófedései.

A következő tétel teljes páros gráfokra  $r=2$ / vonatkozik és Lehel Jenővel bizonyítottuk az 5.Tételhez segédtevéként, de önmagában is érdekes:

10.Tétel: Ha egy  $n$  pontu teljes páros gráfon adott egy  $t$  rétű particiófedés, akkor a fedéshipergráf rangja legalább  $\left[\frac{n}{t}\right]^*$ .

10A.Tétel: Ha  $G$   $n$  pontu teljes páros gráf éleit  $t$  színnel színezzük, akkor van  $G$ -nek egy egyszínű, összefüggő, legalább  $\left[\frac{n}{t}\right]^*$  pontu részgráfja.

Megjegyzés: a tétel "nagyjából" pontos. Ha  $G$  egy teljes páros gráf, akkor mindkét kromatikus osztályát osszuk fel egyenletesen  $t$  részre és ezen részek közötti éleket színezzük ki a  $t$ -t teljes páros gráf egy  $1$ -faktorokra bontása szerint - egy  $1$ -faktornak egy szín feleljen meg. Ebben a színezésben minden színben "nagyjából"  $\left[\frac{n}{t}\right]^*$  az összefüggő komponensek pontszámának maximuma. Ha  $G$  valamelyik osztályának pontszáma osztható  $t$ -vel, akkor pl. pontosan  $\left[\frac{n}{t}\right]^*$  ez a maximum.

Megemlítjük ezzel kapcsolatban a következő sejtést:  
/Lehel Jenővel sejtjük/

Sejtés: Ha  $G$  teljes páros gráf éleit  $t$  színnel színezzük, akkor  $G$  csucsai lefedhetők  $2/t-1$ / egyszínű összefüggő részgráf csucsáival.

1.Megjegyzés: a  $t=2$  eset a 9.Tétel speciális esete.

2.Megjegyzés:  $t=3$ -ra könnyű igazolni a sejtést: elég valamely színben egy komponenst tekinteni, ha ez  $A$  és  $B$  halmazokból tevődik össze, akkor  $A$  és  $Y-B$  ill.  $B$  és  $X-A$  közöt-

ti teljes páros gráfok két színnel vannak színezve, így ezek 2-2 egyszínű összefüggő részgráffal lefedhetők a  $t=2$  eset alapján. /X és Y a páros gráf két osztályát jelöli./

3.Megjegyzés:  $2/t-1/$  helyett  $2t-1$  -et írva a sejtés igaz, ez triviális: legyen pq egy piros él. A p-re és q-ra illeszkedő piros élek és a p-ből ill. q-ból induló nem piros csillagok által meghatározott részgráfok adják a kívánt fedést. Ugy tűnik, hogy ez a sejtés is hasonlít Ryser már említett sejtéséhez / mely szerint teljes gráf éleit  $t$  színnel színezve  $t-1$  összefüggő egyszínű részgráf csúcsaival lefedhetők a teljes gráf csúcsai/ abból a szempontból, hogy  $t-1$  helyett  $t-t$  írva triviális állítást kapunk.

4.Megjegyzés:  $2/t-1/$  nél kisebb számra a sejtés nem igaz, ezt a következő példa mutatja: Tekintsük azt a páros gráfot, melynek felső osztályában  $t-1$  pont, az alsóban  $t!$  pont van. A  $t!$  pontot fogjuk fel úgy, mint  $t$  elem  $t-1$  osztályu ismétlés nélküli variációját. A fenti i. pont és a lenti  $a_1 a_2 \dots a_{t-1}$  permutáció közötti él színe  $a_i$ . Ezt a gráfot  $t=3$ -ra az alábbi ábra mutatja:



11.Tétel: A fent definiált páros gráf csúcsait  $2/t-1/$  -nél kevesebb összefüggő egyszínű részgráf csúcsaival nem lehet lefedni.

Bizonyítás: Feltehetjük, hogy a fedés a felső pontokra



illeszkedő csillagokból áll. Rendezzük úgy el a fenti pontokat, hogy az  $i$ . pontra  $x_i$  számú egyszínű csillag illeszkedjen a fedésből és  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{t-1}$  teljesüljön. Belátjuk azt, hogy valamely  $i$ -re  $x_i \geq i+1$ . Ha ugyanis  $x_i \leq i$  minden  $1 \leq i \leq t-1$  esetén, akkor válasszunk egy olyan szint, mely a  $t-1$ -edik pontra illeszkedő fedőcsillagok színétől különböző, ezután olyat, mely a  $t-2$ . pontra illeszkedő fedőcsillagok színétől és a már választott szintől különböző, és így tovább.  $x_i \leq i$  feltételünk biztosítja, hogy ez az eljárás folytatható. Így  $t-1$  szint választottunk ki, és az az alsó pont, mely az  $i$ . felső ponttal éppen az ahhoz választott színnel van összekötve, nem lehet lefedve - ez ellentmondás.

Van tehát egy olyan  $i$ , hogy  $x_i \geq i+1$ . Ekkor

$$\sum_{j=1}^{t-1} x_j = \sum_{j=1}^{i-1} x_j + \sum_{j=i}^{t-1} x_j \geq (i-1) + (i+1) + (t-i) = 2t-1$$

Belátjuk, hogy a jobboldal  $2/t-1$ -nél nem kisebb, azaz

$$(i-1) + (i+1) + (t-i) \geq 2(t-1) \quad \text{ami } i=1 \text{ esetén}$$

egyenlőség, különben átrendezve és  $i-1$  el leosztva  $t \geq i+1$  egyenlőtlenségbe megy át, ami igaz, hiszen  $t-1$  pont van felül. Azt kaptuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{t-1} x_j \geq 2(t-1) \quad \text{és ezt akartuk belátni.}$$

**5. Megjegyzés:** A sejtést elég olyan színezésekre bebizonyítani, amelyben minden színben minden összefüggő egyszínű részgráf teljes páros gráf. Ha ugyanis  $H$  egy olyan egyszínű pl. piros összefüggő részgráf, amely nem teljes, akkor legyen ennek  $a, b$  egy hiányzó, azaz másszínű, pl. kék éle. Ekkor felbontásunk a következő lehet:  $H$ -hoz vegyük hozzá az  $a$  és  $b$  pontból induló összes piros élt - ez lesz

az első részgráf. ab élhez vegyük hozzá az a-ból és b-ből induló összes kék élt - ez lesz a második részgráf. A felbontás többi részgráfját az a-ból és b-ből induló egyszínű, pirostól és kéktől különböző csillagok alkotják. Ezek száma legfeljebb  $2/t-2/$  és ehhez jön még a már definiált két részgráf. Így legfeljebb  $2/t-1/$  számú egyszínű összefüggő részgráf csúcsaival lefedtük a teljes páros gráf összes csúcsát.

10.Tétel bizonyítása: A tételt a 10A. alakjában bizonyítjuk. A bizonyítás lényege annak kimutatása, hogy a keresett  $\left[\frac{n}{t}\right]^*$  pontu összefüggő egyszínű részgráfot abban a színben megtaláljuk, amely színben a legtöbb éle van G-nek.

Tekintsük a következő szélsőérték feladatot: adott  $m, n, M$  természetes számokhoz keresendők olyan  $r, x_1, \dots, x_r$  és  $y_1, \dots, y_r$  nem negatív egészek / $r$ -ről feltesszük, hogy pozitív/, hogy

/i/  $\sum_{i=1}^r x_i = m, \sum_{i=1}^r y_i = n, x_i + y_i \leq M$  minden  $1 \leq i \leq r$ -re, és az  $f = \sum_{i=1}^r x_i y_i$  a lehető legnagyobb. Az /i/-nek eleget tevő  $x_i$  és  $y_i$  sorozatokat egyszerűen megoldásnak fogjuk nevezni. Egy megoldásban  $x_i, y_i$  párt telítettnek nevezük, ha  $x_i + y_i = M$ , míg  $x_i + y_i < M$  esetén telítetlennek. Bebizonyítjuk a következő lemmát:

Lemma: Az /i/ feladatnak van olyan  $a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_k$  optimális megoldása, melyre

A. Egyetlen telítetlen pár van /ez lehet a 0,0 pár/.

B. Ha  $a_k, b_k$  jelöli a telítetlen párt, akkor  $a_i \geq a_k$  és  $b_i \geq b_k$  minden  $1 \leq i < k$  -ra.

Bizonyítás: legyen  $a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_k$  a feladatnak olyan

optimális megoldása, melyben a lehető legtöbb pár telített és ezeken belül a lehető legkevesebb párból áll. Belátjuk, hogy ezzel a választással a lemma állításai teljesülnek.

Ha lenne két telítetlen pár,  $a_1, b_1$  és  $a_2, b_2$ , akkor legyen pl.  $a_1 \leq a_2$ . Ha  $b_1 \leq b_2$ , akkor  $a_1$ -et és  $b_1$ -et csökkentve, míg  $a_2$ -t és  $b_2$ -t megfelelően növelve továbbra is optimális megoldást kapunk, de e növelések során vagy az  $a_2, b_2$  pár telítetté válik, vagy az  $a_1, b_1$  párból lesz a 0,0 pár, és ekkor ezt elhagyjuk. Mindkét esetben ellentmondásba kerülünk a választott megoldás definíciójával. Ha  $a_1 \leq a_2$  de  $b_1 > b_2$ , akkor  $b_1$ -et csökkentjük és  $b_2$ -t növeljük ugyanannyival, ekkor a célfüggvény nem csökken, tehát továbbra is optimális megoldást kapunk. E művelet során  $b_1' = b_1 - b$ ,  $b_2' = b_2 + b$ , ezért vagy az  $a_2, b_2'$  telített lesz, vagy  $b_1' \leq b_2'$  bekövetkezik. Az első eset ellentmondás, a második esetben viszont az  $a_1, b_1'$  és  $a_2, b_2'$  párra  $a_1 \leq a_2$  és  $b_1' \leq b_2'$  - azaz a már tárgyalt esetre jutunk, mely ellentmondáshoz vezetett. Ezzel A.-t igazoltuk, hiszen ha egyáltalán nincs telített pár, azt úgy fogjuk fel, hogy a 0,0 párt telítetlen párként hozzávesszük a megoldáshoz.

B. bizonyításához tegyük fel, hogy a telítetlen  $a, b$  párra és a telített  $a', b'$  párra pl.  $a' < a$ . Defináljuk e párok helyett az  $a'+1, b'-1$  és  $a-1, b+1$  párokat. Azt állítjuk, hogy e cserével a célfüggvény értéke nő./Az, hogy továbbra is megoldást kapunk, nyilvánvaló./ Ehhez azt kell belátni, hogy

$$/a'+1//b'-1//+a-1//b+1// > a'b'+ab \text{ azaz } a-a'+b'-b > 0.$$

$a+b < a'+b'$ , mivel  $a, b$  telítetlen és  $a', b'$  telített, azaz

$a-a' < b'-b$ . Másrészt  $a-a' \geq 1$  feltevésünk szerint, ezért  $b'-b$  legalább 2, ami bizonyítja a kívánt egyenlőtlenséget. Ellentmondásra jutottunk azzal, hogy megoldásunk optimális volt.  $\square$

Polytatva a tétel bizonyítását, tegyük fel, hogy  $G$  gráfunknak piros színben van a legtöbb éle.  $G$  piros színű élei komponenseket határoznak meg, legyenek  $x_1, \dots, x_r$  és  $y_1, \dots, y_r$  a komponensek pontszámai  $G$  alsó ill. felső osztályában. Jelöljük továbbá  $m$ -el és  $n$ -el  $G$  alsó és felső osztályának pontszámát. Nyilván  $\sum_{i=1}^r x_i = m$ ,  $\sum_{i=1}^r y_i = n$ . Tegyük fel, hogy állításunk nem teljesül, ami azt jelenti, hogy

$$x_i + y_i \leq \left\lceil \frac{m+n}{t} \right\rceil - 1 = M \text{ minden } i\text{-re. Az itt definiált}$$

$M$ -el  $/m$  és  $n$ -el/ az  $x_1, \dots, x_r$ ;  $y_1, \dots, y_r$  megoldásai a lemmában szereplő feladatnak, ezért a lemma által biztosított optimális megoldásra a célfüggvény nem kisebb, azaz

$$\sum_{i=1}^r x_i y_i \leq \sum_{i=1}^k a_i b_i \quad /ii/.$$

/iii/ jobboldala a következőképpen írható:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k a_i b_i &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{k-1} (a_i + b_i)^2 - \sum_{i=1}^{k-1} a_i^2 - \sum_{i=1}^{k-1} b_i^2 \right) + a_k b_k = \\ &= M/m - a_k/ - \sum_{i=1}^{k-1} a_i^2 + a_k b_k. \quad \sum_{i=1}^{k-1} a_i^2 \text{-et alulról becsülhetjük, felhasználva, hogy négyzetösszeg adott összeg mellett akkor a legkisebb, ha egyenletes a felbontás. Ezért} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^k a_i b_i \leq M/m - a_k/ - \frac{(m-a_k)^2}{k-1} + a_k b_k \quad /iii/$$

Felhasználva, hogy  $G$ -nek legalább  $\left\lceil \frac{mn}{t} \right\rceil$  piros éle van, /ii/ és /iii/-ből kapjuk:

$$\left\lceil \frac{mn}{t} \right\rceil \leq \sum_{i=1}^r x_i y_i \leq \sum_{i=1}^k a_i b_i \leq M/m - a_k/ - \frac{(m-a_k)^2}{k-1} + a_k b_k$$

Felhasználva, hogy  $k-1 = \frac{m+n-a_k-b_k}{M}$ ,  $M/m-a_k/-t$  kiemelve

$$\left[ \frac{mn}{t} \right]^* \leq \frac{M/m-a_k // n-b_k /}{m+n-a_k-b_k} + a_k b_k$$

Belátjuk, hogy ennek pontosan az ellenkezője igaz:

$$\left[ \frac{mn}{t} \right]^* > \frac{M/m-a_k // n-b_k /}{m+n-a_k-b_k} + a_k b_k \text{ ami ellentmondás.}$$

Felhasználva a  $p \leq [p]^* < p+1$  egyenlőtlenséget, a felső egész részt elhagyhatjuk,  $M = \left[ \frac{m+n}{t} \right]^* - 1$  helyett pedig  $\frac{m+n}{t}$ -t írhatunk, azaz elég belátni az

$$\frac{mn}{t} \geq \frac{m+n}{t} \cdot \frac{m-a_k // n-b_k /}{m+n-a_k-b_k} + a_k b_k \text{ egyenlőtlenséget.}$$

Megfelelő átrendezés után ez így írható:

$a_k n^2 + b_k m^2 - a_k b_k / t + 1 // m + n / + t a_k b_k / a_k + b_k / \geq 0$ . Ha  $a_k$  vagy  $b_k$  0, akkor ez nyilván igaz, egyébként  $a_k b_k$ -val leosztva és átrendezve

$\frac{m^2}{a_k} - /t+1/m + \frac{n^2}{b_k} - /t+1/n + t/a_k + b_k / \geq 0$  adódik. Belátjuk, hogy

$$m \geq a_k / t + 1 / \text{ és } n \geq b_k / t + 1 / \quad /iv/$$

és ebből már az egy sorral feljebb lévő egyenlőtlenség következik. Mivel

$$M = \left[ \frac{m+n}{t} \right]^* - 1 \text{ és } M = \left[ \frac{m+n}{k-1} \right] \text{ ezért } k-1 \geq t,$$

azaz  $k \geq t+1$ . A lemma B. állítása szerint  $a_k$  és  $b_k$ -nál a többi  $a_i$ -k ill.  $b_i$ -k nem nagyobbak, ezért

$$m = \sum_{i=1}^k a_i \geq k \cdot a_k \geq /t+1/a_k \text{ és } n = \sum_{i=1}^k b_i \geq k \cdot b_k \geq /t+1/b_k.$$

Ezzel /iv/-et igazoltuk, és egyben a 10. Tételt is.  $\square$

#### 4. $\underline{Y}_k$ és $\mathcal{T}$ kapcsolatáról hipergráfok összegében.

##### 1. $\underline{Y}_k$ és $\mathcal{T}$ kapcsolata hipergráfok $t$ -szerezésében.

Legyen  $H$  egy egyszerű hipergráf, ennek  $t$ -szerezését,  $H^t$  hipergráfot a következő módon definiáljuk / $t$  természetes szám/:  $H^t$  csucsai  $H$  csucsai, élei pedig  $H$   $t$  számu, különböző élének egyesítésekként írhatók, azaz

$$V/H^t = V/H \quad E/H^t = \left\{ \bigcup_{k=1}^t E_k : E_k \in E/H, E_i \neq E_j \text{ ha } i \neq j \right\}$$

A következő tétel C.Berge sejtése volt/[4]278. oldal/:

12.Tétel: [9] Ha  $H$  Helly tulajdonságu és  $\underline{Y}_t/H^t \leq t$ , azaz  $H^t$  bármely  $t+1$  élének van közös pontja, akkor  $\mathcal{T}/H^t \leq t$ .

A 12.Tétel éles a következő értelemben:

13.Tétel: [9] Minden  $t \geq 2, u \geq 1$  -hez létezik  $H$  Helly tulajdonságu hipergráf, melyre  $\underline{Y}_{t-1}/H^t \leq t-1$ , azaz  $H^t$  bármely  $t$  élének van közös pontja és  $\mathcal{T}/H^t \geq u$ .

Természetes kérdés az, hogy ne csak  $H^t$  -re, hanem  $H^t$  részhipergráfjaira is bizonyítsunk a 12.Tételben szereplő tulajdonságot. Ehhez azonban nem elég az, hogy  $H$  Helly tulajdonságu, amint ezt a következő tétel mutatja:

14.Tétel: 9 Minden  $t \geq 2, u, k \geq 1$  esetén van olyan  $H$  Helly tulajdonságu hipergráf és  $H^t$ -nek olyan  $H'$  részhipergráfja, hogy  $\underline{Y}_{k-1}/H' \leq k-1$ , azaz bármely  $k$  élnek van közös pontja és  $\mathcal{T}/H' \geq u$ .

Kérdés azonban, hogy  $H$  normalitása nem biztosítja e a 12. Tétel analogonját  $H^t$  minden részhipergráfjára:

Kérdés: Ha  $H$  normális hipergráf és  $H'$   $H^t$  olyan részhipergráfja, melyre bármely  $t+1$  él metszi egymást, azaz

$\mathcal{V}_t/H'/\leq t$ , igaz-e, hogy  $\mathcal{T}/H'/\leq t$ ?

Könnyű belátni, hogy a válasz igenlő, ha  $H$  intervallumrendszer a számegegyenesen, vagy pl. ha  $H$  páros gráf. Ha  $H$  egy fa részfarendszer, akkor a válasz csak  $t \leq 3$  esetben ismert [7].

Ha  $H^t$  részhipergráfjairól csak azt tesszük fel, hogy bármely  $t$  élnek van közös pontja, azaz  $\mathcal{V}_{t-1} \leq t-1$ , akkor  $H$  normalitása mellett is csak negatív eredményt tudunk állítani:

15.Tétel: Minden  $t \geq 2$ ,  $u \geq 1$ -hez van olyan  $H$  normális hipergráf és  $H'$  részhipergráfja  $H^t$ -nek, melyre  $H'$  bármely  $t$  élének van közös pontja, azaz  $\mathcal{V}_{t-1}/H'/\leq t-1$  és  $\mathcal{T}/H'/\geq u$ .

A  $t=2$  speciális esetben a 15.Tétel még erősebb formában is igaz:

16.Tétel: Minden  $u \geq 1$ -hez van olyan  $H$  páratlan kört nem tartalmazó hipergráf és  $H'$  részhipergráfja  $H^2$ -nek, hogy  $\mathcal{V}/H'/=1$  és  $\mathcal{T}/H'/\geq u$ .

12.Tétel bizonyítása: Jelölje  $G$   $L/H/$  komplementerét. Tekintsük az

$$A = \{ x : x \in V/G/, d/x/ \geq t \} \quad \text{halmazt, ahol } d/x/$$

$x$  pont fokát jelöli. Belátjuk, hogy  $|A| < t$ . Tegyük fel ugyanis, hogy  $|A| \geq t$  -ekkor választhatunk  $x_1, x_2, \dots, x_t$  különböző csucsokat  $G$ -ből, úgy, hogy  $d/x_i/ \geq t$  minden  $i$ -re  $1 \leq i \leq t$ . Az  $Y_1, \dots, Y_t$  csucshalmazokat definiáljuk úgy, hogy  $|Y_i| = t$  és  $Y_i$  minden pontja legyen  $x_i$ -vel szomszédos.

Legyen  $Y_0 = \{x_1, \dots, x_t\}$ . Tekintsük  $H^t$  azon  $E_i$  éleit, melyek  $Y_i$  pontjainak megfelelő  $H$ -beli élek egyesítésekként írhatók  $i=0, 1, \dots, t$ -re. Így  $t+1$  élt definiáltunk  $H^t$ -ben, és könnyű látni, hogy ezeknek nincs közös pontja - ez ellentmondás. Beláttuk tehát, hogy  $|A| < t$ , ebből Tomescu egy tétele szerint/ [3], 430. oldal/ következik, hogy  $G$  kromatikus száma legfeljebb  $t$ , azaz  $L/H/$  csucsai lefedhetők legfeljebb  $t$  teljes gráffal.  $H$  Helly tulajdonságu, ezért a teljes gráfok pontjainak megfelelő éleknek van közös pontjuk, így  $\mathcal{T}/H/ \leq t$  - ebből  $\mathcal{T}/H^t/ \leq t$  adódik.□□□

13. Tétel bizonyítása: E tétel bizonyításánál és a többi negatív eredmény bizonyításánál felhasználjuk a következő lemmát:

A.Lemma: Minden  $G$  gráfhoz van olyan  $H$  Helly tulajdonságu hipergráf, melyre  $L/H/$  izomorf  $G$ -vel.

Bizonyítás: Könnyű ellenőrizni, hogy  $G$  maximális teljes gráfjaiból álló hipergráf duálisa megfelel  $H$ -nak.

Legyen  $G$  olyan gráf, melyben bármely kör  $t^2$ -nél hosszabb és kromatikus száma legalább  $u+t$ . Ilyen gráf létezése [11]-ből következik. Legyen  $H$  olyan Helly tulajdonságu hipergráf, hogy  $L/H/$  izomorf  $G$  komplementerével. Ilyen  $H$  létezését az A.Lemma biztosítja. Belátjuk, hogy  $\mathcal{T}/H^t/ \geq u$ . Ha  $\mathcal{T}/H^t/ < u$  lenne, akkor van egy legfeljebb  $u-1$  elemű lefogóhalmaza - ettől a lefogóhalmaztól csak  $t-1$   $H$ -beli él lehet idegen legfeljebb, ezért  $H$ -ban van egy  $u-1+t-1$  elemű lefogórendszer, azaz  $\mathcal{T}/H/ < u+t-1$ , ez azonban ellentmond annak, hogy  $L/H/$  teljes gráfokkal való



fedéséhez legalább  $u+t$  teljes gráfra van szükség.

Megmutatjuk, hogy  $H^t$  bármely  $t$  élének van közös pontja. Legyen  $E_1' = \bigcup_{j=1}^t E_{1j}$ ,  $E_2' = \bigcup_{j=1}^t E_{2j}$ , ...,  $E_t' = \bigcup_{j=1}^t E_{tj}$ .  $H^t$ -ben  $t$  számu él, ahol  $E_{ij}$  -k  $H$ -beli éleket jelölnek.  $y_{ij}$  jelölje az  $E_{ij}$  élnek megfelelő csucst  $L/H$ -ban. Az  $Y = \{y_{ij} : 1 \leq i, j \leq t\}$  csucsk által feszített részgráf komplementere nem tartalmaz kört, mivel  $|Y| \leq t^2$ . Ebből kifolyólag az  $Y$  halmaz pontjai elrendezhetők úgy, hogy bármely  $y \in Y$ -hoz legfeljebb egy olyan  $y' \in Y$  van melyre  $y < y'$  és  $y, y'$  él nincs benne  $L/H$ -ban. Válasszunk ki csucskat  $Y$ -ból a következő algoritmus szerint: kezdetben legyen  $Y' = \emptyset$ . Ha van olyan  $y_{ij} \in Y - Y'$ , hogy  $y_{ij}$  össze van kötve  $Y'$  minden pontjával és  $y_{km} \in Y'$ -ből  $i \neq k$  következik, akkor a legkisebb ilyen  $y_{ij}$  -t vegyük be  $Y'$ -be. /A legkisebb a fenti rendezésben értendő/. Ezen új  $Y'$ -vel folytassuk az eljárást, egészen addig, míg nem tudunk már további  $y_{ij}$  pontot választani.

Belátjuk, hogy  $Y'$  minden  $1 \leq i \leq t$  -re tartalmaz olyan csucst, melynek első indexe  $i$ . Ha ez nem lenne igaz, akkor valamely  $i$ -re az  $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{it}$  csucsk egyike sem lenne  $Y'$ -ben. Minden  $k$ -ra és  $y_{ik}$ -ra van olyan  $y^k \in Y'$  hogy  $y^k < y_{ik}$  és  $y, y_{ik}$  él nincs  $L/H$ -ban. /Ellenkező esetben  $y_{ik}$  bekerült volna  $Y'$ -be/. Mivel  $|Y'| < t$ , ezért van olyan  $k$  és  $k'$ , melyre  $y^k = y^{k'}$ , ami ellentmond  $Y$  rendezésének.

$Y'$  ezért minden  $E_i'$  élet reprezentál - azonban  $Y'$  teljes gráf, ezért  $H$  Helly tulajdonsága miatt  $\bigcap_{i=1}^t E_i' \neq \emptyset$ . Ezzel a bizonyítást befejeztük.  $\square\square\square$

14. Tétel bizonyítása:  $G$  gráfot a következő módon definiál-

juk: Legyen  $G_1$  gráf minden köre  $k$ -nál hosszabb és kromatikus száma  $2u$ -nál nagyobb.  $G$  csucsait mátrix-alakban képzeljük el, melynek  $t$  sora és  $V/G_1/$  oszlopa van.  $G$  éleit az első két sor definiálja:  $G_1$  komplementerét helyezzük el az első két sorba, még pedig úgy, hogy az egymás feletti pontok egymásnak feleljenek meg egy izomorfizmusnál. Az első sor és a második sor közötti összes élt még hozzávesszük a gráfhoz. Tekintsünk egy olyan  $H$  Hellyi típusu hipergráfot, melyre  $L/H/$  izomorf  $G$ -vel.  $H'$  részhipergráf álljon  $G$  oszlopainak megfelelő élek unióiból. Könnyű igazolni, hogy  $H'$  eleget tesz a tétel követelményeinek.□□□

15. Tétel bizonyítása: Tekintsünk egy  $ut+2/t-1/$  sorból és  $t$  oszlopból álló mátrixot, melyből a jobb felső és bal alsó sarokelemeket elhagyjuk. Ezen csonkitott mátrix elemei legyenek  $G$  gráf csucsai.  $G$  két csúcsa legyen éllel összekötve pontosan akkor, ha különböző oszlopban vannak, és a kisebb oszlopindexű csúcs "magasabban" van, azaz sorindexe kisebb. Az így definiált  $G$  gráf maximális teljes részgráfjaiból képezett hipergráf duális hipergráfja  $H$  legyen. Ekkor  $H$  Hellyi tulajdonságú hipergráf, és  $L/H/$  izomorf  $G$ -vel.  $H'$  hipergráf álljon  $G$   $t$ -edik,  $t+1$ -edik, ...,  $ut$ -edik sorának megfelelő élek egyesítéséből. Ekkor  $H'$   $H^t$  részhipergráfja lesz.

A.  $H$  normális hipergráf - ehhez azt kell igazolni, hogy  $G$  maximális teljes gráfjaiból, mint élekből álló hipergráfban a pontok bármely  $V$  részhalmazára  $g/V/ = \alpha/V/$ , azaz a  $V$  pontjait lefedő teljes gráfok minimális száma megegyezik a  $V$ -ben lévő maximális üres gráf pont-

számával./Ha  $V$ -t, mint  $G$  pontjainak részhalmazát tekintjük/. Ha a  $G$  gráf éleit úgy irányítjuk, hogy minden él "lefelé" mutasson, akkor  $G$  parciálisan rendezett halmaz lesz - így  $V$  által feszített részgráf is az. Dilworth ismert tételét alkalmazva  $\rho(V) = \alpha(V)$  adódik.

B.  $H'$ -ben bármely  $t$  élnek van közös pontja. Valóban,  $H'$   $t$  számú élének  $G$   $t$  elemű sorai felelnek meg. A legkisebb indexű sor első eleme, a következő sor második eleme, ..., a legnagyobb indexű sor  $t$ . eleme teljes gráfot definiál  $G$ -ben, ezért  $H$  Helly tulajdonsága miatt ezen pontoknak megfelelő  $H$ -beli éleknek van közös pontja.

C.  $\tau(H') \geq u$ , mivel  $H^t$ -nek legfeljebb  $t$  számú élét lehet egy ponttal lefogni, tekintve, hogy  $G$ -ben  $t$ -nél nagyobb teljes gráf nincs.  $\square$

16. Tétel bizonyítása: ehhez elég azt észrevenni, hogy  $t=2$  esetén az előző bizonyításban szereplő  $G$  gráf páros gráf, ezért maximális teljes részgráfjaiból álló hipergráf önmagga, ennek duális hipergráfja nem-tartalmaz páratlan kört, hiszen egy  $h$  hosszúságú körnek a duálisban is megfelel egy  $h$  hosszúságú kör.

## 2. $\vee_k$ és $\tau$ kapcsolata diszjunkt hipergráfok összegében.

Hipergráfok  $t$ -szerezésének mintájára bevezethetjük diszjunkt hipergráfok összegét is. Az összeg definíciója megfelel egyéb strukturákon szokásos összeg-definícióknak: ha  $H_1, H_2, \dots, H_t$  olyan hipergráfok, melyek csúcshalmazai páronként diszjunktak, akkor az összeg-hipergráf csúcsai a komponensek csúcsainak, élei pedig a komponensek

éleinek egyesítéseként írhatók, azaz

$$V / \sum_{i=1}^t H_i / = \bigcup_{i=1}^t V / H_i / \text{ és } E / \sum_{i=1}^t H_i / = \left\{ \bigcup_{i=1}^t E_i : E_i \in E / H_i / \right\}.$$

A 12. Tétel megfelelője itt már minden részhipergráfra igaz:

17. Tétel: Ha  $t$  diszjunkt Helly tulajdonságu hipergráf összegében  $H'$  olyan részhipergráf, melyben bármely  $t$  élnek van közös pontja, akkor  $\mathcal{T} / H' / \leq t$  és van olyan  $t$  elemű lefogóhalmaz, melynek minden komponensben van egy-egy pontja.

Ha az összegről csak annyit teszünk fel, hogy bármely két élnek van közös pontja, ebből még nem lehet  $\mathcal{T}$ -ra becslést adni /mely csak  $t$ -től függ/, még akkor sem ha  $H$ -ról feltételezzük, hogy normális.

18. Tétel: Minden  $u$  természetes számhoz van olyan  $H_1$  és  $H_2$  normális hipergráf, melyek diszjunktak és  $H$  összegükre  $V / H / = 1$  de  $\mathcal{T} / H / \geq u$ .

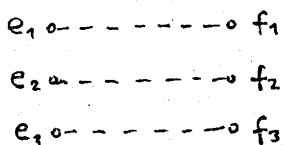
Érdekes, hogy normális hipergráf helyett kiegyensúlyozott /balanced/ hipergráfokat véve már pozitív eredményt tudunk állítani, sőt pozitív eredményt tudunk mondani azokra a hipergráfokra is, melyek Helly tulajdonságuak, továbbá minden három hosszúságu körükben van olyan él, mely a kör mindhárom pontját tartalmazza. Mint arra Frank András rámutatott, ezen hipergráfok pontosan azok, melyekben minden alhipergráf részhipergráfjai Helly tulajdonságuak. Ennek a megjegyzésnek alapján ezeket a hipergráfokat erősen Helly tulajdonságuaknak nevezhetjük. Erősen Helly tulajdonságu hipergráfok osztályába tartoznak a kiegyensúlyozott /balanced/ hipergráfok.

19.Tétel: Minden  $t$ -hez és  $k$ -hoz van olyan  $f/t, k/$  szám, hogy amennyiben  $t$  diszjunkt erősen Helly tulajdonságú hipergráf összegének  $H'$  részhipergráfjára  $V/H' / \leq k$ , akkor  $T/H' / \leq f/t, k/$ .

Ez az eredmény a szerző egy régebbi tételéből következik / [10] 4.Tétel/ a következő, talán önmagában is érdekes lemma felhasználásával:

Lemma: Erősen Helly tulajdonságú hipergráf line-gráfja nem tartalmazhatja a három független élből álló gráf komplementerét. /Normális hipergráfra ez nem áll, hiszen ez a gráf perfekt/. Nevezzük el ezt a gráfot  $Q_3$ -nak.

Lemma bizonyítása: Indirekt módon okoskodunk. Tegyük fel, hogy  $Q_3$  gráf benne van feszített részgráfként  $H$  erősen Helly tulajdonságú hipergráf line gráfjában. Jelöljük  $Q_3$  csúcsait az alábbi ábra szerint:  $/e_1f_1, e_2f_2, e_3f_3$  élek hiányoznak a gráfból, a többi él megvan/



Tekintsük az  $e_1, X, e_2, Y, e_3, Z$  kört, ahol  $X \in e_1 \cap e_2 \cap f_3$ ,  $Y \in e_2 \cap e_3 \cap f_1$  és  $Z \in e_3 \cap e_1 \cap f_2$ .  $X, Y, Z$  pontok kiválaszthatók így, hiszen  $H$  Helly tulajdonságú. A kiválasztott pontok mind különbözők, hiszen, ha pl.  $X=Y$  akkor  $X \in e_1$  és  $X \in f_1$ , ami nyilván lehetetlen, hiszen  $e_1$  és  $f_1$  diszjunktak. Ezen kör egyik éle sem tartalmazza  $X, Y, Z$  mindegyikét:  $Y \notin e_1$ ,  $Z \notin e_2$  és  $X \notin e_3$ . Az ellentmondás a lemmát bizonyítja.  $\square$

17.Tétel bizonyítása:  $H'$  éleinek számára vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Legyenek  $H_1, \dots, H_t$  diszjunkt Helly tulajdonságú hipergráfok és  $H'$  az összegük egy részhipergráfja. Tegyük fel, hogy igaz a tétel, ha  $H'$ -nak  $k$ -nál kevesebb éle van, és legyen  $|E/H'| \neq k$ . Legyen  $e \in E/H'$  és  $e = \bigcup_{i=1}^t e_i$  ahol  $e_i \in E/H_i$ .  $H'$ -e hipergráfnak indukciós feltevés szerint van  $t$  pontu lefogóhalmaza,  $x_1, \dots, x_t$ , olyan, hogy  $x_i \in V/H_i$ . Feltehető, hogy minden  $x_i$ -hez van olyan éle  $H'$ -e -nek, melyet csak  $x_i$  fog le - ellenkező esetben  $x_i$  csucst hagyjuk el és helyette vegyünk tetszőleges csucst  $e_i$  -ből, így  $H'$ -nek a kívánt lefogóhalmazát kapjuk. Rendeljük a csak  $x_i$ -ben lefogott  $H'$ -e -beli élek  $H_i$ -be eső komponenseit  $x_i$ -hez, ez legyen  $F_i$  részhipergráfja  $H_i$ -nek.  $H'$ -e esetleges maradék éleinek komponenseit osszuk be tetszőlegesen különböző  $F_i$ -kbe. Ily módon egy-egy értelmű megfeleltetésünk van  $H'$ -e élei és  $\bigcup_{i=1}^t F_i$  között.

Ha valamely  $i$ -re  $e_i$  metszi  $F_i$  minden élet, akkor  $H_i$  Helly tulajdonsága miatt  $F_i \cup \{e_i\}$ -nek van közös pontja, ezzel  $x_i$ -t kicserélve  $H'$ -nek a kívánt lefogóhalmazát kapjuk. Ellenkező esetben minden  $e_i$ -hez van olyan  $f_i \in F_i$  hogy  $e_i \cap f_i = \emptyset$ . Ezekhez az az  $f_i$  élekhez tartozó  $H'$ -e-beli élek halmaza legyen  $E'$ .  $|E'| = t$ , ezért az  $E' \cup e$  élhalmaz  $t+1$  elemű. Feltétel szerint ezen élhalmaznak van közös pontja, ez azonban lehetetlen, mert  $e_i \cap f_i = \emptyset$  az  $i$ . komponensben.  $\square$

18.Tétel bizonyítása:  $G$  két színnel színezett teljes gráfot definiáljuk a következő módon: pontjai egy  $u$  soru és  $u$  oszlopu mátrix elemei, és két pont közötti él piros, ha

a két pont nincs egy sorban, kék, ha a két pont nincs egy oszlopban. Ilymódon egy él több szint is kaphat. Legyen  $G_p$  és  $G_k$  a piros ill. kék élek által meghatározott gráf.  $G_p$  és  $G_k$  perfektt gráfok /legegyszerűbb módon úgy látható ez, hogy komplementerük perfektt cf. [13]/ ezért maximális teljes gráfjaikból képzett hipergráf duálisa normális [13]. Ezen hipergráfok összegét nézve  $\gamma=1$ , hiszen  $G$ -ben bármely két pont között van piros vagy kék él. Másrészt  $T_{\geq u}$  az összegre, hiszen  $G$  csucsai nem fedhetők le  $u$ -nál kevesebb egyszínű teljes részgráffal, tekintve, hogy egy egyszínű teljes részgráfnak legfeljebb  $u$  pontja van.  $\square\square\square$

5. Nem csökkenthető lefogóhalmazok számáról.

Vizsgáljuk meg, hogy egy hipergráfnak hány, legfeljebb  $k$  elemű lefogóhalmaza lehet, pontosabban, hogy milyen felső becslés adható erre, mely csak  $k$ -tól és a hipergráf rangjától függ. A kérdés csak olyan lefogóhalmazokra érdekes, melyek nem csökkenthetők, azaz melyekből tetszőleges pontot elhagyva már nem kapunk lefogóhalmazt. Nevezzük az ilyen nem csökkenthető lefogóhalmazokat minimálisnak.

20.Tétel: Egy  $r$  rangú  $H$  hipergráfban legfeljebb  $r^k$  minimális,  $k$ -nál nem nagyobb elemszámú lefogóhalmaz lehet.

A tételt  $k = T/H$  ra alkalmazva adódik:

1.Következmény: Egy  $r$  rangú  $H$  hipergráfban legfeljebb  $r^{T/H}$  számú  $T/H$  elemű lefogóhalmaz lehet.

2.Következmény: / [13], 53. oldal 2.tétel/  $r$  rangú  $\gamma$ -kritikus  $H$  hipergráfban legfeljebb  $\gamma^r$  él lehet. /Egy hipergráf  $\gamma$ -kritikus, ha bármely élét bármely pontjával csökkentve  $\gamma$  megnő./

Bizonyítás: tekintsük azt a  $H'$  hipergráfot, melynek pontjai  $H$  pontjai, élei pedig  $H$ -ból vett  $\gamma$  számú él egyesítéseként írhatók.  $H'$  rangja legfeljebb  $\gamma^r$  és  $H$  minden éle egy minimális, legfeljebb  $r$  elemű lefogóhalmaz. /A minimalitás  $H$   $\gamma$ -kritikusságából következik./ A 20. tételt alkalmazva a következményt kapjuk.  $\square$

20.Tétel bizonyítása:  $k$  szerinti indukció.  $k=1$ -re a tétel



igaz. Legyen  $k > 1$  és válasszuk ki  $H$  tetszőleges  $e$  élét.  $H$ -nak minden minimális lefogóhalmaza metszi  $e$ -t és  $e$  egy  $x$  pontját legfeljebb  $r^{k-1}$  ilyen lefogóhalmaz metszheti, hiszen egy ilyen  $T$  lefogóhalmaz esetén  $T - \{x\}$  lefogóhalmaza  $H - x$ -nek, még pedig minimális és legfeljebb  $k-1$  elemű. Miután  $e$ -nek legfeljebb  $r$  eleme van, ezért  $r \cdot r^{k-1} = r^k$  lefogóhalmaz lehet legfeljebb.  $\square\square\square$

## 6. Fogalmak, jelölések.

Ebben a fejezetben felsoroljuk a legfontosabb fogalmakat és jelöléseket.

Hipergráfnak nevezünk egy  $H=V/H/, E/H//$  párt, ahol  $V/H/$  egy véges halmaz,  $E/H/$  pedig  $V/H/$  részhalmazainak egy véges rendszere. Rendszert mundtunk halmaz helyett, mert egy részhalmaz többször is szerepelhet  $E/H/-$ ban. Ha minden részhalmaz legfeljebb egyszer szerepel  $E/H/-$ ban, akkor egy szerű hipergráfról beszélünk.  $V/H/$  halmazt  $H$  csucsainak, vagy pontjainak,  $E/H/-$ t pedig  $H$  éleinek mondjuk.

Mindig feltételezzük, hogy egy hipergráf éleinek egyesítése a csucsok halmaza.

$H'$  hipergráfot  $H$  részhipergráfiának nevezzük, ha  $H'$  élei  $H$  élei közül valók és  $H'$  pontjait  $H'$  éleinek egyesítése adja.  $H'$  hipergráfot  $H$  hipergráf alhipergráfiának nevezzük, ha pontjai  $V/H/$  egy részhalmaza, élei pedig  $H$  éleinek ezzel a részhalmazzal való metszetei.

Egy hipergráf rangja egy maximális sok csucsból álló elemszáma. Egy csucs foka a csucsra illeszkedő élek száma. Két hipergráf izomorf, ha csucsaik között egy-egy értelmű éltartó megfeleltetés létesíthető.  $q$  hosszúságú láncnak nevezzük az  $x_1, E_1, x_2, E_2, \dots, x_q, E_q, x_{q+1}$  sorozatot, ahol  $x_i$ -k különböző csucsok,  $E_i$ -k különböző élek és  $x_k, x_{k+1} \in E_k$   $k=1, 2, \dots, q$  esetén. Ha  $x_{q+1}=x_1$ , akkor  $q$

hosszuságu körről beszélünk.

Egy hipergráf összefüggő, ha bármely két különböző pontja láncsal összeköthető. Könnyű igazolni, hogy minden hipergráf egyértelműen felbontható összefüggő komponensekre.

$H = (V, E)$  hipergráf duális hipergráfja,  $H'$  a következő:  $H'$  élei  $H$  csucsainak,  $H'$  csucsai  $H$  éleinek felelnek meg és  $H'$ -ben csucs élre /él csucsra/ pontosan akkor illeszkedik, ha  $H$ -ban a megfelelő él csucsra /csucs élre/ illeszkedik.

Egy hipergráf uniform, ha minden éle ugyanannyi csucsból áll. Egy hipergráf s osztályu, ha csucsai  $s$  diszjunkt nem üres osztályban vannak és minden éle minden osztályból egyetlen pontot tartalmaz. Teljes s osztályu hipergráf az, mely  $s$  osztályu és minden lehetséges él egyszeres multiplicitással benne van.  $K_n^r$  jelöli a teljes  $n$  csucsu  $r$  rangu uniform hipergráfot, melynek élei  $n$  csucs összes  $r$  elemű részhalmazából állnak. Mindig feltesszük, hogy  $r \leq n$ .

$\mathcal{V}_k$ -val jelöljük egy hipergráf azon részhipergráfjának maximális elemszámát, melyben minden csucsra legfeljebb  $k$  él illeszkedik e részhipergráfból.  $\mathcal{T}_k$ -val jelöljük azon csucsrendszer minimális elemszámát, melyre minden él legalább  $k$  számú csucst tartalmaz ezen csucsrendszerből. Egy csucs többször is kiválasztható.  $\mathcal{V}_1$  és  $\mathcal{T}_1$  helyett a  $\mathcal{V}$  és  $\mathcal{T}$  jelölést szokásos használni.  $\mathcal{V}$  a független élek maximális száma,  $\mathcal{T}$  pedig az éleket lefogó csucrok minimális száma. Általában, ha egy élhalmaz pá-

ronként ~~függjunkt~~ élekből áll, akkor független élekről beszélünk, és egy csucshalmazt lefogóhalmaznak nevezünk, ha minden él tartalmaz legalább egy csucst e halmazból. Megjegyezzük, hogy  $\mathcal{V}$ -nek és  $\mathcal{T}$ -nak a duális hipergráfon  $\alpha$  /erős stabilitási szám/ és  $\varrho$  /fedési szám/ felel meg.

H hipergráf élgráfjának, vagy line-gráfjának nevezzük, és  $L/H$ -val jelöljük azt a gráfot, melynek csucspontjai H éleinek felelnek meg és két csucs pontosan akkor van összekötve  $L/H$ -ban, ha a megfelelő H-beli éleknek van közös pontjuk.

Ha H egy hipergráf és  $x \in V/H$ , akkor x elhagyását  $V/H$ -ból és minden x-et tartalmazó élből x levágásának nevezzük. Ha x-et elhagyjuk  $V/H$ -ból és  $E/H$ -ból elhagyjuk az összes x-et tartalmazó élt, akkor x elhagyásáról beszélünk. Ezt a műveletet  $H-x$  -el jelöljük.

Egy hipergráf Helly tulajdonságú, ha bármely részhipergráfjára  $\mathcal{V}=1$  -ből  $\mathcal{T}=1$  következik. Egy hipergráf normális, ha bármely részhipergráfjára  $\mathcal{V} = \mathcal{T}$ . Egy hipergráf kiegyensúlyozott, vagy balanced, ha bármely páratlan körében van olyan él mely a kör legalább három pontját tartalmazza. Ismeretes, hogy balanced hipergráf normális és normális hipergráf triviálisan Helly tulajdonságú.

Szögletes zárójel egész részt jelöl, \* -al a jobbsarkában felső egész részt.

Hivatkozások

- [1] B.Andrásfai: Remarks on a paper of Gerencsér and Gyárfás, Annales Univ. Sci. Bud. de Rol. Eötvös, Sect. Math. XIII. 1970. 103-107.
- [2] Zs.Baranyai: On the factorization of the complete uniform hypergraph. Coll.Math. Soc. J.Bolyai 10. Infinite and Finite sets. 91.
- [3] C.Berge, Graphs and Hypergraphs, North Holland, 1973
- [4] C.Berge-D.Ray-Chaudhuri /editors/ Hypergraph Seminar, Lecture notes in Math. 411.
- [5] d.Ray-Chaudhuri - R.M.Wilson: The existence of resolvable block designs. In A Survey of Comb. Theory, North Holland, 1973
- [6] L.Gerencsér -A.Gyárfás: On Ramsey type problems. Annales Univ.Sci Bud. de Rol. Eötvös S.Math. X. 1967, 167-170.
- [7] A.Gyárfás -J.Lehel: A Helly type problem in trees. Coll. Math. Soc. J. Bolyai 4. Combinatorial Theory and its Applications, 1969 571-584
- [8] A.Gyárfás: On Ramsey covering numbers. Coll. Math. Soc. J.Bolyai, 10. Infinite and Finite sets, 1973 801-816.
- [9] A.Gyárfás: A note on Hypergraphs having the Helly property. Submitted to Discrete Mathematics.
- [10] A.Gyárfás: A Ramsey type theorem and its applications to Relatives of Helly's theorem. Periodica Math. Hung. Vol. 3. 1973. 261-270
- [11] A.Hajnal-P.Erdős: On chromatic number of graphs and set systems, Acta Math. Acad.Sci. Hung.17.1966.61-99.
- [12] Kőnig Dénes: Gráfok és mátrixok, Mat.Fiz. Lapok, 38 1931, 116-119.
- [13] Lovász László: Doktori értekezés, 1977