Gyárfás András, Hraskó András

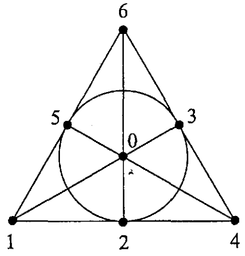
Teljes gráfok felbontásairól

Teljes gráfnak nevezünk egy n elemű halmazt (pontok halmaza) különböző elemeiből képzett párjaival (élek halmaza). A pontokat általában $\{1, 2, \ldots, n\} = [n]$ jelöli, az éleket ij és a teljes gráfra a K_n jelölés szokásos. Tehát K_n-nek $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ éle van. Ebben a cikkben teljes gráfok felbontásaival kapcsolatos eredményeket mutatok be, lehetőleg érdekes és máshol is hasznosítható bizonyításokkal. Felbontáson azt értjük, hogy K_n teljes gráfot előállítjuk olyan részgráfok egyesítéseként, amelyeknek nincs közös élük. Egy híres példa K_7 felbontása hét K_3-ra (Fano-sík) ami lényegében egyértelmű és az $\{1, 2, 4\}$ egész eltolásaival kapható mod 7 aritmetikával számolva.

A sakkot ketten, az ultit hárman, a bridzset négyen játsszák. Gráfok felbontása helyett játszhatunk is...

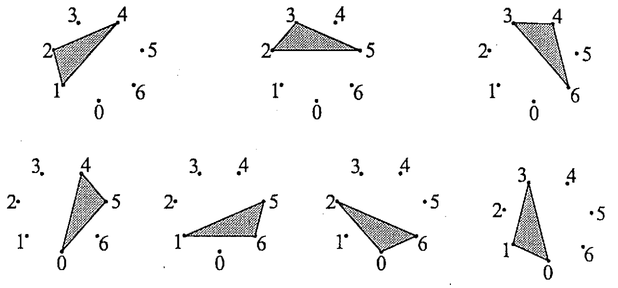
1. Programok egy hétre

Sokszor szemléletesebb pontok helyett emberekről beszélni, az előző állítás például azt mondja, hogy hét játékos hét ultipartit szervezhet hét napra úgy, hogy bármely két játékos pontosan egyszer játszik együtt.



1. ábra. Ultipartik a Fano-sík alapján: a hét játékos a hét pont, a hét parti a hét, egy vonalra (szakaszra, ill. körre) eső ponthármas

Hétfőn játszik $1, 2, 4$, kedden $2, 3, 5$, és így tovább, vasárnap $0, 1, 3$. Minden nap hárman játszanak, a többiek szabadok.



2. ábra. Ultipartik mod 7 aritmetikában: a hét játékos a hét szám, a hét parti az $\{1,\ 2,\ 4\}$ hármas és annak eltoltjai mod 7

1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy 15 játékosnak is lehet hét napra ultipartikat szervezni úgy, hogy bármely két játékos pontosan egyszer játsszon együtt!

Ehhez öt asztal kell (három-három székkel), minden nap mindenki játszik. Nem egyszerű megszervezni az ültetést... Persze könnyű elkezdeni, az első asztal beosztása hét napra lehet $1,2,3$; $1,4,5$; $1,6,7$; ...; $1,14,15$. Próbáljuk megtervezni a másik négy asztal beosztását is! Ezt a problémát Kirkman tiszteletes tűzte ki 1847-ben egy angol magazinban – persze nem ultiról szólt, hanem 15 iskolásleány sétájáról hét napon hármas sorokban...

Egy könnyebb probléma:

2. feladat. Készítsük el 8 bridzsező ültetési tervét hét napra két asztalhoz (négy-négy székkel) úgy, hogy bármely *három* pontosan egyszer üljön közös asztalnál!

Végül a legkönnyebb:

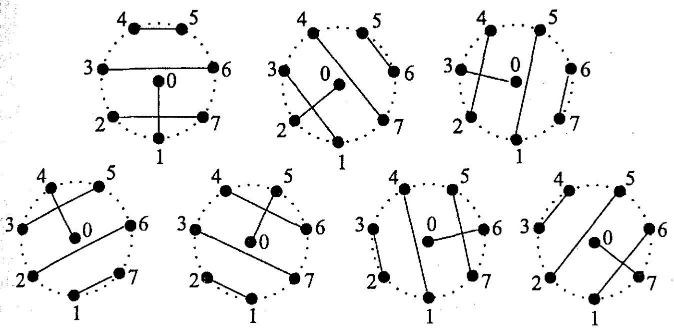
3. feladat. Készítsük el 8 sakkozó ültetési tervét hét napra négy asztalhoz (két-két székkel) úgy, hogy bármely *kettő* pontosan egyszer üljön közös asztalnál. Erre hamarosan látunk megoldásokat...

2. Felbontás faktorokra

Tegyük fel, hogy n páros, nevezzük *faktornak* az $n/2$ páronként közös pont nélküli élből álló gráfot. Talán a legrégebben ismert felbontási tétel a következő.

1. tétel. *Minden páros n esetén K_n felbontható $n-1$ faktorra.*

A tétel egy gyakorlati alkalmazása, hogy páros n esetén körmérkőzés szervezhető n játékos számára $n-1$ fordulóban úgy, hogy mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszik. A felbontás faktorai a fordulók párosítását jelentik. A tétel legegyszerűbb bizonyítása a következő: $i = 1, 2, \ldots, n-1$ esetén az i-edik faktor álljon az $(0, i)$ élből és az $(i-j, i+j)$ (mod $n-1$) élekből, ahol $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, \frac{n}{2} - 1$.



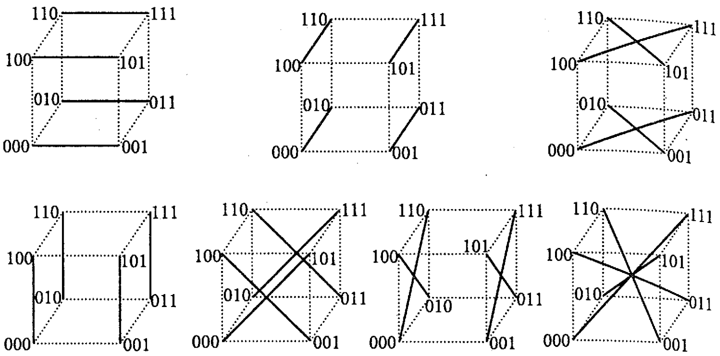
3. ábra. Körmérkőzéses bajnokság 8 csapat között. Az i-edik forduló ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ és 7) mérkőzései mod 7 értve: $(0, i)$, $(i-1, i+1)$, $(i-2, i+2)$ és $(i-3, i+3)$

Nem is olyan könnyű ettől különböző megoldásokat találni, melyek minden páros n-re működnek... Ha $n = 2^k$, akkor egy másik szellemes megoldást kaphatunk úgy, hogy a pontokat bináris formában írjuk (k hosszúságú $0-1$ vektorként) és két pont közötti élt pontosan akkor tesszük ugyanabba a faktorba, ha a pontok koordinátánként vett mod 2 összegvektora ugyanaz.

A két megoldás közti alapvető különbséget jól megfigyelhetjük $n = 8$ esetén: az elsőnél bármely két faktor egyesítése nyolcpontú kört alkot, a másodiknál ez nem igaz.

Az 1. tételt már a tizenkilencedik században ismerték, de kézenfekvő általánosítását csak 1975-ben bizonyította Baranyai Zsolt. A Baranyai-tételben K_n helyett K_n^r szerepel, ami n pont összes r elemű részhalmazát jelenti, a faktor pedig páronként diszjunkt r elemű halmazokat jelent.

Például $n = 16, r = 4$ esetén a „Baranyai-faktorizáció" azt jelenti, hogy 16 elem négyesei $\binom{16}{4} : \frac{16}{4} = \binom{15}{3} = 455$ csoportba



4. ábra. Körmérkőzéses bajnokság 8 csapat között. Ha $i = ABC_2$, akkor az i-edik fordulóban abc_2 azzal az $a'b'c'_2$ csapattal játszik, amelyikre $a + a' \equiv A,\ b + b' \equiv B,\ c + c' \equiv C \pmod 2$

oszthatók, minden csoportban négy diszjunkt négyessel. Tehát 16 bridzselő négy asztalnál 455 napig játszhat úgy, hogy bármely négy pontosan egyszer ül közös asztalnál. Ha csak azt akarjuk, hogy bármely *két* játékos pontosan egyszer üljön közös asztalnál, akkor 5 nap is elég – ezt taglalja Montágh Balázs cikke – bridzsezők helyett motorversenyzőkkel...

2. tétel. *Ha n osztható r-rel, akkor K_n^r felbontható $\binom{n-1}{r-1}$ faktorra.*

A faktorok száma abból adódik, hogy összesen $\binom{n}{r}$ darab r-elemű részhalmaz van, egy faktoron belül pedig $\frac{n}{r}$, és $\binom{n}{r} : \frac{n}{r} = \binom{n-1}{r-1}$. A tétel az $r = 2$ speciális esetben az 1. tételt adja. Viszont (ellentétben az 1. tétellel) algebrai jellegű bizonyítása nem ismeretes. A 2. tétel bizonyításának hátterében hálózati folyamok állnak, de elég egy önmagában is igen érdekes speciális eset a bizonyításhoz, nevezetesen *Baranyai kerekítési lemmája.*

1. lemma. *Tegyük fel, hogy egy A mátrix sor és oszlopösszegei egész számok. Ekkor a mátrix elemei kicserélhetők alsó vagy felső egész részeikkel úgy, hogy olyan B mátrixot kapunk, melynek sor és oszlopösszegei ugyanazok mint az A mátrixé.*

Bizonyítás. Az A mátrix egy elemét nevezzük rossz elemnek, ha nem egész. Ha A-ban nincs rossz elem, akkor $A = B$ máris megfelel. Egyébként a következő algoritmus csökkenti a rossz elemek számát a sor és oszlopösszegek és az egész részek változtatása nélkül. Válasszunk egy r_1 rossz elemet, ennek sorában van egy másik rossz elem is, r_2, mivel a sorösszeg egész. Ezután r_2 oszlopában választhatunk egy r_3 rossz elemet, majd r_3 sorában egy r_4 rossz elemet... Az eljárás során előbb utóbb visszajutunk ugyanahhoz az elemhez (nem feltétlenül r_1-hez). Mindenesetre kapunk páros számú rossz elemet melyek között a ciklikusan egymásra következők felváltva ugyanabban a sorban, illetve oszlopban vannak. Nevezzük ezt rossz körnek. A rossz kör minden egyes elemének tekintsük az alsó és felső egész részétől vett távolság kisebbikét (egyenlőség esetén valamelyiket) aztán ezen távolságok legkisebbikét a rossz körön jelöljük ϵ-nal. Nyilvánvaló, hogy a rossz kör elemeihez váltakozva ϵ-t hozzáadva, illetve kivonva a mátrix sor és oszlopösszegei és az elemek egész részei nem változnak, viszont legalább egy rossz elem megszűnik.

A fenti algoritmust elég sokszor alkalmazva kapjuk a kívánt B mátrixot.

Igen meglepő, hogy az előbbi lemmán alapszik a 2. tétel bizonyítása, mégpedig indukcióval. A bizonyítás annyiban trükkös, hogy a 2. tételnél látszólag erősebb tételt lehet indukcióval bizonyítani. Vezessünk be néhány jelölést. Legyen n és r a 2. tétel szerint, $M := \binom{n-1}{r-1}$ (a faktorok száma) és $m := n/r$ (az r-elemű halmazok száma a faktorokban). Használni fogjuk a $[k]$ jelölést az $\{1, 2, \ldots, k\}$ halmazra, $[0]$ az üres halmaz – azaz $\emptyset$.

K_n^r egy faktora a csúcsok $[n]$ halmazát m darab diszjunkt r elemű részhalmazra bontja. Tekintsük $[n]$ egy tetszőleges $[k]$ $(0 \geq k \geq n)$ részhalmazát. A faktor tagjainak $[k]$-val való metszetei egymástól diszjunktak és uniójuk $[k]$, azaz $[k]$ egy m részhalmazra való felbontását, úgynevezett *m-partícióját* adják. Míg a faktor minden tagjának elemszáma r, addig a partíció tagjai nem feltétlenül azonos elemszámúak.

Példa: $n = 6, r = 2, k = 2$ ekkor $m = 3$. K_n^r egy faktora a

$$\{\{5,6\}, \quad \{1,3\}, \quad \{2,4\}\}$$

halmazrendszer. Ennek $[k] = [2]$-vel vett metszetei

$$\{\emptyset, \quad \{1\}, \quad \{2\}\}.$$

Az

$$\{\{5,6\}, \quad \{3,4\}, \quad \{1,2\}\}$$

faktorból pedig [2]-nek a

$$\{\emptyset,\ \ \emptyset,\ \ [2]\}$$

3-partícióját kapjuk.

Ha K_n^r-t felbontottuk M faktorra, akkor azok mindegyikéből kaphatunk egy m partíciót $[k]$-ra. $[k]$ egy S részhalmaza ($|S| \leq$ $\leq r$) annyiszor szerepel, ahányféleképpen a kimaradt $k+1, \ldots, n$ elemekből kiválasztható $r-|S|$ darab. Ezért a 2. tételből *következik* az alábbi állítás.

2.* tétel. *Legyen r osztója n-nek. Ekkor bármely $0 \leq k \leq n$ esetén van M darab olyan m-partíciója $[k]$-nak amelyben minden $S \subseteq [k]$ pontosan $\binom{n-k}{r-|S|}$ számú partícióban fordul elő.*

Az előző példában $M = 5$. Az első négy partíció lehet

$$\{\emptyset,\ \ \{1\},\ \ \{2\}\},$$

az ötödik pedig

$$\{\emptyset,\ \ \emptyset,\ \ [2]\}.$$

A 2* tétel $k = n$ esetén trükkösen adja a 2. tételt: bármely $S \subseteq [k]$ pontosan $\binom{0}{r-|S|}$ partícióban fordul elő. Ez a szám azonban csak $|S| = r$ esetén nem nulla (ekkor 1) ami pontosan azt jelenti, hogy csak az r elemű halmazok szerepelnek a partíciókban és mindegyik pontosan egyben.

A 2* tétel előnye, hogy k szerinti indukcióval bizonyíthatjuk. Ha $k = 0$, akkor az M partíció mindegyike csupa üres halmazból állhat. Tegyük fel, hogy valamely $k < n$-re megvannak az $A_1, \ldots,$ A_M m-partíciók. Most mindegyik partíció egy és csak egy halmazát ki kell bővítenünk a $k+1$ elemmel úgy, hogy bármely $S \subset [k]$ halmaznak $\binom{n-k-1}{r-|S|-1}$ példányát bővítsük, $\binom{n-k-1}{r-|S|}$ példányát pedig ne bővítsük ki $k+1$-gyel. Első lépésben bízzuk a választást a véletlenre! Az S halmazt $\binom{n-k-1}{r-|S|-1}/\binom{n-k}{r-|S|} = \frac{r-|S|}{n-k}$ valószínűséggel kell kibővíteni. A véletlent Baranyai kerekítési módszerével küszöböljük ki.

Írjuk ezeket a kibővítési valószínűségeket egy $M \times 2^k$-as A mátrixba! A oszlopai $[k]$ részhalmazainak felenek meg, a sorok pedig a partícióknak (lásd a példát a következő oldalon). Az A mátrix A_i sorában és $S \subset [k]$ oszlopában álló elem tehát 0 lesz, ha S

nem szerepel A_i-ben, ha pedig szerepel, akkor értéke $\frac{r-|S|}{n-k}$, illetve az üres halmaz esetén, amely többször is szerepelhet ugyanabban a partícióban, ez az érték $t \cdot \frac{r}{n-k}$, ahol t jelöli az üres halmaz multiplicitását A_i-ben.

Érdemes ellenőrizni, hogy a példa esetén az A mátrix első négy sora $[1/2, 1/4, 1/4, 0]$ és az ötödik sora $[1, 0, 0, 0]$ ha az első oszlop az üres halmaznak, a negyedik oszlop meg $[2] = \{1, 2\}$-nek felel meg.

Nem nehéz belátni, hogy az A mátrix minden sorösszege 1 és az S-hez tartozó ($S \subseteq [k]$) oszlopösszeg $\binom{n-k-1}{r-|S|-1}$.

Ezután a kerekítő lemmát alkalmazzuk az A mátrixra ami adja a B mátrixot. A B mátrix A_i-hez tartozó sorában egyetlen egyes van, ennek oszlopa egy $S_i \in A_i$ blokkot definiál.

Példánkban:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & \emptyset & \{1\} & \{2\} & \{1,2\} \\
\hline
\emptyset,\{1\},\{2\} & \frac12 & \frac14 & \frac14 & 0 \\
\emptyset,\{1\},\{2\} & \frac12 & \frac14 & \frac14 & 0 \\
\emptyset,\{1\},\{2\} & \frac12 & \frac14 & \frac14 & 0 \\
\emptyset,\{1\},\{2\} & \frac12 & \frac14 & \frac14 & 0 \\
\emptyset,\emptyset,\{1,2\} & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cccc}
\emptyset & \{1\} & \{2\} & \{1,2\} \\
\hline
\frac12 & 0 & \frac12 & 0 \\
\frac12 & \frac12 & 0 & 0 \\
\frac12 & 0 & \frac12 & 0 \\
\frac12 & \frac12 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$\downarrow$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
\emptyset,\{1\},\{2\} & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\emptyset,\{1\},\{2\} & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\emptyset,\{1\},\{2\} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\emptyset,\{1\},\{2\} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\emptyset,\emptyset,\{1,2\} & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\longleftarrow
\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 1 & 0 \\
\frac12 & \frac12 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac12 & \frac12 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Ezután definiálunk új m-partíciókat $[k+1]$-en úgy, hogy (minden i-re) A_i-ben S_i-t kicseréljük $S_i \cup \{k+1\}$-re, A_i többi blokkját változatlanul hagyva. Az új partíciók kielégítik a 2* tételt $k+1$-gyel, ennek ellenőrzését is az olvasóra bízzuk. Példánkban a $[3]$ halmaz megfelelő partíciói:

$$\begin{array}{ccc}
\emptyset, & \{1\}, & \{2,3\}; \\
\emptyset, & \{1,3\}, & \{2\}; \\
\{3\}, & \{1\}, & \{2\}; \\
\{3\}, & \{1\}, & \{2\}; \\
\{3\}, & \emptyset, & \{1,2\}.
\end{array}$$

3. Felbontás teljes részgráfokra

Egy teljes gráf triviálisan felbontható egyetlen teljes gráfra. A De Bruijn–Erdős tétel azt mutatja, hogy nem triviális felbontáshoz már sokkal több teljes részgráf kell.

3. tétel. *Ha K_n éleit $m > 1$ teljes részgráfra bontjuk fel, akkor $m \geq n$.*

Egy tömör bizonyítás Conwaytől: legyenek a felbontásban szereplő teljes részgráfok ponthalmazai $A_1, A_2, \ldots, A_m$ és tegyük fel, hogy $n \geq m$. Jelöljük $d(i)$-vel az i pontot tartalmazó A_j halmazok számát. Könnyű látni, hogy tetszőleges $i \notin A_j$ esetén $d(i) \geq |A_j|$. Ez és az $n \geq m$ egyenlőtlenség adja, hogy $nm - nd(i) \leq nm - m|A_j|$, azaz

$$\frac{1}{n(m-d(i))} \geq \frac{1}{m(n-|A_j|)}. \tag{1}$$

Csak éppen az nem látszik, mire is jó ez. Arra, hogy összeadva őket minden $i \notin A_j$ párra kapjuk

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{A_j \not\ni i} \frac{1}{n(m-d(i))} \geq \sum_{j=1}^{m} \sum_{i \notin A_j} \frac{1}{m(n-|A_j|)},$$

de mindkét oldal értéke 1! Ugyanis a belső összegek azonos mennyiségeket adnak össze, a baloldalon $m-d(i)$-szer, a jobboldalon $n-|A_j|$-szer. Ezért az (1) egyenlőtlenség valójában egyenlőség, emiatt az $n \geq m$ (és mellesleg minden $d(i) \geq |A_j|$) egyenlőség kell legyen.

4. Feladat. Lássuk be, hogy a 3. tételben egyenlőség ($m = n$) csak két esetben lehet:
1. A felbontás egy fix pontot tartalmazó párokból és a fix pontot elkerülő $n-1$-elemű halmazból áll.
2. Valamely $q > 1$ egészre $n = q^2 + q + 1$, a felbontásban minden A_i halmaz $q+1$ elemű, minden pontot $q+1$ halmaz tartalmaz, bármely két különböző halmaz metszi egymást (q-rendű véges projektív sík).

A 3. tétel következő általánosítását Fisher-egyenlőtlenségnek nevezik.

4. tétel. *Ha K_n éleit m teljes részgráfra bontjuk fel úgy, hogy minden élt pontosan λ-szor fedünk és egyik fedő részgráf sem maga K_n, akkor $m \geq n$.*

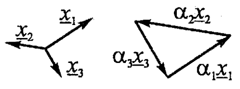
Ennek a tételnek csak lineáris algebrát használó bizonyításai ismeretesek. Mielőtt rátérnénk a bizonyításra tisztázzuk az ahhoz szükséges alapvető fogalmakat és tételt.

Ha adottak az $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_3$ vektorok, akkor kérdezhetjük, hogy vannak-e olyan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, számok, amelyek közül nem mindegyik 0, és teljesül a

$$\alpha_1 \cdot \underline{x}_1 + \alpha_2 \cdot \underline{x}_2 + \alpha_3 \cdot \underline{x}_3 = \underline{0} \tag{2}$$

lineáris összefüggés. Ha vannak ilyen számok, akkor vektorainkat *lineárisan összefüggőnek* nevezzük. Ha a (2) összefüggés csak abban az esetben teljesül, amikor $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, akkor a vektorok *lineárisan függetlenek.*

Ha $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_3$ a sík három vektora, akkor mindenképpen lineárisan összefüggőek (lásd az ábrát). Ha viszont $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_3$ a tér három nem egy síkba eső vektora, akkor lineárisan függetlenek.



Ezek a fogalmak általánosíthatók: engedjük meg, hogy az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ vektoroknak m koordinátája legyen. Ebben az általános esetben is igaz, hogy az $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ vektorok csak akkor lehetnek lineárisan függetlenek, ha $n \leq m$. Ha ugyanis $m > n$, akkor a

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \underline{x}_i = \underline{0}$ összefüggést koordinátánként felírva egy olyan homogén lineáris egyenletrendszert kapunk az α_i változókra, amelyben több az ismeretlen, mint az egyenlet, így biztosan van a triviális $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$ megoldástól különböző megoldása is.

Visszatérünk a 4. tétel igazolásához.

A 3. tétel jelöléseit használva feltehetjük, hogy minden i-re $(1 \leq i \leq n)$ $d(i) = \lambda + \gamma_i$, ahol $\gamma_i > 0$. λ-nál kevesebb részgráf ugyanis nem tudja λ-szor lefedni az i-edik csúcsból kiinduló éleket; λ részgráf még éppen elegendő lenne, ha mindegyik tartalmazná az i-edik csúcsból induló összes élt, azaz ha mindegyik a teljes K_n gráf lenne. Definiáljunk minden i ponthoz egy m komponensű $\underline{x}_i$ vektort, melyben a j-edik koordináta aszerint 1 vagy 0, hogy az i pont benne van e A_j-ben. Azt állítjuk, hogy vektoraink lineárisan függetlenek, amiből következik a tétel.

Bizonyítsunk indirekten! Tegyük fel, hogy valós α_i számokkal teljesül $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{x}_i = 0$. Képezzük az egyenlet mindkét oldalának $\underline{x}_j$-vel vett skaláris szorzatát. Megfigyelve, hogy $\underline{x}_i \underline{x}_j = \lambda$ ha $i \neq j$ és $\underline{x}_i \underline{x}_j = \lambda + \gamma_i$ ha $i = j$, azt kapjuk, hogy minden j-re

$$\alpha_j = -\frac{\lambda}{\gamma_j} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Ha egyenleteinket összeadjuk, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = -\lambda \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\gamma_j} \right) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$$

ami csak $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$ esetén teljesülhet. Korábbi egyenletünkből következik, hogy ilyenkor mindegyik α_j együttható zérus, azaz vektoraink lineárisan függetlenek.

4. Felbontás teljes páros részgráfokra

Teljes páros gráfnak nevezzük azokat a gráfokat melyeknek ponthalmaza két diszjunkt halmaz, A, B egyesítése és élei azon párok, melyeknek egyik pontja A-ban másik pontja B-ben van. Jelöljük $[A, B]$-vel a teljes páros gráfot.

5. tétel. *Ha K_n éleit m teljes páros részgráfra bontjuk fel, akkor $m \geq n-1$.*

Erre a tételre is csak lineáris algebrát használó bizonyítások ismeretesek. Talán a következő bizonyítás a legfrappánsabb, ez Tverbergtől származik. Legyenek $[A_i, B_i]$ a felbontásban szereplő teljes páros gráfok, $i = 1, 2, \dots, m$ és legyenek $x_1, x_2, \dots, x_n$ a K_n pontjaihoz rendelt valós változók. Ekkor a következő azonosság teljesül:

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\left(\sum_{j\in A_i} x_j\right)\left(\sum_{j\in B_i} x_j\right)\right) =$$

$$= \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right).$$

Tekintsük a következő $m+1$ egyenletből álló homogén lineáris egyenletrendszert: $\sum_{j\in A_i} x_j = 0$ ahol $i = 1, 2, \dots, m$ és $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Ennek nem létezhet nem triviális megoldása, mert a megoldást behelyettesítve az azonosságba a baloldalon nullát, a jobboldalon negatív számot kapnánk. Ez azt jelenti, hogy a változók száma nem nagyobb az egyenletek számánál, azaz $n \leq m + 1$.

Az 5. tétel háttere egy kódelméleti kérdés. A kódelméletben két m hosszúságú $0-1$ sorozat Hamming távolságának nevezik azon koordináták számát amelyben a két sorozat különbözik. Ennek egy általánosítását Pierce vetette fel a 1972-ben. Tekintsünk m hosszúságú sorozatokat, ahol 0, 1 mellett $*$ szimbólumot is használhatunk, amit gyakran dzsókernek neveznek. Két ilyen sorozat Hamming távolságának azon koordináták számát nevezzük, ahol az egyik sorozat 0, a másik pedig 1. Például $01{*}10$ és $101{*}0$ Hamming-távolsága 2. Ez azért hasznos, mert bármely összefüggő gráf pontjaihoz hozzá lehet rendelni (valamilyen m-re) m hosszúságú 0–1–$*$ sorozatokat úgy, hogy bármely két pont között a Hamming-távolság és a gráf-távolság megegyezik. (Gráf-távolság: a két pont közötti legrövidebb út éleinek száma.) Próbáljuk ezt bebizonyítani, nem nehéz! Az viszont nehéz probléma, hogy egy adott gráfhoz mi a legkisebb m, amelyre ilyen hozzárendelés (kódolás) lehetséges.

Az 5. tétel azzal ekvivalens, hogy K_n teljes gráf esetén legalább $n-1$ hosszúságú 0–1–$*$ sorozatokat kell használni a hozzárendeléshez (kódoláshoz).

5. feladat. Bizonyítsuk be az ekvivalenciát, valamint azt is, hogy $n-1$ hosszúságú sorozatokkal meg is lehet oldani a hozzárendelést, azaz az 5. tételben $m = n-1$ lehetséges. (Például a $0*$, 10, 11 sorozatok jók K_3 esetén.)

Az 5. tételnek irányított változata is van, próbáljuk meg igazolni, Tverberg módszere most is segíthet:

6. feladat. Mutassuk meg, hogy a szimmetrikusan irányított K_n-et (minden él két irányt kap) nem lehet n-nél kevesebb irányított teljes páros gráfra felbontani.

Két könyvet ajánlunk az olvasóknak:

J. H. van Lint–R. M. Wilson: A course in Combinatorics, Cambridge University Press.

M. Aigner–G., M. Ziegler: Proofs from the BOOK, Springer Verlag.