Szubkonvex becslések automorf L-függvényekre és alkalmazásaik

Harcos Gergely

Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet
http://www.renyi.hu/∼gharcos/

2012. február 14.
Magyar Tudományos Akadémia

Áttekintés

1. Periodikus függvények (1 fólia)
2. Automorf reprezentációk (3 fólia)
3. Automorf L-függvények (3 fólia)
4. Új eredmények (4 fólia)

Periodikus függvények

Ha $H \leqslant G$ két csoport, akkor $H\backslash G$ jelöli a $Hg \subset G$ mellékosztályok halmazát. A $H\backslash G \to \mathbb{C}$ függvényeket azonosíthatjuk a balról H-invariáns $G \to \mathbb{C}$ függvényekkel. Ezeken a függvényeken a G jobbról hat: ha $f(x) : G \to \mathbb{C}$ balról H-invariáns, akkor minden $g \in G$ elemre $f(xg) : G \to \mathbb{C}$ is balról H-invariáns.

Példa

$\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}$ azonosítható a körrel. A számegyenesen az egészek szerint periodikus függvényeket azonosíthatjuk a kör függvényeivel: ezeket tetszőleges valós számmal eltolhatjuk (elforgathatjuk).
A csoporthatásra nézve sajátfüggvények az $x \mapsto e^{2\pi ikx}$ $(k \in \mathbb{Z})$ harmonikusok, amik (teljes) ortogonális rendszert alkotnak.

Probléma

Legyen $G := \mathrm{GL}_n$ az $n \times n$-es invertálható mátrixok csoportja, és jelölje $\mathbb{A}$ a $\mathbb{Q}$ adélgyűrűjét. Elemezzük a $G(\mathbb{A})$ jobbhatását a $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ függvényeken, keressük meg a harmonikusokat.

Automorf reprezentációk (1/3)

A $G(\mathbb{A})$ jobbhatása az $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ szeparábilis Hilbert téren unitér reprezentáció. A számunkra fontos harmonikusok (az ún. csúcsformák) az alábbi zárt $G(\mathbb{A})$-alterekben lelhetők fel:

Definíció (csúcsos altér)

Legyen $\omega : Z(\mathbb{Q})\backslash Z(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$ a $G(\mathbb{A})$ centrumának egy karaktere (Hecke-karakter). Jelölje $L_0^2(\omega)$ azon $f : G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ mérhető függvények halmazát, amikre minden $z \in Z(\mathbb{A})$ esetén $f(zg) = \omega(z)f(g)$, és $|f| \in L^2(Z(\mathbb{A})G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$, továbbá

$$\int_{M_{r\times s}(\mathbb{Q})\backslash M_{r\times s}(\mathbb{A})} f\left(\begin{pmatrix} I_r & X \\ & I_s \end{pmatrix} g\right) dX = 0, \qquad r+s=n,$$

majdnem minden $g \in G(\mathbb{A})$ elemre.

Ezen az altéren tetszőleges $C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$-beli függvénnyel való konvolúció kompakt operátor (sőt, trace class operátor).

Automorf reprezentációk (2/3)

Az említett kompaktsági tulajdonság fontos következménye:

Tétel (Gelfand–Graev–Piatetski-Shapiro 1966)

Minden csúcsos altér felbomlik megszámlálható sok irreducibilis zárt $G(\mathbb{A})$-altér Hilbert-direkt összegére: $L_0^2(\omega) = \widehat{\bigoplus} V_\pi$.
A felbontásban minden irreducibilis $G(\mathbb{A})$-reprezentáció véges sokszor fordul elő (izomorfia erejéig).

Shalika (1974) „multiplicity one" tételéből következik, hogy a fenti felbontás egyértelmű, a benne szereplő V_π alterek kimerítik az összes irreducibilis zárt $G(\mathbb{A})$-alteret, és ezek mind különböző $G(\mathbb{A})$-reprezentációk.

Definíció (csúcsos reprezentáció, csúcsforma)

A fellépő (π, V_π) reprezentációk a $G(\mathbb{A})$ csúcsos reprezentációi, a V_π-beli $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ függvények a csúcsformák.

Automorf reprezentációk (3/3)

Definíció (kongruencia-részcsoport)

Jelölje $K_p(c)$ azon $G(\mathbb{Z}_p)$-beli elemek halmazát, amik utolsó sora kongruens $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ modulo c. Legyen $K(c) := \prod_p K_p(c)$.

Tétel (Jacquet–Piatetski-Shapiro–Shalika 1981)

Legyen (π, V_π) csúcsos reprezentáció. Elég nagy c-re $V_\pi^{K(c)} \neq \{0\}$; legyen c_π a legkisebb ilyen c. A $V_\pi^{K(c_\pi)}$ sajátaltere minden $C_c(K_p(c_\pi)\backslash G(\mathbb{Q}_p)/K_p(c_\pi))$-beli függvénnyel való konvolúciónak.

Mivel $Z(\mathbb{A}) = \{aI_n : a \in \mathbb{A}^\times\}$, ezért az $\omega : Z(\mathbb{Q})\backslash Z(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$ karakterre gondolhatunk mint $\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times \to \mathbb{C}^\times$ karakterre. Az alábbi észrevétel alapján feltehetjük, hogy ω triviális a pozitív számokon.

Észrevétel (csavarás karakterrel)

Ha $V_\pi \leqslant L_0^2(\omega)$ és $\psi : \mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times \to \mathbb{C}^\times$ karakter, akkor $V_{\pi\otimes\psi} := \{x \mapsto f(x)\psi(\det x) : \ f \in V_\pi\} \leqslant L_0^2(\omega\psi^n)$.

Automorf L-függvények (1/3)

Az ω nálunk triviális a pozitív számokon, ezért őt meghatározza az alábbi mod c_ω primitív Dirichlet-karakter ($m > 0$ és $(m, c_\omega) = 1$):

$$\chi_\omega(m) := \omega(1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{v \mid c_\omega}, \underbrace{m, m, \ldots}_{v \nmid c_\omega}) = \omega(1, \underbrace{m^{-1}, \ldots, m^{-1}}_{v \mid c_\omega}, \underbrace{1, 1, \ldots}_{v \nmid c_\omega}).$$

Jelölje χ_π a χ_ω által indukált mod c_π Dirichlet-karaktert ($c_\omega \mid c_\pi$).

Definíció (Hecke-sajátértékek)

Legyen $H_k(p) := K_p \operatorname{diag}(p, \ldots, p, 1, \ldots, 1) K_p$, ahol $K_p := K_p(c_\pi)$, és az átlóban k darab p áll. Jelölje $\lambda_{\pi,k}(p)$ ($1 \leqslant k \leqslant n-1$) a $H_k(p)$ normalizált sajátértékét az újformák terén:

$$\int_{H_k(p)} f(xg)\, dg = \lambda_{\pi,k}(p) p^{\frac{k(n-k)}{2}} \operatorname{vol}(K_p) f(x), \qquad f \in V_\pi^{K(c_\pi)}.$$

Legyen még $\lambda_{\pi,0}(p) := 1$ és $\lambda_{\pi,n}(p) := \chi_\pi(p)$.

Automorf L-függvények (2/3)

A csúcsos reprezentációk L-függvényét Godement–Jacquet (1972) definiálta először, általánosítva a klasszikus konstrukciókat (Riemann, Dirichlet, Hecke, Maass). Az alábbi tétel szerint a Hecke-sajátértékekkel közvetlenül definiálhatjuk az L-függvényt:

Tétel (Tamagawa 1963, Satake 1963, Kondo–Yasuda 2010)

$$L(\pi, s) = \prod_p \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \lambda_{\pi,k}(p) p^{-ks} \right)^{-1} =: \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_\pi(m)}{m^s}.$$

Jacquet–Shalika (1981) egy eredménye szerint a jobb oldali Dirichlet-sor abszolút konvergens a $\Re s > 1$ félsíkban. Az L-függvény kiegészíthető egy

$$L(\pi_\infty, s) = \prod_{j=1}^{n} \pi^{-\frac{s+\mu_j}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\mu_j}{2}\right)$$

alakú „archimédeszi Euler-faktorral”, amivel igaz a következő:

Automorf L-függvények (3/3)

Tétel (Go–Ja 1972, Ja–PS–Sh 1979 & 1981, Molteni 2002)

Legyen $\Lambda(\pi,s) := L(\pi_\infty,s)L(\pi,s)$ *és* $C(\pi,s) := c_\pi \prod_{j=1}^n |s+\mu_j|$.

1. $\Lambda(\pi,s)$ *holomorf a komplex síkon és korlátos minden függőleges sávban (kivéve hogy* $\pi = 1$ *esetén* $s = 0, 1$ *pólus).*
2. $c_\pi^{\frac{s}{2}} \Lambda(\pi,s) = \kappa_\pi\, c_\pi^{\frac{1-s}{2}}\, \overline{\Lambda}(\pi, 1-\overline{s})$, *ahol* κ_π *konstans* ($|\kappa_\pi| = 1$).
3. $\Re s = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad L(\pi,s) \ll_{\varepsilon,n} C(\pi,s)^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$.

Sejtés (nagy Riemann-sejtés és Lindelöf-sejtés)

1. $\Re s \neq \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \Lambda(\pi,s) \neq 0$.
2. $\Re s = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad L(\pi,s) \ll_{\varepsilon,n} C(\pi,s)^{\varepsilon}$.

Probléma (szubkonvexitás)

Találjunk egy csak n*-től függő* $\delta > 0$ *értéket úgy, hogy*

$$\Re s = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad L(\pi,s) \ll_{\delta,n} C(\pi,s)^{\frac{1}{4}-\delta}.$$

Új eredmények (1/4)

Legyen $\Re s = \frac{1}{2}$, és használjuk a $\mu_\pi := \max_j(1 + |\mu_j|)$ jelölést.

Probléma (szubkonvexitás a konduktor-aspektusban)

Találjunk $\delta, A, B > 0$ értékeket úgy, hogy sok π-re

$$L(\pi, s) \ll_{\delta,A,B} |s|^A \mu_\pi^B c_\pi^{\frac{1}{4}-\delta}.$$

Tétel (Blomer–Harcos 2008)

Legyen π a $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ csúcsos reprezentációja, amire $\omega = 1$.
Legyen $\psi : \mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}^\times \to \mathbb{C}^\times$ karakter, amire $\psi(\mathbb{R}^{>0}) = 1$. Ekkor

$$L(\pi \otimes \psi, s) \ll_\varepsilon (|s|\mu_\pi c_\pi c_\psi)^\varepsilon |s|^{\frac{1}{2}} \mu_\pi^3 c_\pi^{\frac{1}{2}} c_\psi^{\frac{3}{8}}.$$

Ha $c_\psi \geqslant (\mu_\pi c_\pi)^4$, akkor a c_π kitevője javítható $\frac{1}{4}$-re.

Bikovszkij (1996) hasonló eredményt bizonyított speciális π-re és a π-től való függés részletezése nélkül. A kitevők máig a legjobbak.

Új eredmények (2/4)

A továbbiakban $A > 0$ egy alkalmas abszolút konstanst jelöl.

Tétel (Blomer–Harcos–Michel 2007)

Legyen π *a* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ *csúcsos reprezentációja, amire* $\omega \neq 1$. *Ekkor*

$$L(\pi, s) \ll (|s|\mu_\pi)^A \, c_\pi^{\frac{1}{4} - \frac{1}{1889}}.$$

Duke–Friedlander–Iwaniec (2002) hasonló eredményt bizonyított, de csak a $c_\omega = c_\pi$ esetben és jóval gyengébb kitevővel.

Következmény

Legyen K *egy harmadfokú számtest, aminek diszkriminánsa* d_K. *Ekkor a* K *Dedekind* L*-függvényére fennáll*

$$\zeta_K(s) \ll |s|^A \, |d_K|^{\frac{1}{4} - \frac{1}{1889}}.$$

Ez a becslés fontos szerepet játszott Einsiedler–Lindenstrauss–Michel–Venkatesh (2011) mély munkájában, amely Duke (1988) neves eloszlási tételét általánosítja egy magasabb rangú esetre.

Új eredmények (3/4)

Tétel (Harcos–Michel 2006)

Legyen π *és* ρ *a* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ *csúcsos reprezentációja, amire* $\omega_\pi\omega_\rho \neq 1$*. Ekkor*

$$L(\pi \otimes \rho, s) \ll (|s|\mu_\pi\mu_\rho c_\rho)^A \, c_\pi^{\frac{1}{2}-\frac{1}{1413}}.$$

Megjegyzések

1. *A tételben szereplő* $\pi \otimes \rho$ *egy ún. Rankin–Selberg konvolúció, ami Ramakrishnan (2000) mély eredménye alapján a* $\mathrm{GL}_4(\mathbb{A})$ *automorf reprezentációja. Tipikusan (de nem mindig) a* $\mathrm{GL}_4(\mathbb{A})$ *egy speciális csúcsos reprezentációjáról van szó.*
2. *A korábbi eredmények (Kowalski–Michel–VanderKam 2002, Michel 2004) erős megszorítást tettek a* π*-re és a* ρ*-ra, ezért a fenti eredmény jelentősége az általánosságában rejlik.*
3. *A tételt eredetileg az* $\frac{1}{2} - \frac{1}{2648}$ *kitevővel igazoltuk, de az értekezésben javítottam a számoláson.*

Új eredmények (4/4)

Jelölje $d\mu(z)$ a hiperbolikus valószínűségi mértéket az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}$-n.
Jelölje $ds(z)$ a hiperbolikus ívhosszt az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}$-n.

Következmény (Zh 2001, Po 2006, Ha–Mi 2006, Bl–Ha–Mi 2007)

Legyen $g : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ kompakt tartójú sima függvény.
Legyen $H \leqslant H_d$ a $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ideálosztály-csoportjának részcsoportja.

1. *Ha $d < 0$, és z_0 egy d diszkriminánsú Heegner-pont, akkor*

$$\frac{\sum_{\sigma\in H} g(z_0^\sigma)}{\sum_{\sigma\in H} 1} = \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}} g(z)\, d\mu(z) + O_g\left([H_d : H]|d|^{-\frac{1}{2827}}\right).$$

2. *Ha $d > 0$, és G_0 egy d diszkriminánsú zárt geodetikus, akkor*

$$\frac{\sum_{\sigma\in H} \int_{G_0^\sigma} g(z)\, ds(z)}{\sum_{\sigma\in H} \int_{G_0^\sigma} 1\, ds(z)} = \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}} g(z)\, d\mu(z) + O_g\left([H_d : H]|d|^{-\frac{1}{2827}}\right).$$

Köszönöm a sok segítséget!