MI IS ... EGY MAASS-FORMA?

HARCOS GERGELY

A Maass-formák – vagy általánosabban az automorf formák – harmonikus hullámok, amelyek speciális szimmetriákkal rendelkeznek. A hullámok hagyományosan a fizikusokat érdeklik, de mivel a szóban forgó szimmetriák az egész számokból származnak, ezért a Maass-formákat elsősorban a számelmészek kutatják. Kevésbé nyilvánvaló, hogy a Maass-formák nagyon hasznosak az egész számok megértésében, de a matematika egyéb területein is, pl. a matematikai fizikában. A segítségükkel mély összefüggéseket sikerült feltárni és nehéz kérdéseket sikerült megválaszolni. A matematika több híres megoldatlan problémája – pl. a Ramanujan–Selberg-sejtés, a Langlands-program, vagy az általános Riemann-sejtés – hozható kapcsolatba a Maass-formákkal.

A Maass-formákat Hans Maass fedezte fel 1946-ban meglehetősen indirekt módon, számelméleti L-függvényeken keresztül. A legegyszerűbb L-függvény a Riemann-féle zeta-függvény, amit az 1-nél nagyobb valós részű komplex számokon a

$$\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prím}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

Dirichlet-sor, illetve Euler-szorzat definiál. A klasszikus gamma-függvénnyel kiegészített

$$Z(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

teljes zeta-függvény holomorfan kiterjed a $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ pontozott komplex számsíkra, ahol kielégíti a $Z(s) = Z(1-s)$ függvényegyenletet. Ennek a függvénynek a segítségével jól becsülhető a prímek száma egy adott korlátig, és az ilyen irányú vizsgálatok vezethették Riemannt a híres sejtésének megfogalmazásához: ha $Z(s) = 0$, akkor s valós része $1/2$. Az általánosabb, ún. d-ed fokú L-függvények Dirichlet-sorában az együtthatókat nem a konstans 1 függvény adja meg, hanem egy általánosabb multiplikatív függvény; az Euler-szorzatban a p prímhez nem az $1-p^{-s}$ tényező tartozik, hanem a p^{-s} egy legfeljebb d-ed fokú polinomja (amelyben az együtthatók csak a p-től függnek és a konstans tag mindig 1); a teljes L-függvényben szereplő extra tényező pedig nem a $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$, hanem ennek d darab eltolt példánya. A függvényegyenlet az $N^{s/2}Z(s) = \kappa N^{(1-s)/2}\overline{Z(1-\overline{s})}$ alakot ölti, ahol $|\kappa| = 1$ és N egy pozitív egész (aminek prímosztóihoz tartoznak a d-nél kisebb fokú Euler-tényezők). Persze csak nagyon speciális multiplikatív függvény Dirichlet-sora rendelkezhet ilyen szép tulajdonságokkal, és ma már úgy gondoljuk, hogy minden ilyen függvény automorf eredetű.

A prímszámok finomabb eloszlása motiválja az általánosabb L-függvények bevezetését. Pl. ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy adott korlátig hány prímszám ad 1, illetve 3 maradékot 4-gyel osztva, akkor a $\zeta(s)$ mellett azt a Dirichlet-sort célszerű vizsgálni, amelyben az együtthatók 4-esével ismétlődve rendre az $1,0,-1,0$ értékek (mindkét L-függvény foka $d=1$). Ily módon kiderül, hogy a kétféle maradék nagyjából egyenletesen oszlik el a prímek között. Továbbmenve, az 1 maradékot adó prímszámok egyértelműen előállnak két négyzetszám összegeként, és ha arra vagyunk kíváncsiak, a két négyzetszám hányadosa az esetek hányad részében esik mondjuk 0.89 és 1.07 közé, akkor a $\mathbb{Q}(i)$ komplex másodfokú számtest bizonyos Hecke L-függvényeit célszerű vizsgálni (amelyek foka $d=2$). Ez utóbbi L-függvényeket Hecke 1936-ban az akkoriban már jól ismert moduláris formákhoz tudta kapcsolni: megmutatta, hogy a Dirichlet-együtthatók megegyeznek egy alkalmas moduláris forma Hecke-sajátértékeivel. Maass 10 évvel később felismerte, hogy hasonló leírás létezik a valós másodfokú számtestek – mint pl. a $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ – Hecke L-függvényeire is, csak az ő esetükben moduláris formák helyett Maass-formákat kell tekinteni.

Mi is tehát egy Maass-forma? A Bolyai-féle hiperbolikus síkgeometria egyik ismert modellje a komplex számsík valós tengely feletti félsíkja. Ebben a modellben az egyenesek a valós tengelyt merőlegesen metsző egyenesek és félkörök. Az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ csoport minden eleme meghatároz egy irányítástartó egybevágóságot az alábbi törtlineáris hatással:

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Valójában minden irányítástartó egybevágóságot megkapunk így. Tekintsük most az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ egy aritmetikus részcsoportját, példának okáért az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-t. Maass-formán (pontosabban 1 szintű és 0 súlyú Maass-formán) a $\mathscr{H}$ felső félsík olyan korlátos (de nem konstans) függvényét értjük, ami invariáns az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ hatására nézve, továbbá sajátfüggvénye a

$$\Delta f = -y^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

pozitív hiperbolikus Laplace-operátornak, tehát kielégíti a $\Delta f = \lambda f$ parciális differenciálegyenletet valamilyen $\lambda > 0$ konstanssal. Más szóval a Maass-forma az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathscr{H}$ hiperbolikus felület korlátos (de nem konstans) Laplace-sajátfüggvénye. Persze cseppet sem világos, hogy ilyen egyáltalán létezik – a Maass által konkrétan megtalált formák csak az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ egy véges indexű kongruencia-részcsoportjára voltak invariánsak. Mindenesetre Selberg a róla elnevezett nyomformulával 1956-ban belátta, hogy az általunk tekintett Maass-formák bőségesen léteznek, és az $L^2(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathscr{H})$ Hilbert-tér egy jelentős részét, az ún. csúcsos alterét feszítik ki. A Maass-formák Laplace-sajátértékei véges multiplicitásúak: sorba rendezve őket átlagosan 12 távolságra fekszenek egymástól, és a sorozat első 5 tagja 5 tizedesjegyre kerekítve

$$\lambda \approx 91.14135,\ 148.43213,\ 190.13155,\ 206.41680,\ 260.68741.$$

Selberg azt is megmutatta, hogy a csúcsos altér ortogonális kiegészítőjének minden eleme előáll Eisenstein-sorok folytonos lineáris kombinációjaként: az Eisenstein-sorok $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-invariánsak és Laplace-sajátfüggvények, de nem korlátosak.

A képet finomítják a Hecke-operátorok, amelyek a Laplace-operátor számelméleti megfelelői. Ezek bevezetéséhez rendeljük minden $z \in \mathscr{H}$ ponthoz a $\mathbb{Z} + z\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ rácsot. Könnyen meggondolható, hogy $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-ekvivalens pontokhoz tartozó rácsok forgatva nyújtással egymásba vihetők: valójában az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathscr{H}$ pontjai bijekcióban állnak a $\mathbb{C}$-beli rácsokkal forgatva nyújtás erejéig. Tehát egy Maass-formára tekinthetünk úgy is, mint a $\mathbb{C}$-beli rácsok halmazán értelmezett speciális függvényre. Ha most n egy pozitív egész, akkor minden $\mathbb{C}$-beli rácsnak van $\sum_{d|n} d$ darab n indexű részrácsa, amik felett átlagolhatjuk a Maass-formát. Ez az átlagolás az n-hez tartozó Hecke-operátor, ami egy konvencionális normálással a felső félsík $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-invariáns függvényeire a következő alakot ölti:

$$T_n f(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{ad=n} \sum_{1\leqslant b\leqslant d} f\left(\frac{az+b}{d}\right).$$

Ehhez a családhoz hozzávesszük még a T_{-1} kiegészítő Hecke-operátort is, amely az $f(z)$ függvényhez az $f(-\bar{z})$ függvényt rendeli. A Hecke-operátorok az $L^2(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathscr{H})$ önadjungált operátorai, amelyek a hiperbolikus Laplace-operátorral és egymással is felcserélhetők. Ez azt jelenti (egy jól ismert lineáris algebrai tétel szerint), hogy a csúcsos altérnek van olyan Maass-formákból álló bázisa, amelyek az összes Hecke-operátornak sajátfüggvényei. Ha f egy ilyen Hecke–Maass-forma, amire $T_n f = \lambda(n) f$, akkor az f-hez társított másodfokú L-függvény az 1-nél nagyobb valós részű komplex számokon

$$L(s,f) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ prím}} \left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}.$$

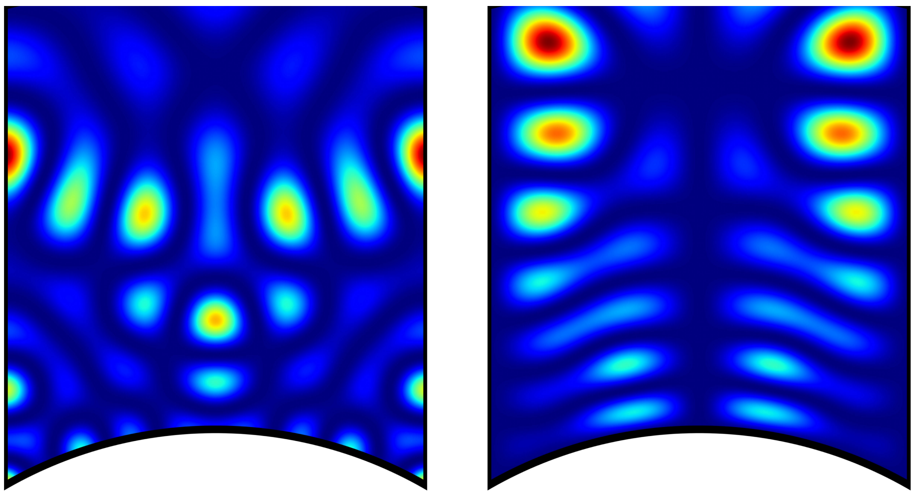
Továbbá, ha $\Delta f = (1/4+t^2)f$ és $T_{-1}f = f$ (a $T_{-1}f = -f$ eset hasonló), akkor a teljes L-függvény

$$\Lambda(s,f) = \pi^{-s}\Gamma\left(\frac{s+it}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-it}{2}\right)L(s,f),$$

ami kiterjed holomorf egészfüggvénnyé és kielégíti a $\Lambda(s,f) = \Lambda(1-s,f)$ függvényegyenletet. Tehát $L(s,f)$ és $\Lambda(s,f)$ nagyon hasonlít a Riemann-zetából származtatott $\zeta(s+it)\zeta(s-it)$ és $Z(s+it)Z(s-it)$ szorzatokra. Valójában $\zeta(s+it)\zeta(s-it)$ nem más, mint az $1/4+t^2$ Laplace-sajátértékű Eisenstein-sorhoz a fenti módon társított L-függvény!

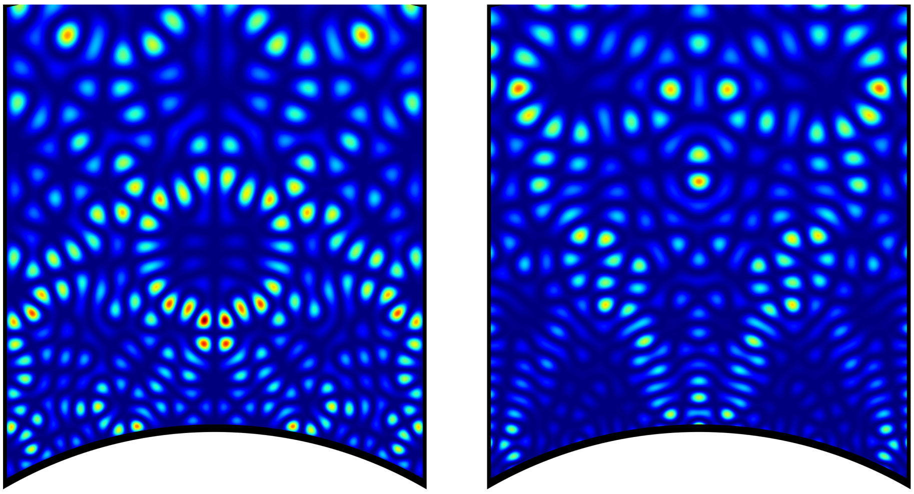
Amennyire tudjuk, az $L(s,f)$ Dirichlet-sorának együtthatói – tehát a Hecke-operátorok sajátértékei az f Maass-formán – transzcendens számok (ellentétben a korábban felfedezett L-függvényekkel), de a Riemann-sejtés itt is igaznak tűnik: ha $\Lambda(s,f) = 0$, akkor s valós része $1/2$. Jó okunk van tehát feltételezni, hogy a Riemann-sejtés maga is automorf természetű. Annyit már most bizonyosan tudunk, hogy az automorf L-függvényeket együttesen, családokban tudjuk hatékonyan vizsgálni, felhasználva azok közös eredetét.

Végezetül nézzünk meg néhány Maass-formát „a valóságban”. Az alábbi ábrákat[1] Fredrik Strömberg készítette, és az ő engedélyével közöljük. Mindegyik ábrán egy Maass-forma abszolút értékének eloszlása látható a $\{z \in \mathscr{H} : |\operatorname{Re} z| \leqslant 1/2, |z| \geqslant 1\}$ halmazra megszorítva (pontosabban annak az $\operatorname{Im} z \leqslant 2$ feltétellel megadott kompakt részére), ami az $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-re nézve egy fundamentális tartomány. A Maass-formák valós értékűek, mert a T_{-1} operátornak sajátfüggvényei, és ugyanez okozza az ábrák bal-jobb szimmetriáját. Mint egy hőtérképen, a sötétkék szín jelzi a kis értékeket, a vörös pedig a nagyokat.

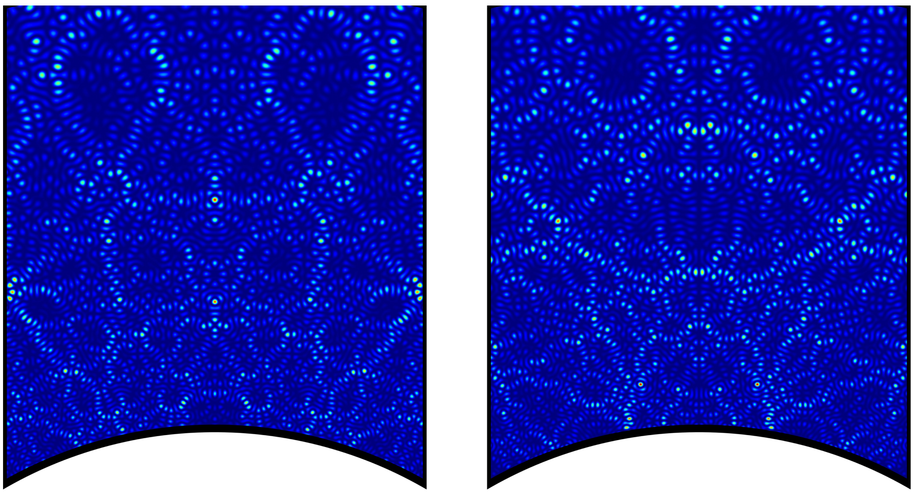


Hecke–Maass-formák $\lambda \approx 10^3$ Laplace-sajátértékekkel (Fredrik Strömberg)

[1] lásd a következő oldalt is



Hecke–Maass-formák $\lambda \approx 10^4$ Laplace-sajátértékekkel (Fredrik Strömberg)



Hecke–Maass-formák $\lambda \approx 10^5$ Laplace-sajátértékekkel (Fredrik Strömberg)

MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, 1053 Budapest, Reáltanoda u. 13-15.
E-mail address: `gharcos@renyi.hu`

Közép-európai Egyetem, 1051 Budapest, Nádor u. 9.
E-mail address: `harcosg@ceu.hu`