A számítástudomány alapjai

8. és 9. gyakorlat, 2013. október 31 illetve november 4, 7, 11.

Folyamok, többszörös összefüggőség, Menger tételek, páros gráfok

Egy G gráfot *k-szorosan (pont)összefüggőnek* nevezünk, ha legalább $k+1$ pontja van, és akárhogy hagyunk el belőle k-nál kevesebb pontot, a maradék gráf összefüggő marad. A legnagyobb olyan k számot, amelyre még a G gráf k-szorosan összefüggő, $\kappa(G)$-vel jelöljük.

Egy G gráfot *k-szorosan élösszefüggőnek* nevezünk, ha akárhogy hagyunk el belőle k-nál kevesebb élet, a maradék gráf összefüggő marad. A legnagyobb olyan k számot, amelyre még a G gráf k-szorosan élösszefüggő, $\lambda(G)$-vel jelöljük.

$G(A, B, E)$ páros gráf, ha A és B a csúcsok halmaza, E az élek halmaza, és minden él A és B között fut. Legyen G egy tetszőleges gráf.
Egy $e_1, e_2, \ldots, e_k$ élhalmaz **független**, vagy **párosítás**, ha nincs közös végpontjuk.
Egy élhalmaz **lefogó**, ha G minden pontja az élhalmaz valamelyik élének egyik végpontja.
Egy ponthalmaz **független**, ha nincs köztük él.
Egy ponthalmaz **lefogó**, ha G minden élének legalább az egyik végpontját tartalmazza.

$\alpha(G)$: független pontok maximális száma;
$\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma;
$\nu(G)$: független élek maximális száma;
$\rho(G)$: lefogó élek minimális száma.

Tetszőleges X csúcshalmazra legyen $N(X)$ X szomszédainak a halmaza, vagyis azon csúcsok halmaza, amelyek legalább egy X–beli csúccsal össze vannak kötve.

Legyen most $G = G(A, B, E)$ páros gráf, vagyis A és B a csúcsok halmaza, E az élek halmaza, és minden él A és B között fut.

Frobenius tétel: Akkor és csak akkor van a $G(A, B, E)$ páros gráfban teljes (minden csúcsot párosító) párosítás, ha $|A| = |B|$, és minden $X \subset A$–ra $|X| \leq |N(X)|$.

Hall tétel: Akkor és csak akkor van a $G(A, B, E)$ páros gráfban A–t lefedő párosítás, ha minden $X \subset A$–ra $|X| \leq |N(X)|$.

König tétel: (a) Ha G páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$.
(b) Ha G páros és nincs izolált pontja, akkor $\alpha(G) = \rho(G)$.

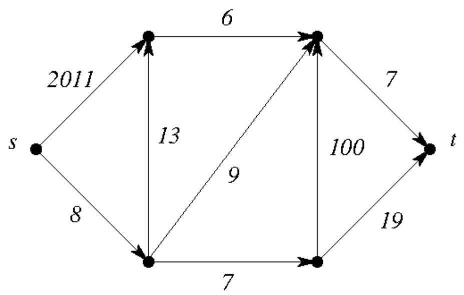
Gallai tétel: (a) Ha G–ben nincs hurokél (de nem feltétlenül páros gráf) akkor $\tau(G) + \alpha(G) = n$ ahol n G csúcsainak a száma.
(b) Ha G–ben nincs izolált pont (de nem feltétlenül páros gráf) akkor $\nu(G) + \rho(G) = n$ ahol n G csúcsainak a száma.

1. A G hálózatban a maximális folyam nagysága 2011. Most vonjunk le minden él kapacitásából 10–et. A kapott G' hálózatban a maximális folyam nagysága 1956. Bizonyítsuk be, hogy G–ben van olyan él amelynek a kapacitása legalább 400.

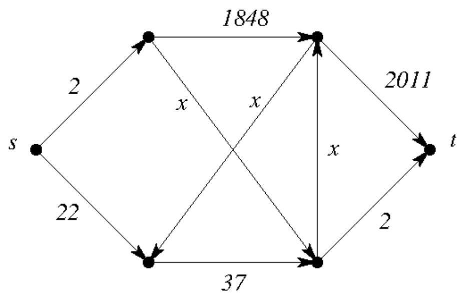
2. a. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi hálózatban a maximális folyam nagysága 14.

   b. El lehet érni egyetlen él kapacitásának a megváltoztatásával, hogy a maximális folyam nagysága 13 legyen? (Ha igen, hogyan? Ha nem, miért nem?)

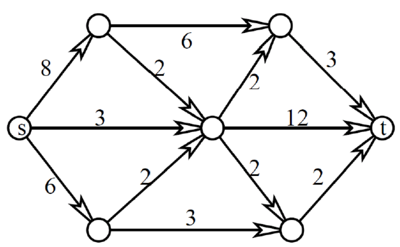
   c. El lehet érni egyetlen él kapacitásának a megváltoztatásával, hogy a maximális folyam nagysága 15 legyen? (Ha igen, hogyan? Ha nem, miért nem?)

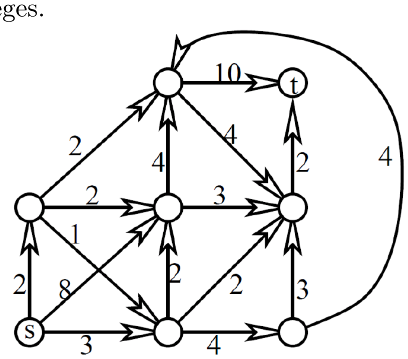


3. Határozzuk meg az összes olyan x számot, amelyre az alábbi hálózatban a maximális folyam értéke 24.



4. Adjunk meg egy-egy maximális folyamot az alábbi hálózatokban, és bizonyítsuk be, hogy nagyobb folyam nem lehetséges.





5. Irányítsuk a kocka élhálózatának éleit az s csúcsból az átellenes t csúcs felé. Hogyan kell a kiosztani a 12 él közt 4 db 1-es, 2-es ill. 3-as kapacitást, hogy a kapott hálózatban a maximális folyamnagyság a lehető legnagyobb legyen?

6. Egy (G, s, t, c) hálózatban minden él piros, fehér, vagy zöld. Ha csak a piros és fehér, vagy csak a piros és zöld, vagy csak a fehér és zöld éleket tekintjük, akkor a kapott hálózatokban a maximális folyam nagysága 10. Bizonyítsuk be, hogy a teljes hálózatban a maximális folyam nagysága legalább 15.

7. Mutassunk példát olyan véges, egyszerű G gráfra, amire $\lambda(G) \neq \kappa(G)$. Lehet-e a két összefüggőség közül a nagyobbikat a kisebbiknek egy alkalmas függvényével felülről becsülni?

8. Melyik az a legnagyobb k szám, amelyre a $K_{n,n}$ teljes páros gráf k-szorosan pontösszefüggő?

9. Bizonyítsuk be, hogy egy k-szorosan összefüggő gráfnak legalább $kn/2$ éle van!

10. Igazoljuk, hogy ha egy n pontú egyszerű G gráfban minden fokszám legalább $(n + k - 2)/2$, akkor G k-szorosan összefüggő!

11. Igazoljuk, hogy tetszőleges r-reguláris $(r > 1)$ egyszerű összefüggő páros gráf 2-összefüggő is!

12. Tegyük fel, hogy G 3-összefüggő, vegyünk fel egy új x pontot, amit G három különböző pontjával összekötünk. Bizonyítsuk be, hogy a kapott gráf 3-összefüggő marad!

13. Legyen G az a gráf, mely egy 8 hosszú körből úgy keletkezik, hogy a körön átellenes csúcsokat egy-egy éllel összekötjük. Igazoljuk, hogy G háromszorosan pontösszefüggő, de négyszeresen már nem.

14. Bizonyítsuk be, hogy ha a G irányított gráfban van u-ból v-be is és v-ből w-be is k éldiszjunkt irányított út akkor G-ben létezik u-ból w-be is k éldiszjunkt irányított út.

15. Igazoljuk, hogy ha az azonos ponthalmazon megadott G_1 és G_2 gráfok élhalmaza diszjunkt, akkor $\lambda(G_1 + G_2) \geq \lambda(G_1) + \lambda(G_1)$. Igaz-e, hogy ekkor $\kappa(G_1 + G_2) \geq \kappa(G_1) + \kappa(G_1)$ is teljesül? ($G_1 + G_2$ azt a gráfot jelenti, aminek csúcshalmaza a két gráf közös csúcshalmaza, éleit pedig a két élhalmaz uniója adja.)

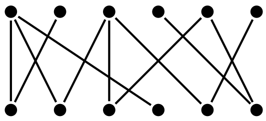
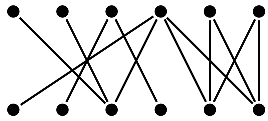
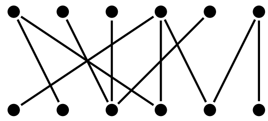
16. Legyenek A, B, C páronként diszjunkt, r-elemű halmazok. A $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza legyen $V = A \cup B \cup C$, és legyen $uv \in E$, ha u és v nem ugyanabból az r-elemű halmazból valók. Mekkora az a legnagyobb k érték, melyre G k-összefüggő?

17. Adjunk hatékony algoritmust egy tetszőleges irányítatlan gráf pontösszefüggőségének meghatározására.

18. A 10-csúcsú teljes gráfnak legfeljebb hány élét lehet elhagyni úgy, hogy a maradék gráf 4-élösszefüggő legyen?

19. Tegyük fel, hogy a G gráf a rögzített x és y pontokat összekötő pontidegen utak maximális száma 5. Lehet-e az x és y pontokat összekötő utakat lefogó élek minimális száma 1, 2, 3, 4, 5, 6, vagy 7?

20. Határozzuk meg a maximális párosítás méretét az alábbi gráfokban.

21. Adott n fiú és n lány úgy, hogy minden fiúnak legfeljebb 1 rokona van a lányok között, és bármely lányhoz van olyan fiú, aki nem rokona. Bizonyítsuk be, hogy a fiúk és a lányok párokba rendezhetők úgy, hogy rokonok nem alkotnak párt.

22. Bizonyítsuk be, hogy ha a G páros gráf összefüggő és az A osztályában a fokszámok különbözők, akkor G-nek van A-t fedő párosítása.

23. A G irányított gráf minden csúcsából k él indul és k él érkezik. Igaz-e, hogy G-nek kiválaszthatók pontdiszjunkt irányított körei, melyek G minden csúcsán áthaladnak?

24. Igazoljuk, hogy minden reguláris páros gráfnak van teljes párosítása.

25. Legyen G egy olyan egyszerű gráf, amelynek 1000 csúcsa van és minden csúcs fokszáma legalább 6. Igazoljuk, hogy $\nu(G) \geq 6$. ($\nu(G)$ a független élek maximális számát jelöli.)

26. Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris, páros gráfban a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa.

27. Bizonyítsuk be, hogy minden véges G gráfra $2\nu(G) \geq \tau(G)$ teljesül. Mutassunk olyan gráfot, melyre egyenlőség áll.

28. Egy táncmulatságon 25 lány és 25 fiú van jelen. E társaságban minden lány ismeretségben van legalább 13 fiúval és minden fiú legalább 13 lánnyal. Bizonyítsuk be, hogy páros táncra perdülhetnek egyszerre mind az 50-en úgy, hogy az egymással táncolók ismerik egymást!