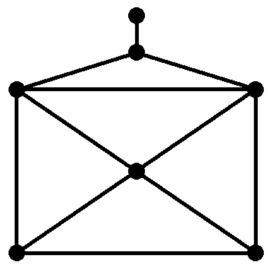
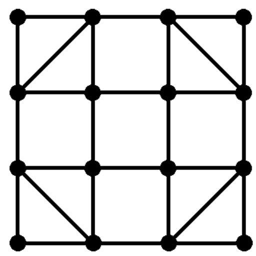
A számítástudomány alapjai

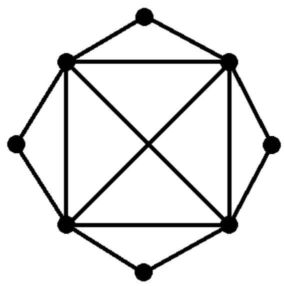
6. gyakorlat, 2013. október 17 illetve 21.

Euler és Hamilton kör, út, Dijkstra és Bellmann-Ford algoritmusok

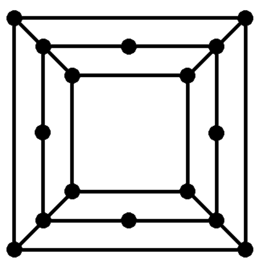
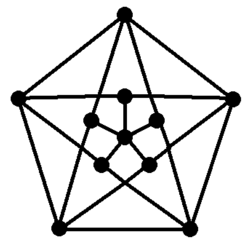
1. Elkészíthetők-e a ceruza felemelése nélkül az alábbi ábrák úgy, hogy minden vonalon pontosan egyszer haladunk végig?

2. Hányszor kell minimálisan felemelni a ceruzát az alábbi gráf lerajzolása során?



3. Van-e a következő gráfokban Hamilton-út, illetve -kör?

4. Egy egyszerű G gráf csúcsait az $1, 2, 3, \ldots, 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él G-ben, ha $|i - j| \leq 2$.
   (a) Tartalmaz-e G Euler-utat, illetve -kört?
   (b) Tartalmaz-e G Hamilton-utat, illetve -kört?

5. Egy hotelbe egy 100 fős társaság érkezik, akik közül kezdetben bármely két ember jóban van egymással. Esténként egyetlen nagy kerek asztal körül ül le mindneki. Sajnos egy vacsora alkalmával az egymás mellé került

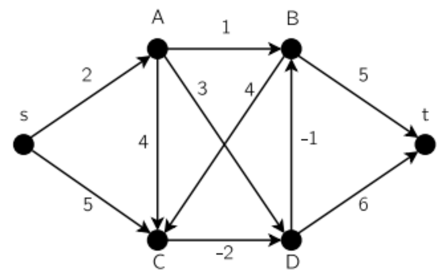
emberek örökre összevesznek egymással. A társaság minden vacsora előtt úgy ül le, hogy mindenki jóban legyen mindkét szomszédjával. Ha ez már lehetetlenné válik, akkor az összes résztvevő még aznap este hazamegy. Bizonyítsuk be, hogy legalább 25 éjszakát a hotelben tölt a társaság!

6. Adott G gráf a következő éllistával (zárójelben a költségek): $\mathbf{A} \to B(-3), D(1)$; $\mathbf{B} \to C(4), D(2)$; $\mathbf{C} \to D(1), E(-2)$; $\mathbf{D} \to E(3)$. Határozzuk meg a legrövidebb út hosszát az A pontból a többi pontba.

   Kereshetjük-e A-ból a legrövidebb utat Dijkstra algoritmusával?

7. Adott G gráf a következő éllistával (zárójelben a költségek): $\mathbf{S} \to A(4), D(3)$; $\mathbf{A} \to B(1)$; $\mathbf{B} \to C(4)$; $\mathbf{D} \to A(2), B(3), C(5)$. Határozzuk meg a legrövidebb út hosszát S pontból a többi pontba Dijkstra algoritmusával!

8. Adott az alábbi G gráf. Határozzuk meg a legrövidebb út hosszát az s pontból a többi pontba a Bellmann – Ford algoritmussal!



9. Legyenek a G_n gráf pontjai az n hosszú $(0,1)$ sorozatok. Két pont akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól (pl. az $n = 4$ esetben $(0,0,0,1)$ és $(0,1,0,1)$ szomszédosak). Van-e a G_n gráfnak Euler-köre?

10. Mutassuk meg, hogy ha a G gráfnak van Euler-köre, akkor G csúcsainak bármely részhalmazából páros sok él indul a komplementerébe.

11. Melyek azok a gráfok amikben pontosan egy Euler-kör van? (Tehát egy él szomszédai az Euler-körön mindig ugyanazok.)

12. Az alábbi állítások közül melyik igaz?
    (a) Ha G egy körének éleit törölve a maradék G' gráfnak van Euler-köre, akkor G-nek is van.
    (b) Ha G összefüggő és egy körének éleit törölve a maradék G' gráfnak van Euler-köre, akkor G-nek is van.
    (c) Ha G-ben van Euler-kör és G valamely körének éleit töröljük, akkor a maradék G' gráfban is van.
    (d) Ha G összefüggő és egy körének éleit törölve a maradék G' gráfban van Euler-út, akkor G-ben is van.

13. Legalább hány éle van egy olyan hatpontú gráfnak, amelynek van Hamilton-köre?

14. Legfeljebb hány éle van egy olyan hatpontú gráfnak, amelynek nincs Hamilton-köre?

15. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű gráfnak n csúcsa és $\binom{n-1}{2}+1$ éle van, akkor még nem biztos, hogy tartalmaz Hamilton-kört, de ha ennél 1 éllel több, akkor már biztosan lesz benne!

16. (a) Bejárható-e a 4×4-es sakktábla egy huszárral úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk? (A huszár mindig egy 3×2-es téglalap egyik mezőjéről az átellenes mezőre lép.) Mi a válasz (b) valódi sakktábla (8×8-as), (c) 3×5-ös, (d) 3×6-os sakktábla esetén?