A számítástudomány alapjai

5. gyakorlat, 2013. október 14.

Ismétlés

1. A $2^k - 1$ elemű A tömb elemei mind különbözőek és növekvő sorrendben vannak. Minden elemet egy k hosszú bitsorozat ír le, tehát tekinthetjük úgy, hogy a $0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1$ számokat tároljuk egy kivételével. A feladat ennek a hiányzó számnak a megkeresése. Ehhez egy lépésben valamelyik elem egy bitjére kérdezhetünk rá: a $BIT(i, j)$ eljárás az $A[i]$ elem j-edik bitjét mondja meg. Adjon olyan algoritmust, amely a BIT eljárás $c \cdot k$-szori hívásával megtalálja a hiányzó számot (bitsorozatot). (Vizsga: 2004. június 3.)

2. A valós számokból álló $a_1, \ldots, a_n$ sorozat olyan, hogy az $a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2$ sorozat egy darabig nő, utána csökken. Adjon $c \cdot n$ összehasonlítást használó algoritmust, ami rendezi az $a_1, \ldots, a_n$ sorozatot. (ZH 2007. ápr. 27.)

3. Adott a számegyenesen n intervallum, $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$. Azt akarjuk tudni, hogy együtt milyen hosszú részt fednek le a számegyenesből (azaz, hogy mennyi az $\cup_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ összhossza). Adjon $c \cdot (n \log n)$ lépéses algoritmust ennek a hossznak a meghatározására! (Vizsga: 2009. június 11.)

4. Legyen adott egy egészekből álló $A[1:n]$ tömb valamint egy b egész szám. Szeretnénk hatékonyan eldönteni, hogy van-e két olyan $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ index, melyekre (a) $A[i]+A[j] = b$, (b) $A[i]-A[j] = b$. Oldjuk meg ezeket a feladatokat $c \cdot (n \log n)$ időben!

5. Az $A[1:n]$ tömbben levő elemek mind különbözőek. Keressük meg a száz legnagyobbat összesen $1.1n$ összehasonlítással. (Tegyük fel, hogy n elég nagy.)

6. Az $A[1:n]$ tömbben egy rendezett univerzum n különböző eleme volt, eredetileg nagyság szerint növekvő sorrendben. Valaki időközben megkeverte a tömb elemeit, de csak annyira, hogy minden egyes elem új helye az eredetitől legfeljebb 5 távolságra esik. Adjunk $c \cdot n$ idejű algoritmust az eredeti állapot helyreállítására!

7. 70 tolmács közül bármely kettőre igaz, hogy mindketten ismernek olyan nyelvet, amit a másik nem. Összesen legalább hány nyelvet beszélnek? (*)

8. A 300 fős évfolyamból néhány embernek (legalább egynek) el kell menni az előadásra, néhánynak (legalább egynek) az évnyitóra, néhánynak (legalább egynek) meg a kocsmába, de ezek egyszerre vannak, hányféleképpen tehetik ezt meg?

9. 10 rabló egy rengeteg lakattal lezárható ládába gyűjti a rabolt kincset. Úgy szeretnék a ládát lelakatolni, és kiosztani a kulcsokat (egy lakathoz többen is kaphatnak kulcsot), hogy bármely 4 rabló ki tudja nyitni a ládát, de ez semelyik 3 rablónak ne sikerülhessen. Legalább hány különböző lakatot kell „venniük" a vasboltban, hogy ezt megtehessék? (*)

10. Legyenek az G teljes gráf csúcsai a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pontok, és legyen a v_iv_j él súlya $\max(i, j)$. Határozzuk meg a G gráf minimális súlyú feszítőfáinak számát.

11. Bizonyítsuk be, hogy az élsúlyozott G gráf $e = uv$ élére pontosan akkor igaz, hogy e a G minden minimális súlyú feszítőfájának éle, ha $V(G)$ felbontható két diszjunkt ponthalmaz uniójára úgy, hogy u és v különböző halmazokban legyenek, továbbá a két ponthalmaz között e az egyedüli legkisebb súlyú él.

12. Tegyük fel, hogy egy súlyozott élű gráfban pontosan két minimális súlyú feszítőfa van. Bizonyítsuk be, hogy ekkor ezek csak egy élben térnek el egymástól.