

A számítástudomány alapjai

4. gyakorlat, 2013. október 2. 15¹⁵, IB138

Az október 10-i gyakorlat a QPA miatt elmarad, az 1. ZH október 17-én lesz. Október 16-án, **szerdán 16-tól 18-ig** pótgyakorlat és **konzultáció** lesz az **IB 147**-ben.

Tudnivalók

Def: $G = (V, E)$ egyszerű gráf, ha (1) $V \neq \emptyset$ és (2) $E \subseteq \binom{V}{2} := \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$ G gráf esetén $V(G)$ jelöli G csúcsainak (pontjainak), $E(G)$ pedig G éleinek halmazát, azaz $G = (V(G), E(G))$. A G egyszerű gráf véges, ha V véges halmaz.

A G gráf egy *diagramja* egy olyan lerajzolása, melyben a csúcsoknak (síkbeli) pontok felelnek meg, éleknek pedig a két végpontot összekötő önmagukat nem metsző görbék.

Az $e = \{u, v\}$ élt röviden $e = uv$ -vel jelöljük; u és v az e él végpontjai. u és v szomszédos, ha $uv \in E$. e és f párhuzamos élek, ha végpontjaik azonosak. Hurokél az olyan él, melynek végpontjai azonosak.

A $G = (V, E)$ pár gráf, ha $V \neq \emptyset$, E élhalmaz V -n, és párhuzamos és hurokél is megengedett.

A G gráf v csúcsának $d(v)$ foka a v végpontú élek száma (hurokél kétszer számít):

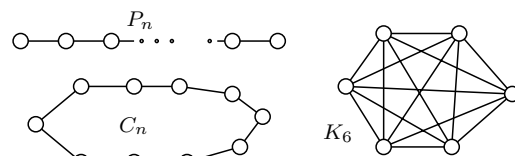
$$d(v) := |\{e \in E : v \text{ végpontja } e\text{-nek}\}| + |\{e \in E : e \text{ hurokél } v\text{-n}\}|$$

A G (r -)reguláris, ha csúcsainak ugyanannyi (mégpedig r) a foka.

Áll.: Ha G véges gráf, akkor fokszámainak összege $2|E(G)|$.

K_n az n -pontú teljes gráf: bármely két pontja össze van kötve.

P_n az n -pontú út, C_n az n -pontú kör (ld. az ábrán)



A G egyszerű gráf komplementere a $\bar{G} := (V(G), \binom{V}{2} \setminus E(G))$ gráf. (Két pont pontosan akkor szomszédos, ha G -ben nem szomszédos.)

A G_1 és G_2 gráfok izomorfak ($G_1 \cong G_2$), ha léteznek $\phi_V : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ és $\phi_E : E(G_1) \rightarrow E(G_2)$ bijekciók, melyekre $uv \in E(G) \iff \phi_V(u)\phi_V(v) = \phi_E(uv)$. (Tkp. kölcs. egyért. megfelelés a pontok között, melyre tetsz. u és v annyiszor van összekötve G_1 -ben, mint a megfelelőik G_2 -ben.)

Tétel: Gráfok izomorfája ekvivalenciareláció: tetszőleges G_1, G_2, G_3 gráfokra (1) $G_1 \cong G_1$, (2) $G_1 \cong G_2 \Rightarrow G_2 \cong G_1$ és (3) $G_1 \cong G_2 \cong G_3 \Rightarrow G_1 \cong G_3$.

A G gráf sétája olyan $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k)$ sorozat, melyre $e_i \in E(G)$ és $e_i = v_i v_{i+1}$ ($\forall i$).

A körséta olyan séta, melynek kiinduló és végpontja azonos: $v_1 = v_k$.

Def: Az út (ill. kör) olyan (kör)séta, aminek csúcsai (a végpontok azonosságától eltekintve) különbözők. Egyszerű gráfban az út (kör) azonosítható a hozzá tartozó pont- vagy élsorozattal.

Állítás: A G gráfban pontosan akkor létezik u és v között séta, ha létezik u és v között út.

Def: A G gráf összefüggő (öf), ha bármely két pontja között vezet séta.

Def: $K \subseteq V(G)$ a G gráf komponense, ha bármely $u, v \in K$ között létezik G -séta, de nem létezik $u - v$ séta ha $u \in K, v \in V(G) \setminus K$. **Köv.:** Minden gráf egyértelműen komponensekre bontható.

Def: A G gráf szomszédossági mátrixa az a $B(G)$ mátrix, melynek sorai és oszlopai G csúcsainak felelnek meg, és a mátrix u -hoz tartozó sorának és v -hez tartozó oszlopának metszetében a G gráf uv éleinek száma áll (a hurokélek kétszer számítanak).

A G gráf éllistával történő megadásakor G minden v csúcsához nyilvántartunk egy-egy láncolt listát, amelyben a v csúcs szomszédait soroljuk fel.

A szomszédossági tömb az éllistas megadás rokona: az éllistas megadásban szereplő láncolt listákat összefűzzük, és egy $S[1..2m]$ tömbben felsoroljuk, ahol m a G élszáma. Ezen kívül egy $G[1..n]$ tömbben $G[i]$ tárolja az S tömbnek azt az indexét, ahonnan a v_i csúcs szomszédainak felsorolása kezdődik ($V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$). A v_i szomszédai tehát a $v_{S[G[i]]}, v_{S[G[i]+1]}, \dots, v_{S[G[i+1]-1]}$ csúcsok.

A láncolt szomszédossági lista az éllistas megadás egy másik tömbös „közelítése”. Az $S[1..2m]$ tömb minden eleme egy (csúcs, index) pár, míg a $G[1..n]$ tömbben $G[i]$ ben tároljuk az S tömbnek azt a pozícióját, ahol v_i szomszédainak felsorolása kezdődik. Ha tehát $S[G[i]] = (j, k)$, akkor $v(i)$ „első” szomszédja v_j és a második szomszédot az $S[k]$ pár első tagja adja meg, a pár második eleme mutatóként működik. Ha a pár második eleme NULL, akkor a v_i listája véget ért.

Def: A G gráf fa, ha G véges, összefüggő, körmentes és egyszerű.

Állítás: Ha az F fának n csúcsa van, akkor éleinek száma $|E(F)| = n - 1$.

Állítás: A véges, egyszerű G gráf pontosan akkor fa, ha az alábbiak közül legalább 2 teljesül:

- (1) G összefüggő
- (2) G körmentes
- (3) G -nek eggyel kevesebb éle van, mint ahány pontja.

Cayley tétele: Az $\{1, 2, \dots, n\}$ ponthalmazon n^{n-2} különböző fa adható meg.

Def: Az $\{1, 2, \dots, n\}$ címkézett csúcsokon adott F fa Prüfer kódja $P(F) := (v_1, v_2, \dots, v_{n-2})$, ahol v_1, v_2, \dots a legkisebb levél szomszédja a fának abban a sorozatában, amit F -ből a legkisebb levélek egymás utáni törlésével kapunk.

Megfigyelés: A Prüfer kódban minden v csúcs pontosan $d(v) - 1$ -szer szerepel. Az i -diknek törölt w_i levél címkéje a legkisebb olyan címke, ami nem szerepel sem a korábban törölt levelek címkéi között, sem a $v_i, v_{i+1}, \dots, v_{n-2}$ csúcsok címkéinek sorozatában.

Kruskal algoritmus: Input: $G = (V, E), k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ Output: $F = F_m$ min. ktg-ű feszítőfa.

Legyen $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, és $k(e_1) \leq k(e_2) \leq \dots \leq k(e_m)$. Legyen $F_0 = \emptyset$, és

$$F_{i+1} := \begin{cases} F_i \cup \{e_i\} & \text{ha } F_i \cup \{e_i\} \text{ körmentes} \\ F_i & \text{ha } F_i \cup \{e_i\} \text{ tartalmaz kört.} \end{cases}$$

Tétel: A Kruskal algoritmus által kiszámított $F = F_m$ élhalmaz a G egy min ktgű feszítőfája.

Gyakorlatok

1. Az előre megszámozott (címkézett) n darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk? (ZH '00)
2. Rajzoljunk olyan egyszerű, 3-reguláris gráfokat, amelyeknek rendre 6, 7, 8, 9 csúcsa van.
3. Döntsük el, van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok fokszámainak sorozata rendre 1, 2, 2, 3, 3, 3 ill. 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4 ill. 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7 ill. 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6. Ha találunk ilyen gráfokat, írjuk fel a szomszédossági mátrixát és adjuk meg szomszédossági tömbbel ill. láncolt szomszédossági listával történő ábrázolását is.
4. Rajzoljuk le azt a gráfot, melynek pontjai a 4 hosszú nullákból és egyesekből álló sorozatok és két csúcs akkor van éllel összekötve, ha egyik a másiktól egy „forgatással” megkapható, azaz ha az egyik a (b_1, b_2, b_3, b_4) akkor a másik a (b_2, b_3, b_4, b_1) sorozathoz tartozó pont. (ZH '00)
5. Határozzuk meg az összes olyan, lényegesen különböző egyszerű gráfot, melyekre rendre $v = 4, e = 5$, ill. $v = 5, e = 3$, ill. $v = 5, e = 7$, ill. $v = 5, e = 8$, teljesül, ahol v jelöli a pontok számát, e pedig az élek számát!
6. Hány 50 csúcsú, 1223 élű, lényegesen különböző egyszerű gráf létezik?
7. Határozzuk meg az összes olyan véges, egyszerű G gráfot, aminek nincs két azonos fokú csúcsa.
8. Mutassuk meg, hogy ha G véges gráf, akkor páratlan fokú pontjainak száma páros. Ha G nem véges, akkor ez nem igaz.
9. Mutassuk meg, hogy ha egy G gráfnak 11 csúcsa és 45 éle van, akkor G -nek van olyan csúcsa, ami legalább 9-edfokú.
10. Ha G egyszerű gráf, akkor élei irányíthatók úgy, hogy ne jöjjön létre irányított kör.
11. Kétten a következő játékot játsszák. Adott n pont a síkon, és felváltva kell kettőt összekötniük. Az veszít, aki kört hoz létre a lerajzolt diagrammal megadott gráfban. Ki nyer, ha mindketten a lehető legjobban játszanak?
12. Legyenek e, f és g a G egyszerű, összefüggő gráf különböző élei. Tegyük fel, hogy a $G - e - f$ és $G - e - g$ gráfok egyike sem összefüggő. Igazoljuk, hogy ekkor a $G - f - g$ gráf sem összefüggő.
13. Hogy néz ki az a lehető legkevesebb csúcsot tartalmazó egyszerű gráf, amelyben a legrövidebb kör hossza pontosan 4 és minden pont harmadfokú? (ZH '98)
14. Mutassunk a komplementerével izomorf, 5- ill. 6-pontú gráfot!
15. Bizonyítsuk be, hogy ha G tetszőleges egyszerű gráf, akkor a G vagy \bar{G} gráfok valamelyike összefüggő!
16. Hány olyan, páronként nem izomorf, 6 pontú, összefüggő, egyszerű gráf létezik, melyben két másodfokú és négy harmadfokú pont van?
17. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges véges G gráfra fennáll, hogy $|E(G)| \geq |V(G)| - c(G)$, ahol $c(G)$ a G gráf összefüggő komponenseinek számát jelöli.
18. Mi lehet a G gráf, ha $\Delta(G) \leq 2$? ($\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszámát jelöli.)
19. A G egyszerű gráfnak e olyan éle, aminek elhagyásával fát kapunk. Mutassuk meg, hogy G -nek még legalább két másik éle is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.
20. Ha T_1 és T_2 két fa ugyanazon a véges ponthalmazon, és e_1 a T_1 tetszőleges éle, akkor létezik T_2 -nek egy e_2 éle, hogy $T_1 - e_1 + e_2$ és $T_2 - e_2 + e_1$ is fa.

21. Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélék. Mi lehet ez a két szám? (V '99)
22. Hány pontja van annak a T fának, melyre $|E(\overline{T})| = 15 \cdot |E(T)|$? (V '00)
23. A G egyszerű gráfnak $2k$ pontja van, minden pontjának foka legalább $k - 1$, és G -nek létezik egy legalább k -adfokú pontja. Bizonyítsuk be, hogy G összefüggő. (V '02)
24. Kétten a következő játékot játsszák. Adott n pont, kezdetben semelyik kettő nincs összekötve. A játékosok felváltva lépnek, minden lépésben a soron következő játékos az n pont közül két tetszőlegesen választott közé behúz egy élet. Az veszít, aki kört hoz létre. A kezdő vagy a másodiknak lépő játékos nyer, ha mindketten a lehető legjobban játszanak? (V '00)
25. Egy $n \times n$ méretű T táblázatnak nincs két egyforma sora. Bizonyítsuk be, hogy T -nek van olyan oszlopa, amit törölve a maradék táblázatban sem lesz két egyforma sor. (V '99)
26. Melyik fák tartoznak az alábbi Prüfer-kódokhoz: $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$, $(10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$, $(1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6)$ ill. $(3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6)$? Mik a legnagyobb fokú csúcsok az egyes fákban, és mennyi a fokszáma? (ZH '03)
27. Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton, melyben a pontpárok távolságai közül a legnagyobb hárommal egyenlő? (Két pont távolságán a köztük levő legrövidebb úton található élek számát értjük.) (V '99)
28. Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton, melynek az n címkéjű csúcs levele? (ZH '03)
29. A $V = \{1, 2, \dots, 2n\}$ (számozott) pontokon hány olyan egyszerű G gráf adható meg, melynek $2n - 2$ éle van és két egyforma méretű összefüggő komponensből áll? (V '00)
30. Keressünk az alábbi gráfban minimális költségű feszítőfát! Hány minimális költségű feszítőfája van a gráfnak? Mi a feszítőfa Prüfer-kódja?
31. Milyen k pozitív egészekre adható meg olyan 2000 élű és 2000 csúcsú összefüggő gráf, amire igaz a következő: G -ben a 2000 él közül adható egynek 2 egységnyi, 1999-nek 1 egységnyi súly úgy, hogy a G -ből kiválasztható különböző minimális súlyú feszítőfák száma éppen k legyen? (A feszítőfák megkülönböztetésekor a gráf csúcsait címkézettnek tekintjük.) (V '99)

