A számítástudomány alapjai

2. gyakorlat, 2013. szeptember 19.

Leszámlálások, alapvető adatszerkezetek, keresés

1. Tudományosan igazolt tény, hogy az atlantiszi országok zászlaja 3 vízszintes sávból áll, minden sáv a piros, fehér, zöld, kék, sárga, fekete színek valamelyikére van színezve, úgy, hogy a szomszédos sávok különböző színűek legyenek. Természetesen különböző országok lobogói egymástól különbözőek. Legfeljebb hány ország létezhetett atlantiszban? Legfeljebb hány olyan ország lehet, melynek zászlajában van piros sáv?

2. Feldobunk tíz egyforma dobókockát. Hányféle lehet az eredmény?

3. Hány bástyát lehet elhelyezni úgy a sakktáblán, hogy egyik se üsse a másikat? És hányféleképpen helyezhető el ez a maximális számú bástya a sakktáblán úgy, hogy ne álljanak ütésben? (Mik a válaszok futókra?(*))

4. Bizonyítsd be, hogy bármely pozitív egész n számra $\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}$.

5. Hány olyan 10 hosszú dobássorozat van a dobókockával, melyben a dobott számok összege 3-mal osztható?

6. Hány különböző módon lehet kitölteni egy ötöslottószelvényt? Hány 5-, 4-, 3- ill. 2-találatos lesz ezek között a sorsolás után?

7. Hányféleképpen állhat fel fotózáshoz két egymás mögötti sorba $2n$ különböző magasságú ember úgy, hogy minden hátsó sorban álló magasabb legyen annál, aki az első sorban közvetlenül előtte áll?

8. Hányféleképpen lehet az alábbi táblázatból kiolvasni a METAMATEMATIKATEMATIKA szót, ha csak jobbra és lefelé haladhatunk?

M	E	T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A
E	T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T
T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E
A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M
M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A
A	T	E	M	A	T	I	K		T	E	M	A	T
T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I
E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I	K
M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I	K	A

9. Nyolc ember szeretne teniszezni három teniszpályán úgy, hogy az egyik pályán párost, a két másikon egyénit játszanak. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha a pályákat különbözőeknek tekintjük, de ugyanazon pálya két térfelét nem különböztetjük meg? (Természetesen az embereket is különbözőeknek tekintjük, és az is számít, hogy a négy páros meccset játszó játékos között ki kinek a partnere.)

10. Egy moziban n széksor van, az egyes sorokban $k_1, k_2, \ldots, k_n$ szék. Hányféleképp ültethetünk le a teremben m embert? Hát egy k székből álló sorba hányféleképp ülhet le l házaspár, ha a párok egymás mellé ülnek?

11. Ha n focicsapat körmérkőzéses bajnokságot játszik, akkor hány mérkőzésre van szükség? Kieséses rendszerben mennyi a szükséges mérkőzések száma?

12. Kovács úr és neje négy másik házaspárt lát vendégül. Megérkezéskor a közeli barátok kezet fognak (a nők is). Természetesen senki sem fog kezet a házastársával. Az este egy későbbi pillanatában Kovács úr megkérdezi a jelenlévőket, hogy hányszor fogtak kezet, s erre csupa különböző választ kap. Hány emberrel fogott kezet Kovácsné? (*)

13. Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor $\phi(n) = n\prod_{p|n,\ \text{p prím}}(1-\frac{1}{p})$ az n-nél kisebb, n-hez relatív prím pozitív egészek száma.

14. Igazoljuk, hogy 2008 tetszőlegesen megadott egész számból kiválasztható néhány úgy, hogy az összegük 2008 többszöröse legyen.

15. Bizonyítsuk be, hogy $\Sigma_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

16. Hány olyan k elemű részhalmaza van n körberakott pontnak, ami nem tartalmaz szomszédos pontokat? (*)

17. 70 tolmács közül bármely kettőre igaz, hogy mindketten ismernek olyan nyelvet, amit a másik nem. Összesen legalább hány nyelvet beszélnek? (*)

18. Egy n oldalú konvex sokszög belsejében nincs olyan pont, amelyen a sokszög kettőnél több átlója halad át. Hány metszéspontja van a sokszög átlóinak a sokszög belsejében? (*)

19. Az amerikai biliárd 15 számozott golyójának egy bizonyos játéknál olyan sorrendben kell a biliárdasztal lyukaiba gurulnia, mely teljesíti az alábbiakat.

    Az elsőként leguruló golyó tetszőleges. Minden $k \geq 1$-re igaz, hogy az első k legurult golyó sorszámaiból álló halmaz k egymást követő pozitív egész szám halmaza. Hány különböző érvényes legurulási sorrendje van a 15 golyónak?

20. A 300 fős évfolyamból néhány embernek (legalább egynek) el kell menni az előadásra, néhánynak (legalább egynek) az évnyitóra, néhánynak (legalább egynek) meg a kocsmába, de ezek egyszerre vannak, hányféleképpen tehetik ezt meg?

21. 10 rabló egy rengeteg lakattal lezárható ládába gyűjti a rabolt kincset. Úgy szeretnék a ládát lelakatolni, és kiosztani a kulcsokat (egy lakathoz többen is kaphatnak kulcsot), hogy bármely 4 rabló ki tudja nyitni a ládát, de ez semelyik 3 rablónak ne sikerülhessen. Legalább hány különböző lakatot kell „venniük” a vasboltban, hogy ezt megtehessék? (*)

22. Egy n főből álló társaságban mindenkiről szeretnénk eltárolni az ismeretségeit, erre két lehetőségünk van: mindenkihez rendelünk egy tömböt (a k. tömb i. eleme 0, ha k nem ismeri az i. személyt és 1, ha ismeri), vagy mindenkihez rendelünk egy láncolt listát (a mutatók az ismerősök azonosítójára mutatnak). Melyik tárolási módszernél kell kevesebb összehasonlítást használnunk a következő feladatoknál?

    (a) El kell tudnunk dönteni, hogy A és B ismeri-e egymást.
    (b) El kell tudnunk dönteni, hogy C-nek van-e ismerőse.
    (c) Mindenkiről meg kell tudnunk mondani, hogy hány ismerőse van.
    (d) El kell tudunk dönteni, hogy van-e olyan ember a társaságban, aki nem ismer senkit.

23. Legalább hány összehasonlítás kell ahhoz, hogy egy n elemű tömbből egy olyan tagot találjunk meg, ami a tömb 10 legkisebb eleme közé tartozik?

24. Az $A[1:n]$ tömbben levő elemekről tudjuk, hogy $A[1] \neq A[n]$. Adjon $c \cdot \log n$ összehasonlítást használó algoritmust, amely talál egy olyan i indexet, hogy $A[i] \neq A[i+1]$! (ZH: 2004. április 8.)

25. A $2^k - 1$ elemű A tómb elemei mind különbózőek és növekvő sorrendben vannak. Minden elemet egy k hosszú bitsorozat ír le, tehát tekinthetjük úgy, hogy a $0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1$ számokat tároljuk, egy kivételével. A feladat ennek a hiányzó számnak a megkeresése. Ehhez egy lépésben valamelyik elem egy bitjére kérdezhetünk rá: a $BIT(i, j)$ eljárás az $A[i]$ elem j-edik bitjét mondja meg. Adjon olyan algoritmust, amely a BIT eljárás ck-szori hívásával megtalálja a hiányzó számot (bitsorozatot). (Vizsga: 2004. június 3.)

26. Az $A[1:n]$ tömbben levő elemek mind különbözőek. Keressük meg a legkisebbet és a legnagyobbat összesen $3n/2$ összehasonlítással.